Université des Sciences et de la Technologie
Mohamed Boudiaf -Oran-
Faculté des Mathématiques et Informatiques
Département des Mathématiques

HAMDAOUI Abdenour

Polycopié

Probabilités
Cours et exercices d'applications

Algérie 2019

Remerciements

J'exprime mes sincères remerciements à Mr. Mounir TLEMCANI, Professeur à l'université des Sciences et de la Technologie d'Oran-Mohamed Boudiaf-, qui m'a fait l'honneur de bien vouloir expertiser ce modeste travail. Je le remercie particulièrement pour ses remarques importantes et ses précieux conseils qui m'ont été très bénéfique.

Je tiens à exprimer mes respectueux remerciements à Mme. Zohra BENKAMRA, Maitre de Conférences A à l'université des Sciences et de la Technologie d'Oran-Mohamed Boudiaf-, d'avoir accepter d'être expert de mon modeste travail. Je tiens à la remercier pour le temps qu'elle a consacré à la lecture de ce polycopié avec une grande précision. Je la remercie également pour ses commentaires et ses suggestions constructifs, ce qui améliora sans aucun doute la qualité de ce travail.

Préface

Ce cours à destination des étudiants de deuxième année licence Mathématique LMD, il comporte le module de Probabilités. Il contient l'essentiel de cours avec des exemples. Des exercices d'applications sont proposés avec des solutions en fin de chaque chapitre pour permettre à l'étudiant de tester ses connaissances et de se préparer aux tests et aux examens finaux.

D'après mon expérience, lors de l'enseignement de ce module durant quelques années, j'ai décidé de préparer ce polycopié qui contient toutes les notions fondamentales liées à ce module.

Vu le programme proposé par le ministère, j'ai partagé ce modeste travail en deux parties essentielles. La première partie contient le chapitre des variables aléatoires discrètes et la deuxième comporte le chapitre des variables aléatoires absolument continues. J'ai commencé la présentation de cet ouvrage par un rappel sur les Probabilités et les Probabilités conditionelles (partie enseignée en L1).

Ensuite, j'ai présenté les deux autres parties, en respectant le contenu et l'ordre des chapitres suivant le canevas donné par le ministère.

Enfin, vu les erreurs répétées souvent dans les copies des examens de ce module, j'ai constaté que la majorité des étudiants ne donnent pas l'importance au cours et ils font des exercices en se basant directement sur les corrigés. Je conseille alors les étudiants de lire d'abord le cours attentivement, de faire tous les exemples cités après chaque résultat donné et enfin de passer à résoudre les exercices proposé sans retourner au corrigé. Les solutions des exercices sont utiles uniquement pour tester le niveau des efforts fournis par l'étudiant.

Finalement, j'espère que ce petit document peut aider les étudiants qui veulent maîtriser bien cette partie de domaine des Probabilités.

Table des Matières

1 Probabilité et Probabilité conditionelle **7**

1.1 Analyse combinatoire et denombrement 7

1.1.1 Permutations 7

1.1.2 Permutations avec répétition 8

1.1.3 Arrangements 8

1.1.4 Arrangements avec répétition 9

1.1.5 Combinaisons 9

1.2 Espace de Probabilité 10

1.2.1 Expérience aléatoire, Espace des évènements, Epreuves et évènements 10

1.2.2 Tribus et probabilités 12

1.3 probabilités Conditionelles 16

1.3.1 Généralités 16

1.3.2 Formule des probabilités composées 17

1.3.3 Théorème des probabilités totales 18

1.3.4 Théorème de Bayes ou formule de Bayes 19

1.3.5 Evènements indépendants 20

1.4 Exercices 22

2 Variables aléatoires discrètes **32**

2.1 Définitions et généralités 32

2.1.1 Propriétés 33

2.2 Loi d'une variable aléatoire discrète 34

2.2.1 Fonction de masse d'une variable aléatoire discrète 35

2.2.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète 38

2.2.3 Probabilité attachée à un intervalle 40
2.3 Moment d'ordre k, Espérance mathématique et Variance d'une variable aléatoire discrète 42
2.4 Transformation de variables aléatoires discrètes 43
2.5 Fonctions remarquables liées à une variable aléatoire discrète 45
2.5.1 Fonction génératrice 46
2.5.2 Fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire réelle discrète 47
2.5.3 Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle discrète . . . 47
2.6 Quelques lois usuelles discrètes 49
2.6.1 Loi de Bernoulli 49
2.6.2 Loi Binomiale 50
2.6.3 Loi Uniforme discrète 52
2.6.4 Loi Hypergéométrique 53
2.6.5 Loi Géométrique 54
2.6.6 Loi de Poisson 56
2.6.7 Approximation d'une loi Binomiale par une loi de Poisson 57
2.6.8 Approximation d'une loi Hypergéométrique par une loi Binomiale . 58
2.7 Exercices 59

3 Variables aléatoires absolument continues **78**
3.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire absolument continue 79
3.1.1 Densité de probabilité d'une variable aléatoire absolument continue 79
3.1.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire absolument continue 80
3.1.3 Probabilité attachée à un intervalle 83
3.2 Paramètres d'une variable aléatoire absolument continue 84
3.2.1 Valeur moyenne ou espérance mathématique d'une v.a.r absolument continue 84
3.2.2 Variance d'une v.a.r absolument continue 85
3.3 Transformation de variables aléatoires absolument continues 86
3.3.1 Cas discrète 86
3.3.2 Cas Continue 88

3.4 Fonctions remarquables liées à une variable aléatoire absolument continue . 90
3.4.1 Fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire absolument continue 90
3.4.2 Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle absolument continue 91
3.5 Quelques inégalitées remarquables 93
3.5.1 Inégalité de Markov 94
3.5.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev 94
3.6 Variables aléatoires absoluments continues usuelles 95
3.6.1 Loi Uniforme 95
3.6.2 Loi Exponentielle 97
3.6.3 Loi Gamma 98
3.6.4 Loi Normale 99
3.6.5 Loi de Cauchy 102
3.7 Exercices 103

Chapitre 1

Probabilité et Probabilité conditionelle

1.1 Analyse combinatoire et denombrement

Le dénombrement s'emploie pour étudier et dénombrer divers types de groupements que l'on peut faire à partir d'ensembles finis.

Définition 1.1 *On considère un ensemble fini E de n éléments distincts $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. On appelle **cardinal** de E, son nombre d'éléments n et on écrit $card\,(E) = n$.*

1.1.1 Permutations

Définition 1.2 *Tout classement ordonné de n éléments distincts est une **permutation** de ces n éléments. Par exemple aebcd est une permutation des éléments a, b, c, d, e.*

Le nombre de permutations de n éléments peut être calculé de la façon suivante : il y a n places possibles pour un premier élément, $n - 1$ pour un deuxième élément, ..., et il ne restera qu'une place pour le dernier élément restant.

On remarque facilement alors qu'il y a $n \times (n-1) \times (n-2) \cdot ... \times 2 \times 1$ permutations possibles.

On note $n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1 = n!$. Par convention, $0! = 1$.

Il y a donc $n!$ permutations de n éléments distincts. Alors le nombre de permutations de n éléments noté P_n, égal $n!$.

Exemple 1.3 *De combien de façons peut-on ranger* 5 *livres différentes sur une étagère.*

La réponse est $P_5 = 5! = 120$. *Donc on peut ranger ces livres dans cette étagère en* 120 *façons différentes.*

1.1.2 Permutations avec répétition

Définition 1.4 *Tout classement ordonné de* n *éléments se répartit en* k *groupes* $n_1, n_2, ..., n_k$ *(i.e.* $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$*) tel que les éléments de chaque groupe sont indiscernables (identiques), est une* ***permutation avec répétition*** *de ces* n *éléments. Par exemple* $aabab$ *est une permutation avec répétition des éléments* a, a, a, b, b.

On peut remarquer facilement que le nombre de permutations avec répétition de n *éléments que l'on notera* $\widetilde{P}_n^{n_1,n_2,...,n_k}$ *est*

$$\widetilde{P}_n^{n_1,n_2,...,n_k} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times ... \times n_k!},$$

c'est le nombre de toutes les permutations possibles entre les n *éléments (on considère que les* n *éléments sont différents) et on enlève les permutations possibles entre les éléments de chaque groupe.*

Exemple 1.5 *De combien de façons peut-on ranger sur une étagère* 5 *livres dont deux livres de mathématiques de même copie et les trois autres livres de physiques sont de mêmes copie.*

La réponse est $\widetilde{P}_5^{2,3} = \dfrac{5!}{2! \times 3!} = 10$. *Donc on peut ranger ces livres dans cette étagère en* 10 *façons différentes.*

1.1.3 Arrangements

Définition 1.6 *Un* ***arrangement*** *de* p *éléments choisis parmis* n *éléments est une collection de* p *objets pris parmis les* n *dont on s'interesse à l'ordre d'apparition et chaque élément ne peut apparaitre qu'une seul fois.*

Le nombre des arrangements de p *éléments choisis parmis* n *éléments est noté* A_n^p.

Le premier peut être choisi de n *façons différentes, le deuxième peut être choisi de* $(n-1)$ *façons différentes,...et le* p*-ième élément peut être choisi de* $(n-p+1)$ *façons* *différentes. D'où le nombre des arrangements de p éléments choisis parmis n éléments est*

$$A_n^p = n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple 1.7 *De combien de façons peut-on construire un code composé de trois chiffres différents.*

La réponse est $A_{10}^3 = \dfrac{10!}{(10-3)!} = 720$*. Donc on peut construire ce code en* 720 *façons différentes.*

Remarque 1.8 *Une permutation de n éléments est un arrangement de n éléments choisis parmis n.*

1.1.4 Arrangements avec répétition

Définition 1.9 *Un* ***arrangement avec répétition*** *de p éléments choisis parmis n éléments est une collection de p objets pris parmis les n dont on s'interesse à l'ordre d'apparition et chaque élément peut apparaitre plus d'une fois.*

Le nombre des arrangements avec répétition de p éléments choisis parmis n éléments est noté $\widetilde{A}_n^p$*.*

Le premier peut être choisi de n façons différentes, le deuxième peut être choisi de n façons différents,...et le p-ième élément peut être choisi de n façons différentes. D'où le nombre des arrangements avec répitition de p éléments choisis parmis n éléments est

$$\widetilde{A}_n^p = \overbrace{n \times n \times ... \times n}^{p\ fois} = n^p.$$

Exemple 1.10 *De combien de façons peut-on construire un mot francais de* 3 *lettres (on ne s'interesse pas au sens du mot).*

La réponse est $\widetilde{A}_{26}^3 = 26^3$*. Donc on peut construire ce mot en* 26^3 *façons différentes.*

1.1.5 Combinaisons

Définition 1.11 *Une* ***combinaison*** *de p éléments choisis parmis n éléments est une collection de p objets pris parmis les n dont on ne s'interesse pas à l'ordre d'apparition de ces éléments.*

Le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmis n éléments est noté C_n^p.

Si l'on permute les éléments de chaque combinaison, on obtient tous les arrangements. Il y'a donc $p!$ fois plus d'arrangements que de combinaisons, ce qui s'écrit

$$A_n^p = p!C_n^p,$$

d'où le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmis n éléments est

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

Exemple 1.12 *De combien de façons peut-on choisir un comité constitué de 3 étudiants dans un groupe de 20 étudiants.*

La réponse est $C_{20}^3 = \dfrac{20!}{3!17!} = 1140$. Donc on peut construire ce comité en 1140 façons différentes.

1.2 Espace de Probabilité

1.2.1 Expérience aléatoire, Espace des évènements, Epreuves et évènements

Définition 1.13 *Une **expérience** ou un **phénomène** est dite **aléatoire**, si on ne peut pas prédire le résultat avec une certitude.*

Autrement dit si tous les résultats de cette expérience sont régis par le hasard.

Exemple 1.14 *Si on lance un dé équilibré, alors on peut obtenir soit le 1, soit le 2, ...,soit le 6.*

Définition 1.15 *L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'**ensemble des résultats possibles** ou l'**espace des évènements** et on le note par Ω.*

Exemple 1.16 *Reprenons l'exemple 1.14, l'ensemble des résultats possibles est* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Définition 1.17 *Un* ***événement*** *est une propriété dont on peut dire si elle est vérifiée ou non une fois le résultat de l'expérience connu. Mathématiquement, un événement est caractérisé par l'ensemble des résultats dans lesquels il est réalisé (un tel résultat est alors appelé une réalisation de l'événement). Ainsi si Ω l'espace des évènements associé à une expérience aléatoire, tout sous ensemble A de Ω est appellé* ***évènement.***

Exemple 1.18 *1. Reprenons l'exemple 1.14, c'est-à-dire $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.*

- *L'événement : "le lancer est un nombre pair" est l'ensemble $\{2, 4, 6\}$.*
- *L'événement : "le lancer est un 5" est l'ensemble $\{5\}$.*

2. On lance deux fois un dé, l'espace des évènements Ω est

$$\Omega = \{(r_1, r_2) \ / \ r_1, r_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

- *L'événement : "le second lancer est un 6" est l'ensemble*

$$\{(r, 6) \ / \ r \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

- *L'événement : "le premier lancer est supérieur au second" est l'ensemble*

$$\{(r_1, r_2) \ / \ r_1 > r_2 \text{ où } r_1, r_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Définition 1.19 *Un singleton (c'est-à-dire un événement réduit à un unique élément de Ω) est appelé* ***événement élémentaire*** *ou bien* ***épreuve.*** *On appelle Ω l'****événement certain*** *et $\varnothing$ l'****événement impossible.*** *Si A est un événement, on appelle $A^c = \overline{A}$ l'****événement contraire*** *de A. Si A et B sont deux événements, on appelle $A \cap B$ l'événement « A et B » et $A \cup B$ l'événement « A ou B ». Finalement, si $A \cap B = \varnothing$, A et B sont dits* ***disjoints,*** *ou* ***incompatibles.***

Définition 1.20 *Une famille $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ des évènements de Ω forme un système complet de Ω, si*

i) pour tout $i \neq j$ $(i, j = 1, ..., n) : A_i \cap A_j = \varnothing$,

ii) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

1.2.2 Tribus et probabilités

Définition 1.21 *(**Tribu**). Soit Ω un ensemble quelconque. Une famille T d'éléments de $P(\Omega)$ (l'ensemble de toutes les parties de l'ensemble Ω) est dite **tribu** si elle vérifie les conditions suivantes :*

i) $\Omega \in T$,

ii) T est stable par passage au complémentaire, i.e. pour tout élément A de T, son complémentaire $A^c = \overline{A}$ est un élément de T,

iii) T est stable par réunion dénombrable, i.e. si $A_1, ..., A_n, ...$une suite finie ou infinie d'éléments de T, $\underset{n\geq 1}{\cup} A_n$ est un élément de T.

Exemple 1.22 *1. $\{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu et est appelée tribu grossière. On ne peut en construire de plus petite.*

2. Si Ω est dénombrable, $P(\Omega)$ est la plus grande tribu définie sur Ω.

3. Si $A \subset \Omega$, l'ensemble des parties $\left\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\right\}$ est une tribu sur Ω.

Proposition 1.23 *Soit $\mathcal{F}$ une famille de parties de Ω. Il existe une plus petite tribu sur Ω qui contient $\mathcal{F}$. On l'appelle tribu engendrée par $\mathcal{F}$ et on la note $\sigma(\mathcal{F})$.*

Exemple 1.24 *La tribu Borélienne sur $\mathbb{R}$, notée $B_{\mathbb{R}}$ est la tribu engendrée par les intervalle $]-\infty, x]$ où $x \in \mathbb{R}$.*

Définition 1.25 *Lorsque T est une tribu sur Ω, le couple (Ω, T) est appelé **espace probabilisable.***

Définition 1.26 *(**Probabilité**). Soit (Ω, T) un éspace probabilisable. On appelle **probabilité** sur (Ω, T), toute application*

$$\begin{array}{rccc} p: & T & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & p(A) \end{array}$$

vérifiant :

i) $p(\Omega) = 1$,

ii) (σ-additivité) Pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de T deux à deux disjoints (incompatibles)

$$p\left(\overset{+\infty}{\underset{i=1}{\cup}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(A_n).$$

Remarque 1.27 *Si p est une probabilité définie sur un espace probabilisable (Ω, T), le triplet (Ω, T, p) s'appelle* ***éspace de probabilité****.*

• **Propriétés**

Proposition 1.28 *Soit (Ω, T, p) un éspace de probabilité, alors*

i) (Additivité finie) Soit $A_1, ..., A_1$ une collection finie d'événements 2 à 2 disjoints. Alors,

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i),$$

ii) $p(\varnothing) = 0$,

iii) pour tout $A \in T$, $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$,

iv) (Monotonicité) pour tout $A, B \in T$, tel que $A \subset B$

$$p(A) \leq p(B),$$

v) (Sous - σ-additivité) Soit I un ensemble fini ou dénombrable et $(A_i)_{i \in I}$ une collection d'événements. Alors,

$$p\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} p(A_i),$$

vi) pour tout $A, B \in T$,

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B),$$

vii) plus généralement, pour tout collection finie $A_1, ..., A_n$

$$\begin{aligned} p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} p(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} p(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} p(A_i \cap A_j \cap A_k) - ... \\ &\quad + (-1)^{n+1} p(A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_n). \end{aligned}$$

Démonstration. i) Elle est immédiate d'aprés la Définition 1.26, il suffit de prendre pour tout $i \geq n+1 : A_i = \varnothing$,

ii) D'aprés i) on a :

$$1 = p(\Omega) = p(\Omega \cup \varnothing) = p(\Omega) + p(\varnothing),$$

donc $p(\varnothing)=0.$

iii) D'aprés i) on a :

$$1=p(\Omega)=p\left(A\cup\overline{A}\right)=p(A)+p\left(\overline{A}\right),$$

donc $p\left(\overline{A}\right)=1-p(A)$.

iv) On a :

$$p(B)=p\left(A\cup\left(B\cap\overline{A}\right)\right)=p(A)+p\left(B\cap\overline{A}\right),$$

donc $p(A)=p(B)-p\left(B\cap\overline{A}\right)\leq p(B)$ car $p\left(B\cap\overline{A}\right)\geq 0.$

v) Soit la famille d'évènements $(B_i)_{i\in I}$ tels que

$B_1=A_1$, $B_2=A_2\setminus A_1=A_2\cap\overline{A_1}$, ..., $B_i=A_i\setminus\left(\overline{\underset{j=1}{\overset{i-1}{\cup}}A_j}\right)$ $(i\in I)$.

Il est clair que les évènements B_i $(i\in I)$ sont disjoints deux à deux, pour tout $i\in I$: $B_i\subset A_i$ et $\underset{i\in I}{\cup}A_i=\underset{i\in I}{\cup}B_i$. Donc

$$p\left(\underset{i\in I}{\cup}A_i\right)=p\left(\underset{i\in I}{\cup}B_i\right)=\sum_{i\in I}p(B_i)\leq\sum_{i\in I}p(A_i).$$

vi) On a : $A\cup B=(A\setminus(A\cap B))\cup(A\cap B)\cup(B\setminus(A\cap B))$ et les trois évènements $A\setminus(A\cap B)$, $A\cap B$ et $B\setminus(A\cap B)$ sont disjoints deux à deux. Alors

$$\begin{aligned}p(A\cup B) &= p(A\setminus(A\cap B))+p(A\cap B)+p(B\setminus(A\cap B))\\ &= p(A)-p(A\cap B)+p(A\cap B)+p(B)-p(A\cap B)\end{aligned}$$

car $p(A)=p(A\setminus(A\cap B))+p(A\cap B)$ et $p(B)=p(B\setminus(A\cap B))+p(A\cap B)$. D'où

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B).$$

vii) En utilisant vi), on trouve

$$\begin{aligned}
p(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= p(A_1 \cup A_2) + p(A_3) - p((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \\
&= p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2) + p(A_3) - p((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) \\
&= p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) - p(A_1 \cap A_2) - p(A_1 \cap A_3) - p(A_2 \cap A_3) \\
&\quad + p(A_1 \cap A_2 \cap A_3),
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
p((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) &= p(A_1 \cap A_3) + p(A_2 \cap A_3) - p((A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)) \\
&= p(A_1 \cap A_3) + p(A_2 \cap A_3) - p(A_1 \cap A_2 \cap A_3).
\end{aligned}$$

On peut déduire par récurrence que

$$\begin{aligned}
p\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} p(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} p(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} p(A_i \cap A_j \cap A_k) - ... \\
&\quad + (-1)^{n+1} p(A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_n).
\end{aligned}$$

■

Un cas particulièrement important est celui où la même probabilité est associée à chaque résultat possible de l'expérience. Bien entendu, ceci n'est possible que si Ω est fini.

• **Probabilité uniforme**

Définition 1.29 *Soit (Ω, T, p) un éspace de probabilité. Les éléments de Ω (fini) sont dits **équiprobables** ou bien la probabilité p est dite **uniforme** sur Ω si*

$$\forall w \in \Omega : p(w) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

où $|\Omega|$ désigne le cardinal de l'ensemble Ω.

Proposition 1.30 *L'orsqu'il y a équiprobabilité des éléments de Ω, la probabilité d'un* *événement A est simplement donnée par*

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

En d'autres termes, la probabilité de A est alors donnée par le quotient du ***nombre de cas favorables*** *(le nombres de cas où l'évènement A est réalisé) par le* ***nombre de cas total*** *(le nombre des éléments de Ω).*

1.3 probabilités Conditionelles

1.3.1 Généralités

Définition 1.31 *Soient (Ω, T, p) un espace de probabilité et B un évènement de Ω de probabilité strictement positive (i.e. $p(B) > 0$). On appelle* ***probabilité de l'évènement*** *A* ***sachant que*** *B* ***est réalisé****, qu'on notera $p(A/B)$, le nombre*

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Proposition 1.32 *Soient (Ω, T, p) un espace de probabilité et B un évènement de Ω tel que $p(B) > 0$. L'application*

$$\begin{array}{rccc} p_B : & T & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & p_B(A) = p(A/B) \end{array}$$

est une probabilité sur (Ω, T).

Démonstration. 1. D'aprés la propriété de monotonicité, il est clair que

$$0 \leq p_B(A) = p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \leq \frac{p(B)}{p(B)} = 1.$$

2. $p_B(\Omega) = p(\Omega/B) = \dfrac{p(\Omega \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(B)}{p(B)} = 1.$

3. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de T, disjoints deux à deux, alors

$$\begin{aligned} p_B\left(\underset{n\geq 1}{\cup} A_n\right) &= p\left(\left(\underset{n\geq 1}{\cup} A_n\right) \ / \ B\right) = \frac{p\left(\left(\underset{n\geq 1}{\cup} A_n\right) \cap B\right)}{p(B)} \\ &= \frac{p\left(\underset{n\geq 1}{\cup} (A_n \cap B)\right)}{p(B)} = \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} p(A_n \cap B)}{p(B)}, \end{aligned}$$

car les éléments de la suite $(A_n \cap B)_{n\geq 1}$ sont disjoints deux à deux. Donc

$$\begin{aligned} p_B\left(\underset{n\geq 1}{\cup} A_n\right) &= \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} p(B)\, p(A_n/B)}{p(B)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p(B)\, p(A_n/B)}{p(B)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p(A_n/B) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_B(A_n). \end{aligned}$$

Ainsi l'application p_B est bien une probabilité sur (Ω, T). ■

1.3.2 Formule des probabilités composées

Proposition 1.33 *Soit (Ω, T, p) un espace de probabilité, et soit la famille d'évènements $A_1, A_2, ..., A_n$ telle que $p\left(\overset{n-1}{\underset{i=1}{\cap}} A_i\right) \neq 0$. Alors*

$$p\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} A_i\right) = p(A_1) \times p(A_2/A_1) \times p(A_3/A_1 \cap A_2) \times ... \times p(A_n/A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}).$$

En particulier

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1) \times p(A_2/A_1) \times p(A_3/A_1 \cap A_2).$$

Démonstration. Par récurrence, en effet :

pour $n = 2$, c'est juste la définition de la probabilité conditionelle.

pour $n = 3$, on a

$$\begin{aligned} p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= p(A_1 \cap A_2) \times p(A_3/A_1 \cap A_2) \\ &= p(A_1) \times p(A_2/A_1) \times p(A_3/A_1 \cap A_2). \end{aligned}$$

On suppose que l'égalité est vraie jusqu'à l'ordre n et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$,

$$p\left(\overset{n+1}{\underset{i=1}{\cap}} A_i\right) = p\left(\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) = p\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} A_i\right) \times p\left(A_{n+1}/\overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} A_i\right)$$

$$= p(A_1) \times p(A_2/A_1) \times p(A_3/A_1 \cap A_2) \times \ldots \times p(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \times p\left(A_{n+1}/\overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} A_i\right),$$

car l'égalité est vraie à l'ordre n. ■

1.3.3 Théorème des probabilités totales

Théorème 1.34 *Soit (Ω, T, p) un espace de probabilité, et soit la famille d'évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ qui forme un système complet de Ω tel que $p(A_i) > 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Alors pour tout évènement $B \in T$, on a*

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)\, p(B/A_i).$$

Démonstration.

$$p(B) = p(B \cap \Omega) = p\left(B \cap \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_i\right)\right) = p\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} (B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} p(B \cap A_i),$$

car les évènements $A_i \cap B$ sont disjoints deux à deux. En utilisant la définition de la probabilité conditionelle, on trouve

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)\, p(B/A_i).$$

■

1.3.4 Théorème de Bayes ou formule de Bayes

Théorème 1.35 *Soit* (Ω, T, p) *un espace de probabilité, et soit la famille d'évènements* $A_1, A_2, ..., A_n$ *qui forme un système complet de* Ω *tel que* $p(A_i) > 0$ *pour tout* $i \in \{1, 2, ..., n\}$. *Si* B *un évènement* ($B \in T$) *tel que* $p(B) > 0$. *Alors pour tout* $j \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$p(A_j/B) = \frac{p(A_j)\, p(B/A_j)}{\sum_{i=1}^{n} p(A_i)\, p(B/A_i)}.$$

Démonstration. Soit $j \in \{1, 2, ..., n\}$, alors

$$p(A_j/B) = \frac{p(B \cap A_j)}{p(B)} = \frac{p(A_j)\, p(B/A_j)}{p(B)}.$$

En utilisant le Théorème des probabilités totales, on trouve

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)\, p(B/A_i),$$

ainsi

$$p(A_j/B) = \frac{p(A_j)\, p(B/A_j)}{\sum_{i=1}^{n} p(A_i)\, p(B/A_i)}.$$

■

Exemple 1.36 *La production totale d'une usine est réalisée par trois machines* A, B *et* C *suivant les pourcentages* 75%, 15% *et* 10% *respectivement. Les proportions de la production défèctueuse sont* 3%, 5.5% *et* 6% *respectivement. On choisit au hasard une unité de la production de cette usine.*

1. Quelle la probabilité que cette unité sera défèctueuse.

2. Sachant que l'unité choisie est bonne, quelle est la probabilité qu'elle serait produite par la machine C.

En effet : On considère les évènements suivants :

M_1 : *"l'unité choisie est produite par la machine* A*"*

M_2 : *"l'unité choisie est produite par la machine* B*"*

M_3 : *"l'unité choisie est produite par la machine* C*"*

D : "l'unité choisie est défèctueuse"

B : "l'unité choisie est bonne".

Il est clair que : $\Omega = \{U \ / U$ *unité produite par la machine* A *ou bien* B *ou bien* $C\}$, *les évènements* M_1, M_2 *et* M_3 *forme un système complet de* Ω *et* $p(M_1) = 0.75$, $p(M_2) = 0.15$, $p(M_3) = 0.1$, $p(D \ / \ M_1) = 0.03$, $p(D \ / \ M_2) = 0.055$ *et* $p(D \ / \ M_3) = 0.06$.

1. En utilisant le Théorème des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} p(D) &= p(M_1)\,p(D \ / \ M_1) + p(M_2)\,p(D \ / \ M_2) + p(M_3)\,p(D \ / \ M_3) \\ &= 0.75 \times 0.03 + 0.15 \times 0.055 + 0.1 \times 0.06 \simeq 0.037 \end{aligned}$$

2. L'évènement B *est l'évènement contraire de l'évènement* D, *donc*

$$p(B) = 1 - p(D) = 1 - 0.037 \simeq 0.963$$

En utilisant le Théorème de Bayes, on trouve

$$p(M_3/B) = \frac{p(M_3)\,p(B/M_3)}{\sum_{i=1}^{3} p(M_i)\,p(B/M_i)} = \frac{p(M_3)\,p(B/M_3)}{p(B)} = \frac{0.1 \times 0.06}{0.963} \simeq 0.006.$$

1.3.5 Evènements indépendants

Définition 1.37 *Deux évènements* A *et* B *liés à une expérience aléatoire dont l'espace des évènements est* Ω, *tels que* $p(A) > 0$ *et* $p(B) > 0$, *sont dites* ***indépendants*** *si* $p(A/B) = p(A)$.

Remarque 1.38 *La condition* $p(A/B) = p(A)$ *entraine que* $p(B/A) = p(B)$, *et donc l'indépendance entre deux évènements segnifie que la réalisation de l'un n'influe pas sur la probabilité de la réalisation de l'autre.*

Proposition 1.39 *Deux évènements* A *et* B *liés à une expérience aléatoire dont l'espace des évènements est* Ω, *tels que* $p(A) > 0$ *et* $p(B) > 0$, *sont dite indépendants si et seulement si* $p(A \cap B) = p(A)\,p(B)$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont indépendants} &\Leftrightarrow p(A/B) = p(A) \\ &\Leftrightarrow \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = p(A) \\ &\Leftrightarrow p(A\cap B) = p(A)\,p(B)\,. \end{aligned}$$

■

Proposition 1.40 *Soit A et B deux évenments, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i) A et B sont indépendants,

ii) A et $\overline{B}$ sont indépendants,

iii) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration. Pour démontrer la Proposition on va démontrer les implications suivantes

$$i) \Rightarrow ii),\ ii) \Rightarrow iii) \text{ et } iii) \Rightarrow i).$$

$i) \Rightarrow ii)$

$$p(A) = p(A\cap B) + p\left(A\cap \overline{B}\right),$$

car les évenments $A\cap B$ et $A\cap \overline{B}$ sont disjoints. Donc

$$p\left(A\cap\overline{B}\right) = p(A) - p(A\cap B) = p(A) - p(A)\,p(B) = p(A)\,(1-p(B)) = p(A)\,p\left(\overline{B}\right),$$

d'où l'indépendance de A et $\overline{B}$.

$ii) \Rightarrow iii)$ immédiatement de la preuve de $i) \Rightarrow ii)$, où $\overline{B}$ joue le role de A dans $i)$ et A joue le role de B dans $i)$.

De même pour $iii) \Rightarrow i)$, il suffit d'utiliser la deuxième implication $ii) \Rightarrow iii)$ deux fois. ■

Définition 1.41 *Une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements est une famille d'événements* ***mutuellement indépendants*** *si, pour tout ensemble d'indices K fini et dans I, la famille $(A_i)_{i\in K}$ forme une famille d'événements indépendants.*

1.4 Exercices

Exercice 1.1. On jette une pièce de monnaie équilibrée trois fois de suite.

1. Décrire l'espace des évènements Ω.

2. Ecrire les sous-ensembles de Ω, correspendants aux évènements suivants :

a) A_i : " la pièce sort pile au i^{eme} jet" $i = 1, 2, 3$,

b) B_i : " la pièce sort au plus i piles" $i = 1, 2, 3$,

c) C_i : " pile sort exactement i fois" $i = 1, 2, 3$.

3. Calculer $p(A_i)$, $p(B_i)$, $P(C_i)$ et $p\left(\overline{B_i}\right)$, $i = 1, 2, 3$.

Exercice 1.2. Soit (Ω, T) un espace probabilisable, et soient A, B et C trois évènements quelconques de Ω.

1. Représenter les evenements suivants

i) Les évènements A, B et C se réalisent.

ii) Exactement un des évènementst A, B et C se réalisent.

iii) Aucun des évènements A, B et C ne se réalise.

iv) Au plus un des évènements A, B et C se réalise.

v) A ne se réalise pas mais au moins un des évènements B et C se réalise.

vi) Exactement deux des évènements A, B et C se réalisent.

Exercice 1.3. On jette deux dés cubiques (à 6 faces 1,2,...,6).

1. Décrire l'espace des évènement Ω et écrire les sous-ensembles de Ω, correspendants aux évènements suivants :

A : "la somme obtenue est au plus égale à 5",

B : "la somme obtenue est au moins égale à 5",

C : "la somme obtenue est strictement inférieure à 3".

2. A et B sont-ils contraires ?

3. B et C sont-ils incompatibles ?

4. A et C sont-ils incompatibles ?

Exercice 1.4. Soit (Ω, T, p) un espace de probabilité et soient A, B deux évènements tels que $p(A) = \frac{1}{4}$, $p(B) = \frac{2}{5}$ et $p(A \cap B) = \frac{3}{20}$.

1. Calculer $p(A \cup B), p\left(A \cap \overline{B}\right)$ et $p\left(A \cup \overline{B}\right)$.

2. A et B sont-ils indépendants.

Exercice 1.5. On lance un dé à 6 faces. On note p_i la probabilité de sortie de la face marquée i. Ce dé est truqué de telle sorte que les probabilités de sortie des faces sont : $p_1 = 0.1$; $p_2 = 0.2$; $p_3 = 0.3$; $p_4 = 0.1$; $p_5 = 0.15$.

1. Quelle est la probabilité de sortie de la face marquée 6.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Exercice 1.6. Dans une population donnée, le nombre de males est la moitié du nombre de femelles. La fréquence d'un caractère "A" est de 4% chez les males et 2.5% chez les femelles.

1. Quelle est la probabilité, qu'un individu pris au hasard de cette population, ait le caractère "A".

2. Sachant que l'individu choisi ayant le caractère "A", Quelle est la probabilité qu'il soit un male.

Exercice 1.7. On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient trois boules blanches et une boule noire. L'urne U_2 contient une boule blanche et deux boules noires. On lance un dé non truqué. Si le dé donne un numéro inférieur ou égal à 2, on tire une boule dans l'urne U_1. Sinon on tire une boule dans l'urne U_2. (On suppose que les boules sont **indiscernables** au toucher).

1) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.

2) On a tiré une boule blanche. Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1.

Exercice 1.8. On doit former un comité comprenant 3 mathématiciens et 2 phisiciens sur la base d'un groupe plus large, formé de 7 mathématiciens et 5 phisiciens.

Quel est le nombre des cas possible pour former ce comité si :

1. Le comité peut comprendre n'importe lequel des mathématiciens et des phisiciens
2. Un phisicien particulier doit-être membre du comité.
3. Deux mathématiciens particuliers doivent être exlus du comité.

Exercice 1.9. 1. Quel est le nombre des cas possibles pour ranger 6 livres de mathématiques et 4 livres de physique sur une étagère.

2. Quelle est la probabilité pour obtenir 3 livres de mathématiques particuliers rangés ensembles.

3. On considère que les livres des mathématique sont des copies de même livre et de même pour les livres de physique.

Combien y a-il de façons pour ranger ses livres.

Exercice 1.10. A l'ouverture, le rayon boulangerie d'un magasin en libre service contient cent baguettes dont x seulement sont fraîches, les autres étant l'invendu de la veille.

1. Madame N est la première cliente de la journée. Elle choisit au hasard k baguettes. Quelle est la probabilité $p_k(m)$ que m d'entre elles soient fraîches ?

2. Si Madame N n'est pas la première cliente de la journée et si n baguettes ($n \leq 100-k$) ont déjà été achetées (toutes choisies au hasard) avant son arrivée, qu'est devenue la probabilité $p_k(m)$?

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1.1.

1.

$$\Omega = \{(r_1, r_2, r_3) \ / \ r_i = \pi \vee F, i = 1, 2, 3\}.$$

2. a)

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{(\pi, r_2, r_3) \ / \ r_i = \pi \vee F, i = 2, 3\}, \\
A_2 &= \{(r_1, \pi, r_3) \ / \ r_i = \pi \vee F, i = 1, 3\}, \\
A3 &= \{(r_1, r_2, \pi) \ / \ r_i = \pi \vee F, i = 1, 2\}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{(F, F, F), (\pi, F, F), (F, \pi, F), (F, F, \pi)\}, \\
B_2 &= \{(F, F, F), (\pi, F, F), (F, \pi, F), (F, F, \pi), (\pi, \pi, F), (\pi, F, \pi), (F, \pi, \pi)\} \\
B_3 &= \{(F, F, F), (\pi, F, F), (F, \pi, F), (F, F, \pi), (\pi, \pi, F), (\pi, F, \pi), (F, \pi, \pi), (\pi, \pi, \pi)\}.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(\pi, F, F), (F, \pi, F), (F, F, \pi)\}, \\ C_2 &= \{(\pi, \pi, F), (\pi, F, \pi), (F, \pi, \pi)\}, \\ C_3 &= \{(\pi, \pi, \pi)\}. \end{aligned}$$

3. La pièce de monaie est bien équilibré, donc tous les éléments de Ω on la même probabilité, ainsi pour tout évènement A de Ω

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

D'où

$$\bullet\ p(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{2^2}{2^3} = \frac{1}{2},$$

Il est facile de remarquer que

$$p(A_2) = p(A_3) = p(A_1) = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \bullet\ p(B_1) &= \frac{|B_1|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \\ p(B_2) &= \frac{|B_2|}{|\Omega|} = \frac{7}{8}, \end{aligned}$$

et

$$p(B_3) = p(\Omega) = 1.$$

$$\begin{aligned} \bullet\ p(C_1) &= \frac{|C_1|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}, \\ p(C_2) &= \frac{|C_2|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}, \end{aligned}$$

et

$$p(C_3) = \frac{1}{8}.$$

$$\begin{aligned}
\bullet\ p\left(\overline{B_1}\right) &= 1-p\left(B_1\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}, \\
p\left(\overline{B_2}\right) &= 1-p\left(B_2\right)=1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8},
\end{aligned}$$

et

$$p\left(\overline{B_3}\right)=1-p\left(B_3\right)=1-1=0.$$

Solution de l'exercice 1.2.

1. i) $A\cap B\cap C$.

ii) $\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\right)$.

iii) $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$.

iv) $\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\right)\cup\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)$.

v) $\overline{A}\cap(B\cup C)$.

vi) $\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\cap C\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\cap C\right)$.

Solution de l'exercice 1.3.

1.

$$\begin{aligned}
\bullet\ \Omega &= \{(r_1,r_2)\ /\ r_1,r_2\in\{1,2,3,4,5,6\}\}, \\
\bullet\ A &= \{(r_1,r_2)\ /\ r_1,r_2\in\{1,2,3,4,5,6\}\ \text{ et } r_1+r_2\leq 5\} \\
&= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)\}, \\
\bullet\ B &= \{(r_1,r_2)\ /\ r_1,r_2\in\{1,2,3,4,5,6\}\ \text{ et } r_1+r_2\geq 5\} \\
&= \overline{A}\cup\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}.
\end{aligned}$$

$$\bullet\ C=\{(r_1,r_2)\ /\ r_1,r_2\in\{1,2,3,4,5,6\}\ \text{ et } r_1+r_2<3\}=\{(1,1)\}.$$

2. A n'est pas l'évènement contraire de B, car $B\neq\overline{A}$. L'évènement contraire de A est

$$\overline{A}=\{(r_1,r_2)\ /\ r_1,r_2\in\{1,2,3,4,5,6\}\ \text{ et } r_1+r_2>5\}.$$

3. B et C sont incompatibles (i.e. disjoints) car $B\cap C=\varnothing$.

4. A et C ne sont pas incompatibles car $A\cap C=\{(1,1)\}\neq\varnothing$.

Solution de l'exercice 1.4.

1.

$$\bullet\ p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\frac{3}{20}=\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}\bullet\ p(A) &= p(A\cap\Omega)=p\left(A\cap\left(B\cup\overline{B}\right)\right)=p\left[(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\right]\\ &= p(A\cap B)+p\left(A\cap\overline{B}\right),\end{aligned}$$

car les deux évènements $A\cap B$ et $A\cap\overline{B}$ sont disjoints. Donc

$$p\left(A\cap\overline{B}\right)=p(A)-p(A\cap B)=\frac{1}{4}-\frac{3}{20}=\frac{1}{10}.$$

$$\begin{aligned}\bullet\ p\left(A\cup\overline{B}\right) &= p(A)+p\left(\overline{B}\right)-p\left(A\cap\overline{B}\right)=\frac{1}{4}+\left(1-\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{10}\\ &= \frac{1}{4}+\frac{3}{5}-\frac{1}{10}=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

2. Comme

$$p(A\cap B)=\frac{3}{20}\neq p(A)\times p(B)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{10},$$

alors les deux évènements A et B ne sont pas indépendants.

Solution de l'exercice 1.5.

1. L'espace des évènements Ω est l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$, on a alors

$$\begin{aligned}p(\Omega) &= p(\{1\})+p(\{2\})+p(\{3\})+p(\{4\})+p(\{5\})+p(\{6\})=1\\ &\Leftrightarrow\ p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1\\ &\Rightarrow\ p_6=1-(0.1+0.2+0.3+0.1+0.15)=1-0.85=0.15,\end{aligned}$$

c'est-à-dire la probabilité de sortie de la face marquée 6 est 0.15.

2. La probabilité d'obtenir un nombre pair est

$$p(\{2,4,6\})=p(\{2\})+p(\{4\})+p(\{6\})=0.2+0.1+0.15=0.45.$$

Solution de l'exercice 1.6.

1. On considère les évènements

M : " l'individu choisi est un male",

F : " l'individu choisi est une femelle",

A : " l'individu choisi ayant le caractère A".

Alors les donnés de l'exercices sont présenté par

$$p(M) = \frac{1}{2}p(F), \; p(A/M) = 0.04 \text{ et } p(A/F) = 0.025.$$

En appliquant le Théorème des probabilités Totales, on trouve

$$p(A) = p(M)\,p(A/M) + p(F)\,p(A/F),$$

or $p(M) + p(F) = 1$, donc

$$\frac{1}{2}p(F) + p(F) = 1,$$

ainsi

$$p(F) = \frac{2}{3} \;\text{ et }\; p(M) = \frac{1}{3},$$

d'où

$$p(A) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{100} + \frac{2}{3} \times \frac{2.5}{100} = 0.03.$$

2. Il s'agit de calculer $p(M/A)$. En utilisant le Théorème de Bayes, on trouve

$$p(M/A) = \frac{p(M)\,p(A/M)}{p(M)\,p(A/M) + p(F)\,p(A/F)} = \frac{p(M)\,p(A/M)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{4}{100}}{0.03} = \frac{4}{9} \simeq 0.44.$$

Solution de l'exercice 1.7.

1. On considère les évènements

B : " la boule tirée est blanche",

A_1 : " la boule tirée provienne de l'urne U_1",

A_2 : " la boule tirée provienne de l'urne U_2", Alors

$$\begin{aligned} p(A_1) &= p(\{1,2\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \\ p(A_2) &= p(\{3,4,5,6\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \\ p(B/A_1) &= \frac{C_3^1}{C_4^1} = \frac{3}{4} \text{ et } p(B/A_2) = \frac{C_1^1}{C_3^1} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

En utilisant la formule des probabilités Totales, on trouve

$$p(B) = p(A_1)\,p(B/A_1) + p(A_2)\,p(B/A_2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{17}{36} \simeq 0.47.$$

2. Il s'agit de calculer $p(A_1/B)$, en utilisant le Théorème de Bayes, on trouve

$$p(A_1/B) = \frac{p(A_1)\,p(B/A_1)}{p(A_1)\,p(B/A_1) + p(A_2)\,p(B/A_2)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}}{\frac{17}{36}} = \frac{9}{17} \simeq 0.53.$$

Solution de l'exercice 1.8.

1. Le nombre des cas possibles est

$$C_7^3 \times C_5^2 = \frac{7!}{3!4!} \times \frac{5!}{2!3!} = 350.$$

2. Le nombre des cas possibles est

$$C_7^3 \times C_1^1 \times C_4^1 = \frac{7!}{3!4!} \times 4 = 140.$$

3. Le nombre des cas possibles est

$$C_5^3 \times C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} \times \frac{5!}{2!3!} = 100.$$

Solution de l'exercice 1.9.

1. Le nombre des cas possibles pour ranger 6 livres de mathématiques et 4 livres de

physique sur une étagère est

$$10! = 10 \times 9 \times ... \times 1 = 3628800.$$

2. La probabilité pour obtenir 3 livres de mathématiques particulier ranger ensemble est

$$\frac{8 \times 3! \times 7!}{10!} = \frac{1}{15} \simeq 0.06.$$

3. Si les livres des mathématique sont des copies de même livre et de même pour les livres de physique, alors le nombre de façons pour ranger ses livres est

$$\frac{10!}{6! \times 4!} = 210.$$

Solution de l'exercice 1.10.

1. On considère l'évènement A :" m bagettes parmis les k bagettes achetées sont fraiches",

donc, il est facile de voir que

$$p_k(m) = p(A) = \frac{C_x^m \times C_{100-x}^{k-m}}{C_{100}^k}.$$

2. On suppose que n baguettes ont déjà été achetées. Il reste donc $100 - n$ baguettes.

La probabilité que j baguettes fraîches aient été achetées avant que Madame N n'arrive est

$$p_n(j) = \frac{C_x^j \times C_{100-x}^{n-j}}{C_{100}^n}.$$

La probabilité que Madame N obtienne m baguettes fraîches sachant que j ont déjà été achetées est

$$\frac{C_{x-j}^m \times C_{100-n-x+j}^{k-m}}{C_{100-n}^k}.$$

Donc, en utilisant le Théorème des probabilités totales, la probabilité $p_k^{'}(m)$ que Madame

N obtienne m baguettes fraîches est

$$\begin{aligned} p_k^{'}(m) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{C_{x-j}^{m} \times C_{100-n-x+j}^{k-m}}{C_{100-n}^{k}} \times \frac{C_x^j \times C_{100-x}^{n-j}}{C_{100}^{n}} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{\left(C_{x-j}^{m} \times C_x^j\right)\left(C_{100-n-x+j}^{k-m} \times C_{100-x}^{n-j}\right)}{C_{100-n}^{k} \times C_{100}^{n}}, \end{aligned}$$

mais on a la relation

$$C_n^k \times C_{n-k}^p = C_n^p \times C_{n-p}^k$$

car ces deux nombres sont égaux à

$$\frac{n!}{k!p!\,(n-k-p)!}.$$

D'où

$$C_{x-j}^m \times C_x^j = C_x^m \times C_{x-m}^j,$$

$$C_{100-n-x+j}^{k-m} \times C_{100-x}^{n-j} = C_{100-x}^{k-m} \times C_{100-x-k+m}^{n-j}$$

et

$$C_{100-n}^k \times C_{100}^n = C_{100}^k \times C_{100-k}^n.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} p_k^{'}(m) &= \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{C_{x-m}^{j} \times C_{100-x-k+m}^{n-j}}{C_{100-k}^{n}}\right) \times \frac{C_x^m \times C_{100-x}^{k-m}}{C_{100}^{k}} \\ &= \frac{C_x^m \times C_{100-x}^{k-m}}{C_{100}^{k}} = p_k(m). \end{aligned}$$

car

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{C_{x-m}^{j} \times C_{100-x-k+m}^{n-j}}{C_{100-k}^{n}} = 1.$$

Chapitre 2

Variables aléatoires discrètes

2.1 Définitions et généralités

Définition 2.1 *Soit* (Ω, T, p) *un espace de probabilité. On appelle* ***variable aléatoire réelle*** *définie sur* (Ω, T) *, toute application*

$$\begin{array}{rcccl} X & : & \Omega & \longrightarrow & E \subset \mathbb{R} \\ & & w & \longmapsto & X(w) \end{array}$$

qui vérifie la condition, pour tout $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$X^{-1}(]-\infty, x]) = \{w \in \Omega : X(w) \leq x\} \in T.$$

Exemple 2.2 *Si on lance une pièce de monaie* 3 *fois de suite et on s'intéresse au nombre de piles obtenus.*

On désigne par X *: "le nombre de piles obtenus lors des trois lancers".*

Montrons que X *représente une variable aléatoire sur* (Ω, T) *tel que*

$$\Omega = \{(a_1, a_2, a_3) \ / a_i = \pi \vee F \ \text{où } i = 1, 2, 3\} \ \text{et } T = P(\Omega).$$

En effet:

si $x < 0 : X^{-1}(]-\infty, x]) = \varnothing,$

si $0 \leq x < 1 : X^{-1}(]-\infty, x]) = \{(F, F, F)\},$

si $1 \leq x < 2 : X^{-1}(]-\infty, x]) = \{(F, F, F), (\pi, F, F), (F, \pi, F), (F, F, \pi)\},$

si $2 \leq x < 3 : X^{-1}(]-\infty, x]) = \{(F,F,F), (\pi,F,F), (F,\pi,F), (F,F,\pi),$

$(\pi,\pi,F), (\pi,F,\pi), (F,\pi,\pi)\},$

si $x \geq 3 : X^{-1}(]-\infty, x]) = \Omega.$

Donc il est évident que pour tout $x \in \mathbb{R} : X^{-1}(]-\infty, x]) \in P(\Omega)$, *donc* X *représente une variable aléatoire sur* (Ω, T).

Remarque 2.3 *En général on note l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire* X, *par* D_X *et on l'appelle le* ***support*** *de la variable aléatoire* X.

Définition 2.4 *Soit* X *une variable aléatoire réelle de support* D_X. *Si* D_X *est un sous ensemble dénombrable de* $\mathbb{R}$, X *est alors appelé* ***variable aléatoire discrète***.

Exemple 2.5 *Reprenons l'Exemple 2.2. Il est clair que le support de* X *est* $D_X = \{0,1,2,3\}$, *donc* X *est une variable aléatoire discrète.*

2.1.1 Propriétés

Proposition 2.6 *Si* X *et* Y *deux variables aléatoires réelles discrètes sur* (Ω, T), *alors*

i) pour tous réelles $a, b : aX + bY$ *est une variable aléatoire discrète,*

ii) XY *est une variable aléatoire discrète,*

iii) $\sup(X,Y)$ *et* $\inf(X,Y)$ *est une variable aléatoire discrète.*

Proposition 2.7 *Soit* X *une variable aléatoire définie sur* Ω, *et à valeurs dans* $D_X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. *Si pour tout* $i = 1, ..., n$:

$$A_i = (X = x_i) = \{w \in \Omega : X(w) = x_i\}.$$

Alors, la famille $\{A_i \ / \ i = 1, ..., n\}$ *forme un système complet de* Ω *et*

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \ I_{A_i}$$

où I_{A_i} *désigne la fonction indicatrice de l'ensemble* A_i, *c'est-à-dire*

$$I_{A_i}(w) = \begin{cases} 1 & si \ \ w \in A_i \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

Démonstration. D'une part, il est clair que : pour tout $w \in \Omega$, il existe $i_0 \in \{1, 2, ..., n\}$ tel que $w \in A_{i_0}$, donc $\Omega = \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_i$ et les évènements A_i sont disjoints deux à deux, d'où la famille des évènements $A_1, A_2, ..., A_n$ forme un système complet de Ω.

D'autre part, soit $w \in \Omega$. Alors il existe $i_1 \in \{1, 2, ..., n\}$ tel que $X(w) = x_{i_1}$. D'où

$$\begin{aligned} X(w) &= x_{i_1} \times 1 = x_{i_1}\ I_{A_{i_1}}(w) \\ &= x_{i_1}\ I_{A_{i_1}}(w) + \sum_{i \neq i_1} x_i\ I_{A_i}(w), \end{aligned}$$

ainsi

$$X(w) = \sum_{i=1}^{n} x_i\ I_{A_i}(w).$$

■

2.2 Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 2.8 *Une fonction réelle p de la forme*

$$p(x) = \begin{cases} p_i & si\ \ x = x_i \\ 0 & sinon \end{cases}$$

*où $x_i \in \{x_1, ..., x_n\}$ (resp. $x_i \in \{x_1, ..., x_n, ...\}$) et $p_i \in [0, 1]$, est appelé une **loi de probabilité** si*

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \ \text{(resp.} \ \sum_{i=1}^{+\infty} p(x_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1\text{)}.$$

Exemple 2.9 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction*

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & si\ \ x \in \{1, ..., n\} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

représente une loi de probabilité, car

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

2.2.1 Fonction de masse d'une variable aléatoire discrète

Définition 2.10 *Soit* X *une variable aléatoire définie sur l'espace de probabilité* (Ω, T, p), *de support fini* $D_X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *ou infini dénombrable* $D_X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$.

- *On note par* $(X = x_i)$ *l'évènement* $\{w \in \Omega : X(w) = x_i\}$.
- *Les quantitées*

$$p(X = x_i) = p(\{w \in \Omega : X(w) = x_i\}) \text{ tel que } x_i \in D_X$$

sont appelées les ***masses au points*** x_i.

Pour détèrminer la ***loi de probabilité de*** X *ou bien la* ***fonction de masse d****e* X, *il faut et il suffit de détèrminer les quantités* $p(X = x_i)$ *pour tout* $x_i \in D_X$. *En général on note les quantitées* $p(X = x_i)$ *par* $p_X(x_i)$ *ainsi la fonction de masse d'une variable aléatoire* X *par* p_X.

Exemple 2.11 *Reprenons l'exemple 2.2. On a,* $D_X = \{0, 1, 2, 3\}$ *et la loi de* X *est:*

$p(X = 0) = p(\{w \in \Omega : X(w) = 0\}) = p(\{(F, F, F)\}) = \frac{1}{8}$,

$p(X = 1) = p(\{w \in \Omega : X(w) = 1\}) = p(\{(\pi, F, F), (F, \pi, F), (F, F, \pi)\}) = \frac{3}{8}$,

$p(X = 2) = p(\{w \in \Omega : X(w) = 2\}) = p((\pi, \pi, F), (\pi, F, \pi), (F, \pi, \pi)) = \frac{3}{8}$,

$p(X = 3) = p(\{w \in \Omega : X(w) = 3\}) = p(\{(\pi, \pi, \pi)\}) = \frac{1}{8}$.

Donc la fonction de masse de X *est*

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & si \quad x = 0 \\ \frac{3}{8} & si \quad x = 1 \\ \frac{3}{8} & si \quad x = 2 \\ \frac{1}{8} & si \quad x = 3 \\ 0 & ailleur. \end{cases}$$

De la définition précédente on déduit immédiatement la remarque suivante

Remarque 2.12 *Si* X *est à valeurs discrètes dans* $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *(resp. dans* $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$*), la loi de* X *est entièrement caractérisée par les quantités* $p(X = x_i)$ *avec* $i \in \{1, 2, ..., n\}$ *(resp.* $i \in \{1, 2, ..., n, ...\}$*).*

D'après les Définitions 2.8 et 2.10 on déduit immédiatement la Proposition suivante

Proposition 2.13 *Une fonction $p(x)$ est la loi d'une variable aléatoire discrète X de support D_X si et seulement si*

$$\sum_{x_i \in D_X} p(x_i) = 1.$$

Démonstration. $\Leftarrow$) immédiatement d'aprés les Définitions 2.8 et 2.10.

$\Rightarrow$) On suppose que $D_X = \{x_1, ..., x_n\}$. Alors les évènements $(X = x_i)$ sont disjoints deux à deux et $\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} (X = x_i) = \Omega$. D'où

$$1 = p(\Omega) = p\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} (X = x_i)\right) = \sum_{x_i \in D_X} p(x_i).$$

La même idée si le support D_X est infini. ■

Exemple 2.14 *On jette un dé deux fois de suite et on note S la variable aléatoire égale à la somme des deux nombres obtenus.*

Il est clair que

$$\Omega = \{(a_1, a_2) \ / \ a_i = 1, 2, ..., 6 \text{ où } i = 1, 2\}, \ D_S = \{2, 3, ..., 12\}$$

et la loi de S est donnée par le tableau suivant

s_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(S = s_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Nous remarquons que

$$\sum_{s_i \in D_X} p(S = s_i) = 1.$$

Remarque 2.15 *D'aprés la Définition 2.10 et la Proposition 2.13, on déduit que*

$$\text{pour tout réel } x \notin D_X : p(X = x) = p_X(x) = 0,$$

c'est-à-dire les masses en dehors du support de X sont nulles.

Proposition 2.16 *Soit X une variable aléatoire discrète définie sur (Ω, T), de support D_X et de fonction de masse p_X. Alors pour toute partie B de $\mathbb{R}$,*

$$p(X \in B) = \sum_{x_i \in D_X \ et \ x_i \in B} p_X(x_i).$$

Démonstration. On suppose que $D_X = \{x_1, ..., x_n, ...\}$,

$$\begin{aligned} p(X \in B) &= p(\{w \in \Omega : X(w) \in B\}) \\ &= p\left(\{w \in \Omega : X(w) \in B \cap D_X\} \cup \left\{w \in \Omega : X(w) \in B \cap \overline{D_X}\right\}\right) \\ &= p(\{w \in \Omega : X(w) \in B \cap D_X\}) + p\left(\left\{w \in \Omega : X(w) \in B \cap \overline{D_X}\right\}\right) \\ &= p(\{w \in \Omega : X(w) \in B \cap D_X\}), \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} p\left(\left\{w \in \Omega : X(w) \in B \cap \overline{D_X}\right\}\right) &\leq p\left(\left\{w \in \Omega : X(w) \in \overline{D_X}\right\}\right) \\ &= 1 - p(\{w \in \Omega : X(w) \in D_X\}) = 0, \end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned} p(\{w \in \Omega : X(w) \in \{x_1, ..., x_n, ...\}\}) &= p\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (\{w \in \Omega : X(w) = x_i\})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} p(\{w \in \Omega : X(w) = x_i\}) \end{aligned}$$

car les évènements $\{w \in \Omega : X(w) = x_i\}_{i \geq 1}$ sont disjoints deux à deux. Comme p_X est la fonction de masse de la v.a X on obtient

$$p(\{w \in \Omega : X(w) \in D_X\}) = \sum_{i=1}^{+\infty} p(X = x_i) = \sum_{x_i \in D_X} p_X(x_i) = 1.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} p(X \in B) &= p(\{w \in \Omega : X(w) \in B \cap D_X\}) \\ &= p\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (\{w \in \Omega : X(w) = t_i \ / \ t_i \in B \cap D_X\})\right) \\ &= \sum_{t_i \in D_X \text{ et } t_i \in B} p(X = t_i) = \sum_{t_i \in D_X \text{ et } t_i \in B} p_X(t_i). \end{aligned}$$

Dans le cas où le support $D_X = \{x_1, ..., x_n\}$ (i.e. D_X est fini) la preuve est plus facile. ■

2.2.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

Définition 2.17 *Soit X une variable aléatoire discrète définie sur l'espace de probabilité (Ω, T, p), de support D_X et de fonction de masse p_X. On appelle la* ***fonction de répartition*** *de la variable aléatoire X, la fonction réelle notée F_X définie par*

$$\begin{aligned} F_X \ : \ \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto F_X(x) = p(X \leq x). \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} F_X(x) &= p(X \leq x) = p(X \in]-\infty, x]) \\ &= \sum_{x_i \in D_X \ et \ x_i \leq x} p(X = x_i) = \sum_{x_i \in D_X \ et \ x_i \leq x} p_X(x_i). \end{aligned}$$

Exemple 2.18 *Soit X la variable aléatoire discrète de fonction de masse p_X donnée par le tableau suivant*

x_i	1	3	7	15
$p_X(x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$

Alors, la fonction de répartition de X est :

Si $x < 1 : F_X(x) = 0$ *par convention,*

si $1 \leq x < 3 : F_X(x) = p_X(1) = \frac{1}{5}$,

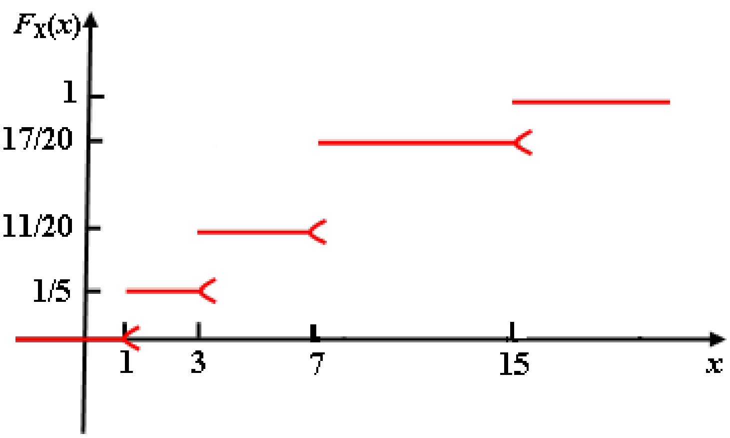
si $3 \leq x < 7 : F_X(x) = p_X(1) + p_X(3) = \frac{1}{5} + \frac{7}{20} = \frac{11}{20}$,

si $7 \leq x < 15 : F_X(x) = p_X(1) + p_X(3) + p_X(7) = \frac{1}{5} + \frac{7}{20} + \frac{3}{10} = \frac{17}{20}$,

si $x \geq 15 : F_X(x) = p_X(1) + p_X(3) + p_X(7) + p_X(15) = \frac{1}{5} + \frac{7}{20} + \frac{3}{10} + \frac{3}{20} = 1$, *ainsi*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x < 1 \\ \frac{1}{5} & si \;\; 1 \leq x < 3 \\ \frac{11}{20} & si \;\; 3 \leq x < 7 \\ \frac{17}{20} & si \;\; 7 \leq x < 15 \\ 1 & si \;\; x \geq 15 \end{cases}.$$

Voici la courbe de la fonction F_X



Proposition 2.19 *Soit* X *une variable aléatoire discrète définie sur l'espace de probabilité* (Ω, T, p) *, de support* D_X *et de fonction de masse* p_X*. Si* $D_X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *(*D_X *fini) tel que* $x_1 < x_2 < ... < x_n$*, alors la fonction de répartition de* X *est :*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x < x_1 \\ \sum_{k=1}^{i} p(X = x_k) = \sum_{k=1}^{i} p_X(x_k) & si \;\; x_i \leq x < x_{i+1} \\ 1 & si \;\; x \geq x_n \end{cases}$$

Si X *prend une infinité de valeurs* $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ *avec* $x_1 < x_2 < ... < x_n < ...$*, on distingue deux cas:*

Si $\max\limits_{i\geq 1} x_i$ *n'est pas fini, alors*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x < x_1 \\ \sum\limits_{k=1}^{i} p(X = x_k) = \sum\limits_{k=1}^{i} p_X(x_k) & si \;\; x_i \leq x < x_{i+1} \end{cases}.$$

Si $\max\limits_{i\geq 1} x_i$ *est fini, alors*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x < x_1 \\ \sum\limits_{k=1}^{i} p(X = x_k) = \sum\limits_{k=1}^{i} p_X(x_k) & si \;\; x_i \leq x < x_{i+1} \\ 1 & si \;\; x \geq \max\limits_{i\geq 1} x_i \end{cases}.$$

Remarque 2.20 *Les sauts de la fonction de répartition* F_X *ont lieu en les points* x_i *(*$x_i \in D_X$*) et le saut aux point* x_i *est égale à* $p(X = x_i) = p_X(x_i)$ *qui sont appelés les masse en* x_i*.*

• Propriétées de la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

Proposition 2.21 *Soit* X *une variable aléatoire discrète, de fonction de répartition* F_X*, alors*

i) $0 \leq F_X(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$,

iii) F_X *est croissante,*

iv) F_X *est continue à droite.*

Remarque 2.22 *Pour qu'une fonction réelle* F*, puisse être considérée comme une fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète, il faut qu'elle vérifie les quatre conditions de la Proposition précédente.*

2.2.3 Probabilité attachée à un intervalle

Proposition 2.23 *Soit* X *une variable aléatoire discrète définie sur l'espace de probabilité* (Ω, T, p) *, de support* D_X*, de fonction de masse* p_X *et de fonction de répartition* F_X*, alors*

i) $p(X \in]a, b]) = F_X(b) - F_X(a)$, *ii)* $p(X \in [a,b[) = F_X(b) - F_X(a) + p_X(a) - p_X(b)$,

iii) $p(X \in]a,b[) = F_X(b) - F_X(a) - p_X(b)$,

iv) $p(X \in [a,b]) = F_X(b) - F_X(a) + p_X(a)$,

v) $p(X \in]a,+\infty[) = 1 - F_X(a)$,

vi) $p(X \in [a,+\infty[) = 1 - F_X(a) + p_X(a)$.

Démonstration. i)

$$\begin{aligned}
\bullet\ p(X \in]a,b]) &= p(\{w \in \Omega : a < X(w) \leq b\}) \\
&= p(\{w \in \Omega : X(w) > a \ \text{ et } \ X(w) \leq b\}) \\
&= p[(\{w \in \Omega : X(w) > a\}) \cap (\{w \in \Omega : X(w) \leq b\})].
\end{aligned}$$

En utilisant la formule $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$, on obtient

$$\begin{aligned}
p(X \in]a,b]) &= p(\{w \in \Omega : X(w) > a\}) + p(\{w \in \Omega : X(w) \leq b\}) \\
&\quad - p[(\{w \in \Omega : X(w) > a\}) \cup (\{w \in \Omega : X(w) \leq b\})] \\
&= (1 - F_X(a)) + F_X(b) - p(\Omega) = F_X(b) - F_X(a).
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
\bullet\ p(X \in [a,b[) &= p(\{w \in \Omega : a \leq X(w) < b\}) \\
&= p(\{w \in \Omega : X(w) \geq a \ \text{ et } \ X(w) < b\}) \\
&= p[(\{w \in \Omega : X(w) \geq a\}) \cap (\{w \in \Omega : X(w) < b\})]
\end{aligned}$$

En utilisant la formule $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$, on obtient

$$\begin{aligned}
p(X \in [a,b[) &= p(\{w \in \Omega : X(w) \geq a\}) + p(\{w \in \Omega : X(w) < b\}) \\
&\quad - p[(\{w \in \Omega : X(w) \geq a\}) \cup (\{w \in \Omega : X(w) < b\})] \\
&= p(\{w \in \Omega : X(w) > a\}) + p(\{w \in \Omega : X(w) = a\}) + p(\{w \in \Omega : X(w) \leq b\}) \\
&\quad - p(\{w \in \Omega : X(w) = b\}) - p[(\{w \in \Omega : X(w) \geq a\}) \cup (\{w \in \Omega : X(w) < b\})] \\
&= (1 - F_X(a)) + p_X(a) + F_X(b) - p_X(b) - p(\Omega) \\
&= F_X(b) - F_X(a) + p_X(a) - p_X(b).
\end{aligned}$$

De même façon on peut démontrer iii) et iv).

v)

$$\bullet\, p\left(X \in \left]a,+\infty\right[\right) = p\left(\{w \in \Omega : X(w) > a\}\right) = 1 - p\left(\{w \in \Omega : X(w) \leq a\}\right) = 1 - F_X(a).$$

vi)

$$\begin{aligned} \bullet\, p\left(X \in \left[a,+\infty\right[\right) &= p\left(\{w \in \Omega : X(w) \geq a\}\right) \\ &= p\left(\{w \in \Omega : X(w) > a\}\right) + p\left(\{w \in \Omega : X(w) = a\}\right) \\ &= 1 - F_X(a) + p_X(a). \end{aligned}$$

■

2.3 Moment d'ordre k, Espérance mathématique et Variance d'une variable aléatoire discrète

Définition 2.24 *Soit X une variable aléatoire discrète définie sur l'espace de probabilité (Ω, T, p), de support D_X et de fonction de masse p_X. Le **moment d'ordre** k $(k \in \mathbb{N}^*)$, de X noté $E\left(X^k\right)$, s'il existe est défini par*

$$E\left(X^k\right) = \sum_{x_i \in D_X} x_i^k \; p(X = x_i) = \sum_{x_i \in D_X} x_i^k \; p_X(x_i).$$

• *La **moyenne** de la variable aléatoire X ou bien l'**espérance mathématique** de X est le moment d'ordre* 1,

$$E(X) = \sum_{x_i \in D_X} x_i \; p(X = x_i) = \sum_{x_i \in D_X} x_i \; p_X(x_i).$$

• *La **variance** de la variable aléatoire X est le moment d'ordre* 2 *de la variable* *aléatoire* $(X - E(X))$,

$$var(X) = E(X - E(X))^2 = \sum_{x_i \in D_X} (x_i - E(X))^2 \; p_X(x_i).$$

• *La quantité* $\sqrt{var(X)}$ *notée* σ_X *est appelée l'**écart quadratique moyen** ou l'**écart type** de la variable aléatoire* X.

Remarque 2.25 *1. Dans le cas où le support* D_X *est un ensemble dénombrable infini (i.e.* $D_X = \{x_1, ..., x_n, ...\}$*), l'existence des moments d'ordre* k *est liée à la nature de la série numérique* $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i^k \; p_X(x_i)$.

2. La variance d'une variable aléatoire X *mesure la dispersion des valeurs de* X *autour de sa moyenne* $E(X)$.

• **Propriétés**

Proposition 2.26 *Soit* X *une variable aléatoire discrète définie sur l'espace de probabilité* (Ω, T, p), *de support* D_X, *de fonction de masse* p_X, *d'espérance* $E(X)$ *et de variance* $var(X)$. *Alors pour tous réels* a, b

i) $E(aX + b) = aE(X) + b$,

ii) $var(aX + b) = a^2 \; var(X)$,

iii) $E(a) = a$ *et* $var(a) = 0$,

iv) la variance de X *peut s'éxprimer par la formule suivante*

$$var(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2.$$

2.4 Transformation de variables aléatoires discrètes

Proposition 2.27 *Soit* X *une variable aléatoire discrète définie sur l'espace de probabilité* (Ω, T, p), *de support* D_X *et de fonction de masse* p_X *et soit l'application*

$$\begin{array}{rcccc} h & : & D_X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & h(x) \end{array}.$$

On pose $Y = h \circ X = h(X)$, *c'est-à-dire*

$$\begin{array}{rcccc} Y = h \circ X & : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & w & \longmapsto & h \circ X(w) = h(X(w)). \end{array}$$

Alors Y *est une variable aléatoire discrète de support* $D_Y = h(D_X)$ *et de fonction de masse* p_Y *définie par*

$$p_Y(y_i) = p(Y = y_i) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_j \in h^{-1}(\{y_i\})} p_X(x_j) & si\ y_i \in D_Y \\ 0 & sinon \end{cases},$$

où

$$h^{-1}(\{y_i\}) = \{t_j \in D_X : h(t_j) = y_i\}.$$

Exemple 2.28 *Soit* X *la v.a.d de fonction de masse* p_X *donnée par le tableau suivant*

x_i	-2	-1	0	1	2
$p_X(x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

On pose $Y = h(X) = X^2$. *Donc* Y *est une v.a.d de support*

$$D_Y = h(D_X) = \{h(x) : x \in D_X\} = \{0, 1, 4\}$$

et de fonction de masse définie par les quantitées suivantes

$$p_Y(0) = p(Y = 0) = \sum_{x_i \in h^{-1}(\{0\})} p_X(x_i) = p_X(0) = \frac{1}{2},$$

$$p_Y(1) = p(Y = 1) = \sum_{x_i \in h^{-1}(\{1\})} p_X(x_i) = p_X(-1) + p_X(1) = \frac{1}{10} + \frac{3}{20} = \frac{1}{4},$$

$$p_Y(4) = p(Y = 4) = \sum_{x_i \in h^{-1}(\{1\})} p_X(x_i) = p_X(-2) + p_X(2) = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4}.$$

D'où la fonction de masse de la v.a Y *est donnée par le tableau suivant*

y_i	0	1	4
$p_Y(y_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

.

Proposition 2.29 *Soit* X *une variable aléatoire discrète définie sur l'espace de probabilité*

(Ω, T, p), *de support* D_X *et de fonction de masse* p_X *et soit l'application*

$$\begin{array}{rccl} h & : & D_X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & h(x). \end{array}$$

L'espérance mathématique de la variable alétoire $h(X)$ *peut s'éxprimer comme suit*

$$E(h(X)) = \sum_{x_i \in D_X} h(x_i)\ p(X = x_i) = \sum_{x_i \in D_X} h(x_i)\ p_X(x_i).$$

Exemple 2.30 *Reprenons l'Exemple précédent (i.e. l'Exemple 2.28), on a*

$$\begin{aligned} E(|X|) &= \sum_{x_i \in D_X} |x_i|\ p_X(x_i) \\ &= |-2| \times p_X(-2) + |-1| \times p_X(-1) + |0| \times p_X(0) + |1| \times p_X(1) + |2| \times p_X(2) \\ &= 2 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{20} + 2 \times \frac{1}{20} = \frac{3}{4} = 0.75. \end{aligned}$$

2.5 Fonctions remarquables liées à une variable aléatoire discrète

Définition 2.31 *On appelle* ***variable aléatoire complexe*** *toute application* Z *de* (Ω, T, p) *vers* $\mathbb{C}$ *qui à tout* w *dans* Ω *associe*

$$Z(w) = X(w) + iY(w)$$

où X *et* Y *sont des variables aléatoires réelles.*

Définition 2.32 *On dit qu'une variable aléatoire complexe* $Z = X + iY$, ***admet un moment d'ordre*** 1 *(son espérance* $E(Z)$ *existe) si les espérances des variables aléatoires réelles* X *et* Y *existent. Si c'est le cas, on a*

$$E(Z) = E(X) + iE(Y).$$

2.5.1 Fonction génératrice

Définition 2.33 *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de fonction de masse p_X. On appelle* ***fonction génératrice*** *de X la fonction*

$$\begin{array}{rccc} G_X & : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & G_X(z) = E\left(z^X\right) \end{array}$$

où

$$E\left(z^X\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \ p_X(k)$$

qui est une série entière.

En utilisant la définition de la fonction génératrice d'une variable aléatoire, nous remarquons que

$$G_X(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_X(k) = 1,$$

donc le rayon de convergence R de la série entière est supèrieur ou egal à 1. Si $R > 1$, on peut échanger somme et dérivée, ce qui donne

$$G_X^{'}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} k z^{k-1} \ p_X(k) \Rightarrow G_X^{'}(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \ p_X(k) = E(X)$$

et

$$G_X^{''}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) z^{k-2} \ p_X(k) \Rightarrow G_X^{''}(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) \ p_X(k) = E[X(X-1)].$$

Nous avons donc le résultat suivant.

Proposition 2.34 *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la fonction génératrice $G_X(z)$ admet un rayon de convergence strictement supèrieur à 1. Alors on a*

$$E(X) = G_X^{'}(1)$$

et

$$var(X) = G_X^{''}(1) + G_X^{'}(1) - \left(G_X^{'}(1)\right)^2.$$

Démonstration. En utilisant la Proposition précédente et la Proposition 2.26, on trouve

$$\begin{aligned}
Var\left(X\right) &= E\left[\left(X-E\left(X\right)\right)^{2}\right]=E\left[\left(X-E\left(X\right)\right)\left(X-E\left(X\right)\right)\right] \\
&= E\left[\left(X-E\left(X\right)\right)\left(X-1+1-E\left(X\right)\right)\right] \\
&= E\left[X\left(X-1\right)\right]+E\left[X\left(1-E\left(X\right)\right)\right]-E\left[E\left(X\right)\left(X-E\left(X\right)\right)\right] \\
&= G_{X}^{''}\left(1\right)+\left(1-G_{X}^{'}\left(1\right)\right)G_{X}^{'}\left(1\right)=G_{X}^{''}\left(1\right)+G_{X}^{'}\left(1\right)-\left(G_{X}^{'}\left(1\right)\right)^{2}.
\end{aligned}$$

■

2.5.2 Fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire réelle discrète

Définition 2.35 *Soit X une v.a réelle discrète de support D_X et de fonction de masse p_X. On appelle* ***fonction génératrice des moments*** *de la v.a X, la fonction réelle M_X définie par :*

$$\begin{array}{rcccc} M_X & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & E\subset\mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & M_X\left(t\right)=E\left(e^{Xt}\right) \end{array},$$

à savoir

** Si D_X est fini (i.e. $D_X=\{x_1,...,x_n\}$),*

$$M_X\left(t\right)=\sum_{j=1}^{n}e^{x_j t}\ p_X\left(x_j\right).$$

** Si D_X est dénombrable infini (i.e. $D_X=\{x_1,...,x_n,....\}$),*

$$M_X\left(t\right)=\sum_{j=1}^{+\infty}e^{x_j t}\ p_X\left(x_j\right).$$

2.5.3 Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle discrète

Définition 2.36 *Soit X une variable aléatoire discrète définie sur l'espace de probabilité (Ω,T,p), de support D_X et de fonction de masse p_X. On appelle* ***fonction caractéris-***

tique *de la v.a X la fonction réelle φ_X définie par :*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_X & : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \varphi_X(t) = E\left(e^{iXt}\right) \end{array}$$

où i est le nombre complexe qui vérifie $i^2 = 1$.

** Si D_X est finie (i.e. $D_X = \{x_1, ..., x_n\}$,*

$$\varphi_X(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{ix_j t}\ p_X(x_j).$$

** Si D_X est dénombrable infini (i.e. $D_X = \{x_1, ..., x_n, ...\}$,*

$$\varphi_X(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} e^{ix_j t}\ p_X(x_j).$$

Remarque 2.37 *La fonction caractéristique d'une variable aléatoire discrète est toujours définie sur $\mathbb{R}$. En effet :*

Si D_X est fini, il est clair que $\varphi_X(t)$ est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Si D_X est dénombrable infini,

$$|\varphi_X(t)| \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \left|e^{ix_j t}\right|\ p_X(x_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} p_X(x_j) = 1,$$

donc la série $\sum_{j=1}^{+\infty} e^{ix_j t}\ p_X(x_j)$ est convergente sur $\mathbb{R}$, ainsi la fonction φ_X est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.38 *Si X est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre n, alors la fonction caractéristique de X est de classe C^n et on a :*

$$\forall k \in \{1, ..., n\} : \varphi_X^{(k)}(0) = i^k E\left(X^k\right).$$

En particulier, si X admet un moment d'ordre 2 et est centrée avec une variance σ^2, on a le d ´eveloppement limité en 0 :

$$\varphi_X(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o\left(t^2\right).$$

2.6 Quelques lois usuelles discrètes

2.6.1 Loi de Bernoulli

Définition 2.39 ***(Expérience de Bernoulli).*** *De toute expérience aléatoire on peut s'interesser à deux résultats r_1 et r_2 et on les note respectivement (**succé** et **échec**). On peut construire une v.a.d qui suit une loi de Bernoulli (variable aléatoire à deux valeurs) de paramètre p_1 où $p_1 = p\,(succé)$.*

Définition 2.40 *Soit (Ω, T, p) un espace de probabilité, et soit A un évènement tel que $p\,(A) = p_1 > 0$. L'application*

$$\begin{array}{rcccc} X = I_A & : & \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & & w & \longmapsto & X\,(w) = I_A\,(w) \end{array}$$

*est une variable aléatoire qui suit une loi de **Bernoulli de paramètre** p_1 et on note*

$$X \sim B\,(p_1)\,.$$

Remarque 2.41 *1. Si $X \sim B\,(p_1)\,,$ alors*

$$p\,(X=1) = p_1 \quad et \quad p\,(X=0) = 1 - p_1.$$

2. Toute variable aléatoire à deux valeurs suit une loi de Bernoulli.

Proposition 2.42 *Si $X \sim B\,(p_1)\,,$ alors*

$$E\,(X) = p_1 \quad et \quad var\,(X) = p_1\,(1-p_1)\,.$$

Démonstration.

- $E\,(X) = \sum_{x_i \in D_X} x_i p\,(X = x_i) = 0 \times (1-p_1) + 1 \times p_1 = p_1.$
- $E\left(X^2\right) = \sum_{x_i \in D_X} x_i^2 p\,(X = x_i) = 0^2 \times (1-p_1) + 1^2 \times p_1 = p_1$

donc

$$var\left(X\right)=E\left(X^{2}\right)-\left(E\left(X\right)\right)^{2}=p_{1}-p_{1}^{2}=p_{1}\left(1-p_{1}\right).$$

■

2.6.2 Loi Binomiale

Si on répète l'expérience de Bernoulli n fois de façons indépendantes, on peut construire une variable aléatoire qui suit une loi Binomiale de paramètres n, p_1 où p_1 est le paramètre de Bernoulli.

Définition 2.43 *On dit q'une variable aléatoire X définie sur un espace de probabilité (Ω, T, p), suit une loi* ***Binomiale de paramètres*** *n, p_1 et on note $X \sim B(n, p_1)$ si $D_X = \{0, 1, ..., n\}$ et sa fonction de masse p_X est donnée par*

$$p_{X}\left(k\right)=\begin{cases}C_{n}^{k}\ p_{1}^{k}\ \left(1-p_{1}\right)^{n-k} & si\ k\in D_{X}\\ 0 & sinon\end{cases}.$$

En utilisant le binome de Newton il est facile de montrer que la fonction p_X représente une loi de probabilité, en effet :

$$\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}\ p_{1}^{k}\ \left(1-p_{1}\right)^{n-k}=\left(p_{1}+\left(1-p_{1}\right)\right)^{n}=1^{n}=1.$$

Proposition 2.44 *Si $X \sim B(n, p_1)$, alors*

$$E\left(X\right)=np_{1}\ et\ var\left(X\right)=np_{1}\left(1-p_{1}\right).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\bullet\ E\left(X\right) &= \sum_{x_{i}\in D_{X}}x_{i}p\left(X=x_{i}\right)=\sum_{k=0}^{n}k\ C_{n}^{k}\ p_{1}^{k}\ \left(1-p_{1}\right)^{n-k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}k\ C_{n}^{k}\ p_{1}^{k}\ \left(1-p_{1}\right)^{n-k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}k\ \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}\ p_{1}^{k}\ \left(1-p_{1}\right)^{n-k}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\; p_1^k\;\; (1-p_1)^{n-k} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j!\,(n-1-j)!}\; p_1^{j+1}\;\; (1-p_1)^{n-1-j}
\end{aligned}
$$

La dèrnière égalité vient du changement de variable $j = k-1$. Donc

$$
\begin{aligned}
E(X) &= np \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!\,(n-1-j)!}\; p_1^j\;\; (1-p_1)^{n-1-j} \\
&= np \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j\; p_1^j\;\; (1-p_1)^{n-1-j} \\
&= np\,(p_1 + (1-p_1))^{n-1} = np.1^n = np.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bullet\; E\left(X^2\right) &= \sum_{x_i \in D_X} x_i^2 p\,(X = x_i) = \sum_{k=0}^{n} k^2\; C_n^k\; p_1^k\;\; (1-p_1)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2\; C_n^k\; p_1^k\;\; (1-p_1)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2\; \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\; p_1^k\;\; (1-p_1)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\; \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\; p_1^k\;\; (1-p_1)^{n-k} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\; \frac{n!}{j!\,(n-1-j)!}\; p_1^{j+1}\;\; (1-p_1)^{n-1-j}
\end{aligned}
$$

La dèrnière égalité vient du changement de variable $j = k-1$. Donc

$$
\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \sum_{j=0}^{n-1} j\; \frac{n!}{j!\,(n-1-j)!}\; p_1^{j+1}\;\; (1-p_1)^{n-1-j} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j!\,(n-1-j)!}\; p_1^{j+1}\;\; (1-p_1)^{n-1-j} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(j-1)!\,(n-1-j)!}\; p_1^{j+1}\;\; (1-p_1)^{n-1-j} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j!\,(n-1-j)!}\; p_1^{j+1}\;\; (1-p_1)^{n-1-j} \\
&= \sum_{l=0}^{n-2} \frac{n!}{l!\,(n-2-l)!}\; p_1^{l+2}\;\; (1-p_1)^{n-2-l} + np_1 \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j\; p_1^j\;\; (1-p_1)^{n-1-j}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= n(n-1)\,p_1^2 \sum_{l=0}^{n-2} C_{n-2}^{l}\; p_1^{l}\;\; (1-p_1)^{n-2-l} + np_1 \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j}\; p_1^{j}\;\; (1-p_1)^{n-1-j} \\ &= n(n-1)\,p_1^2 + np_1. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} var(X) &= E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = n(n-1)\,p_1^2 + np_1 - n^2p_1^2 \\ &= np_1(1-p_1). \end{aligned}$$

■

2.6.3 Loi Uniforme discrète

Définition 2.45 *On dit q'une variable aléatoire X définie sur un espace de probabilité (Ω, T, p), suit une loi* ***Uniforme*** *sur $\{1, ..., n\}$ et on note $X \sim U_{\{1,...,n\}}$, si son support est $D_X = \{1, ..., n\}$ et sa fonction de masse p_X est donnée par*

$$p_X(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & si\ k \in \{1, ..., n\} \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

Proposition 2.46 *Si $X \sim U_{\{1,...,n\}}$, alors*

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad et \quad var(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \bullet\ E(X) &= \sum_{x_i \in D_X} x_i p(X = x_i) = \sum_{k=1}^{n} k\ \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{2}(1+n)\right) = \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet\ E\left(X^2\right) &= \sum_{x_i \in D_X} x_i^2 p(X = x_i) = \sum_{k=0}^{n} k^2\ \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

car $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. D'où

$$\begin{aligned} var(X) &= E\left(X^2\right) - E^2(X) \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}. \end{aligned}$$

■

Exemple 2.47 *La variable aléatoire X représentant le résultat du lancer d'un dé non truqué (dé équilibré) suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$.*

Il est clair que $D_X = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $p(X=k) = \frac{1}{n}$ pour tout $k \in D_X$, donc $X \sim U_{\{1,\ldots,6\}}$.

Remarque 2.48 *De même manière donnée dans la définition 2.45 on peut définir une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{x_1,\ldots,x_n\}$ par sa fonction de masse suivante*

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } k \in \{x_1,\ldots,x_n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2.6.4 Loi Hypergéométrique

Définition 2.49 *On dit qu'une variable aléatoire X définie sur un espace de probabilité (Ω, T, p), suit une loi **Hypergéométrique de paramètres** N, N_1, n et on note $X \sim H(N, N_1, n)$ si $D_X = \{0, 1, \ldots, \min(N_1, n)\}$ et sa fonction de masse p_X est donnée par*

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{C_{N_1}^k \times C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n} & \text{si } k \in D_X \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exemple 2.50 *Considérons une urne contenant N boules dont N_1 boules blanches et $N - N_1$ boules noires. On tire en une seule fois n boules et on note par X : " Le nombre de boules blanches parmis les n tirées".*

En utilisant la théorie classique des probabilités, il est facile de remarquer que

$$p(X=k) = \frac{C_{N_1}^k \times C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n} \quad \text{pour tout } k \in \{0,1,\ldots,\min(N_1,n)\},$$

donc il s'agie d'une variable aléatoire qui suit une loi hypergéométrique de paramètres $N, N_1, n,$ *c'est-à-dire* $X \sim H(N, N_1, n)$.

Proposition 2.51 *Si* $X \sim H(N, N_1, n)$, *alors*

$$E(X) = np_1 \text{ et } var(X) = np_1(1-p_1)\ \frac{N-n}{N-1}$$

où $p_1 = \dfrac{N_1}{N}$.

2.6.5 Loi Géométrique

Définition 2.52 *On dit q'une variable aléatoire* X *définie sur un espace de probabilité* (Ω, T, p), *suit une loi* ***Géométrique de paramètre*** p_1 *et on note* $X \sim G(p_1)$ *si* $D_X = \{1, 2, ...\} = \mathbb{N}^*$ *et sa fonction de masse* p_X *est donnée par*

$$p_X(k) = \begin{cases} p_1(1-p_1)^{k-1} & si\ k \in D_X \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

Exemple 2.53 *On lance une pièce de monaie tel que* $p(\pi) = p_1$ *et on note par* X : *" Le nombre de lancers nécéssaires pour obtenir le premier pile".*

Il est clair que $D_X = \{1, 2, ...\} = \mathbb{N}^*$ *et*

$p(X = 1) = p\{w \in \Omega : X(w) = 1\}$ *où* $\Omega = \{\pi, F\}$, *donc*

$$p(X = 1) = p\{\pi\} = p_1.$$

$p(X = 2) = p\{w \in \Omega : X(w) = 2\}$ *où* $\Omega = \{(r_1, r_2)\ /\ r_1, r_2 = \pi \vee F\}$, *donc*

$$p(X = 2) = p\{(F, \pi)\} = p_1(1-p_1).$$

$p(X = 3) = p\{w \in \Omega : X(w) = 3\}$ *où* $\Omega = \{(r_1, r_2, r_3)\ /\ r_1, r_2, r_3 = \pi \vee F\}$, *donc*

$$p(X = 3) = p\{(F, F, \pi)\} = p_1(1-p_1)^2.$$

En utilisant la formule récurente on peut remarquer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$p(X=k) = p\{(F,F,...,F,\pi)\} = p_1(1-p_1)^k$$

tel que $(F,F,...,F,\pi)$ *contient* k *composantes.*

Proposition 2.54 *Si* $X \sim G(p_1)$, *alors*

$$E(X) = \frac{1}{p_1} \text{ et } var(X) = \frac{(1-p_1)}{p_1^2}.$$

Démonstration. En utilisant le Théorème de dérivabilité pour les série entières on a

$$\bullet\ E(X) = \sum_{x_i \in D_X} x_i p(X=x_i) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\ p_1(1-p_1)^{k-1}$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k\ p_1 q_1^{k-1} \text{ où } q_1 = 1-p_1,$$

donc

$$E(X) = p_1 \sum_{k=1}^{+\infty} k q_1^{k-1} = p_1\left(\sum_{k=1}^{+\infty} q_1^k\right)'$$
$$= p_1\left(\frac{q_1}{1-q_1}\right)' = p_1\left(\frac{1}{(1-q_1)^2}\right) = \frac{p_1}{p_1^2} = \frac{1}{p_1}.$$

$$\bullet\ E(X^2) = \sum_{x_i \in D_X} x_i^2 p(X=x_i) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\ p_1(1-p_1)^{k-1}$$
$$= p_1 \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1-1)\, k\ q_1^{k-1} \text{ où } q_1 = 1-p_1.$$

donc

$$E(X^2) = p_1 \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)\, k q^{k-1} - p_1 \sum_{k=1}^{+\infty} k\ q_1^{k-1}$$
$$= p_1\left(\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k+1}\right)^{(2)} - p_1\left(\sum_{k=1}^{+\infty} q^k\right)'$$

$$\begin{aligned} &= p_1\left(\frac{q_1^2}{1-q_1}\right)' - p_1\left(\frac{q_1}{1-q_1}\right)' \\ &= p_1\left(\frac{1}{(1-q_1)^2}\right) = \frac{p_1}{p_1^2} = \frac{1}{p_1}. \end{aligned}$$

■

2.6.6 Loi de Poisson

Définition 2.55 *On dit q'une variable aléatoire X définie sur un espace de probabilité (Ω, T, p), suit la loi de* ***Poisson de paramètre*** *λ $(\lambda > 0)$, et on note $X \sim P(\lambda)$ si son support est $D_X = \{0, 1, 2, ...\} = \mathbb{N}$ et sa fonction de masse p_X est définit par*

$$p_X(k) = \begin{cases} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} & si\ k \in \mathbb{N} \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

Proposition 2.56 *Si $X \sim P(\lambda)$, alors*

$$E(X) = \lambda \ et\ var(X) = \lambda.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \bullet\ E(X) &= \sum_{x_i \in D_X} x_i p(X = x_i) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\ e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty} k\ \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{j!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet\ E\left(X^2\right) &= \sum_{x_i \in D_X} x_i^2 p(X = x_i) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2\ e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty} k^2\ \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{+\infty}(j+1)\ \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda\left[\sum_{j=0}^{+\infty} j e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!} + \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}\right] \end{aligned}$$

$$= \lambda(\lambda+1) = \lambda^2 + \lambda.$$

D'où

$$var(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

■

Le tableau suivant exprime la fonction génératrice, la fonction génératrice des moments et la fonction caractéristique de quelques variables aléatoires discrètes usuelles.

$v.a$	f.g $G_X(t)$	f.g.m $M_X(t)$	f.c $\varphi_X(t)$
$B(p_1)$	$p_1 t + 1 - p_1$	$1 - p_1 + p_1 e^t$	$1 - p_1 + p_1 e^{it}$
$B(n, p_1)$	$(p_1 t + 1 - p_1)^n$	$(1 - p_1 + p_1 e^t)^n$	$(1 - p_1 + p_1 e^{it})^n$
$G(p_1)$	$\dfrac{p_1 t}{1 - (1-p_1)t}$	$\dfrac{p_1 e^t}{1 - (1-p_1)e^t}$	$\dfrac{p_1 e^{it}}{1 - (1-p_1)e^{it}}$
$P(\lambda)$	$\exp[\lambda(t-1)]$	$\exp[-\lambda(1-e^t)]$	$\exp[-\lambda(1-e^{it})]$

2.6.7 Approximation d'une loi Binomiale par une loi de Poisson

Proposition 2.57 *Si $X \sim B(n, p_1)$ et sous les conditions que n assez grand (i.e. $n \to +\infty$) et p_1 assez petit (i.e. $p_1 \to 0$) on peut approximer la loi de X par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np_1$, et on note $B(n, p_1) \approx P(np_1)$.*

Démonstration. Soit $k \in \{0, 1, ..., n\}$, on a

$$\bullet\ p(X = k) = C_n^k\, p_1^k\, (1-p_1)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p_1^k\, (1-p_1)^{n-k}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-2))(n-(k-1))}{n^k} \frac{(np_1)^k}{k!} \frac{\left(1 - \frac{np_1}{n}\right)^n}{(1-p_1)^k}.$$

Posons $\lambda = np_1$, on trouve

$$p(X = k) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-2))(n-(k-1))}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{(1-p_1)^k}.$$

Pour $n \to +\infty$ le support de X devient l'ensemble $\mathbb{N}$. Fixons $k \in \mathbb{N}$, on trouve

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{n\to+\infty \\ p\to 0}} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-2))(n-(k-1))}{n^k}\frac{\lambda^k}{k!}\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{(1-p_1)^k} &= \lim_{\substack{n\to+\infty \\ p\to 0}} \frac{\lambda^k}{k!}\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{(1-p_1)^k} \\
&= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}
\end{aligned}$$

car

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda} \text{ et } \lim_{\substack{n\to+\infty \\ p\to 0}} (1-p_1)^k = 0.$$

■

Remarque 2.58 *Dans la pratique on peut approximer la loi Binomiale $B(n, p_1)$ telle que $n \geq 30$ et $p \leq 0.1$, par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np_1$.*

2.6.8 Approximation d'une loi Hypergéométrique par une loi Binomiale

Proposition 2.59 *Si $X \sim H(N, N_1, n)$ et sous la condition que N assez grand (i.e. $N \to +\infty$) on peut approximer la loi de X par la loi Binomiale de paramètres n et $p_1 = \frac{N_1}{N}$ (i.e. $B\left(n, \frac{N_1}{N}\right)$) et on note $H(N, N_1, n) \approx B\left(n, \frac{N_1}{N}\right)$.*

Démonstration. Soit $k \in \{0, 1, ..., \min(N_1, n)\}$, on a

$$\begin{aligned}
\bullet\ p(X=k) &= \frac{C_{N_1}^k \times C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n} \\
&= \frac{N_1!}{k!(N_1-k)!}\frac{(N-N_1)!}{(n-k)!(N-N_1-(n-k))!}\frac{n!(N-n)!}{N!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{N_1!}{(N_1-k)!}\frac{(N-N_1)!}{N!}\frac{(N-n)!}{(N-N_1-(n-k))!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \ & \frac{n!}{k!(n-k)!}\left[N_1(N_1-1)\ldots(N_1-k+1)\right] \\
& \times\frac{(N-n)(N-n-1)\ldots(N-n-(N_1-k)+1)}{N(N-1)\ldots(N-N_1+1)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} N^k \left(\frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N_1-1}{N}\right)...\left(\frac{N_1-k+1}{N}\right)$$
$$\times \frac{(N-n)(N-n-1)...(N-n-(N_1-k)+1)}{N(N-1)...(N-N_1+1)}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} N^k \left(\frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N_1-1}{N}\right)...\left(\frac{N_1-k+1}{N}\right)$$
$$\times \frac{1}{N^k} \frac{\dfrac{(N-N_1-(n-(N_1-1)-1))...(N-N_1-(n-((k+1)-1)))(N-N_1-(n-k-1))}{N^{N_1-k}}}{\dfrac{N(N-1)...(N-N_1+1)}{N^{N_1}}}$$

Posons $p_1 = \frac{N_1}{N}$, on trouve

$$p(X=k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}(p_1)\left(p_1 - \frac{1}{N}\right)...\left(p_1 - \frac{k-1}{N}\right)$$

$$\times \frac{\left(1-p_1+\dfrac{(n-(N_1-1)-1)}{N}\right)...\left(1-p_1+\dfrac{(n-((k+1)-1))}{N}\right)\left(1-p_1+\dfrac{(n-k-1)}{N}\right)}{1\left(1-\dfrac{1}{N}\right)\left(1-\dfrac{2}{N}\right)...\left(1-\dfrac{N_1-1}{N}\right)}$$

Pour N assez grand (i.e $N \to +\infty$) il est facile de voir que $p(X=k)$ s'écrit sous la forme

$$p(X=k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p_1^k (1-p_1)^{n-k} = C_n^k \; p_1^k \; (1-p_1)^{n-k}.$$

■

Exemple 2.60 *Si $X \sim H(31.10^6, 28.10^6, 20)$, alors la loi de X peut s'approximer par la loi Binomiale $B\left(20, \dfrac{28}{31}\right)$.*

2.7 Exercices

Exercice 2.1. Soit (Ω, T, P) un espace de probabilité, avec Ω fini, $\Omega = \{w_i : i = 1, ..., n\}$.

On considère l'application $X : (\Omega, T) \longrightarrow \mathbb{R}$.

a- Si $n = 2$, $T = \{\varnothing, \Omega\}$, $X(w_1) = x_1$ et $X(w_2) = x_2$, où $x_1 \neq x_2$.

X est-elle une variable aléatoire sur (Ω, T)?

b- Si $n = 5$, $T = P(\Omega)$ l'ensemble de toutes les parties de Ω, $X(w_1) = 0$ et $X(w_2) = X(w_3) = 1$, où $X(w_4) = X(w_5) = 2$.

1. Montrer que X est une variable aléatoire sur (Ω, T).

2. Déterminer la fonction de masse et la fonction de répartition de cette variable aléatoire en supposant que les w_i sont équiprobables.

3. Déduire les probabilités $P(-1 < X \leq 2)$ et $P(X \geq 2)$.

Exercice 2.2. Soit p une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$p(k) = \begin{cases} \dfrac{a(k-1)}{n} & \text{si } \ k \in \{2, ..., n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Trouver la valeur de la constante a, pour que p puisse être considérée comme une loi de probabilité.

On pose la variable X de fonction de masse p.

2. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

3. Calculer la probabilité $P(X \in]i, i+1[)$.

Exercice 2.3. Soit la fonction réelle p définie par :

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(x+1)} & \text{si } x \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que p est une loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle X.

2. Déterminer la fonction F_X la fonction de répartition de la v.a X.

3. Déduire la valeure de $p(h \leq X \leq k)$ où $h, k \in \mathbb{N}$ et $h < k$.

Exercice 2.4. La fonction de masse d'une variable aléatoire X est

$$f(x) = \begin{cases} 2p & \text{si } \ x = 1 \\ p & \text{si } \ x = 2 \\ 4p & \text{si } \ x = 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}.$$

1. Déterminer la valeur de p.

2. Evaluer $P(0 \leq X < 3)$ et $P(X > 1.6)$.

Exercice 2.5. On choisi au hasard une boule d'une urne contenant 8 boules numérotées $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

Soit X la variable aléatoire représentant le numéro de la boule choisie.

1. Déterminer la fonction de masse, la fonction de répartition, la moyenne de la v.a X.

2. Reprendre la question 1, pour les variables aléatoires $|X|$ et X^2.

Exercice 2.6. Un joueur lance un dé équilibré et gagne 1 DA si le résultat est pair, il perd 1 DA si le résultat est un ou trois et ne perd ou ne gagne rien si le résultat est cinq. On note X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

1. Déterminer la loi de X.

2. Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.

3. Déterminer la loi de de la variable aléatoire $Y = X^2$ et calculer $E(Y)$.

Exercice 2.7. L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet traité parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100.

1. Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :

   (a) les trois sujets tirés,

   (b) exactement deux sujets sur les trois sujets,

   (c) aucun des trois sujets.

2. Définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Exercice 2.8. Un livre de 800 pages contient 1200 erreurs d'impression, réparties au hasard. On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre d'erreurs dans une page donnée.

1. Quelle est la loi exacte de X.

2. Peut-on approximer la loi exacte de X, par une autre loi discrète. Justifier.

3. Calculer alors les probabilité, que dans cette page:

   (a) il n' y ait aucune erreur,

   (b) il y ait au moins 3 erreurs.

Exercice 2.9. Soit n nombres réels $y_1, ..., y_n$ en progression arithmétique et X une variable aléatoire réelle qui suit une loi $U_{\{1,...,n\}}$ (loi uniforme discrète sur l'ensemble $\{1, ..., n\}$).

Montrer qu'il existe un couple (a, b) de constantes réelles telles que la variable aléatoire réelle $Y = aX + b$ suive la loi $U_{\{y_1,...,y_n\}}$.

Exercice 2.10. 1. Déterminer la loi de probabilité de la variable $T = n - S$, où S est une variable aléatoire réelle qui suit la loi $B(n, a)$.

2. Déterminer la loi de probabilité de la variable $V = n - U$, où U est une variable aléatoire réelle qui suit la loi $H(N, N1, n)$.

Exercice 2.11. Soit $X \sim B\left(8, \frac{3}{4}\right)$, la loi Binomiale de paramètres 8 et $\frac{3}{4}$.

1. Calculer $p(X \geq 7)$.
2. Evaluer $E(X)$ et $Var(X)$.

Exercice 2.12. Soit S une variable aléatoire de loi $B(n, a)$.

1. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $U = S(S - 1)$.
2. Si la fonction génératrice G_S de la loi Binomiale $B(n, a)$ est

$$G_S(t) = E\left(t^S\right) = (at + 1 - a)^n,$$

déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $W = S(S-1)(S-2)$ et en déduire $E(S^3)$.

Exercice 2.13. Une urne contient 4 boules blanche et 6 boules noires.

a- On tire sans remise 2 boules de cette urnes.

1. Trouver la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de boules noires extraites.
2. Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.

b- On tire avec remise 2 boules de cette urnes.

1. Trouver la loi de la variable aléatoire Y égale au nombre de boules blanches extraites.
2. Calculer $E(Y)$ et $Var(Y)$.

Exercice 2.14. Soit (Ω, T, p) un espace de probabilité et soit A et B deux évènements tels que $p(A) = p(B) = p_1$ où $p_1 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. On pose $X = I_A + I_B$ où

$$I_A(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$ et $Var(X)$ dans les cas suivantes

1. Les deux évènements A et B sont indépendants.
2. Les deux évènements A et B sont incompatibles.

Solutions des exercices.

Solution de l'exercice 2.1.

a)

$$X \text{ est une v.a.r sur } (\Omega, T) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : X^{-1}(]-\infty, x]) \in T.$$

Suposons $x_1 < x_2$: si $x \in [x_1, x_2[$,

$$X^{-1}(]-\infty, x]) = \{w \in \Omega : X(w) \leq x\} = \{w_1\} \notin T,$$

donc X n'est pas une variable aléatoire sur (Ω, T).

b) 1. Il est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}, X^{-1}(]-\infty, x]) \in P(\Omega)$, ainsi X est une variable aléatoire sur $(\Omega, P(\Omega))$.

2. Le support de la variable aléatoire X est $D_X = \{0, 1, 2\}$, et sa fonction de masse p_X est définie par :

$$\begin{cases} p_X(0) = p(X = 0) = p(\{w_1\}) = \frac{1}{5}, \\ p_X(1) = p(X = 1) = p(\{w_2, w_3\}) = \frac{2}{5}, \\ p_X(2) = p(X = 2) = p(\{w_4, w_5\}) = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

La fonction de répartition F_X de X est définie par :

Si $x < 0 : F_X(x) = 0$,

Si $0 \leq x < 1 : F_X(x) = p_X(0) = \frac{1}{5}$,

Si $1 \leq x < 2 : F_X(x) = p_X(0) + p_X(1) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$,

Si $x \geq 2 : F_X(x) = p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 1$.

d'où

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x < 0 \\ \dfrac{1}{5} & \text{si } \ 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{3}{5} & \text{si } \ 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } \ x \geq 2 \end{cases}.$$

3. En utilisant la Proposition 2.23, on a

$$p(-1 < X \leq 2) = F_X(2) - F_X(-1) = 1 - 0 = 1$$

et

$$p(X \geq 2) = 1 - F_X(2) + p_X(2) = 1 - 1 + \frac{2}{5} = \frac{2}{5} = 0.4.$$

Solution de l'exercice 2.2.

1.

$$p \text{ est une loi de probabilité} \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n} \frac{a(k-1)}{n} = 1.$$

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{k=2}^{n} \frac{a(k-1)}{n} &= 1 \Leftrightarrow \frac{a}{n} \sum_{k=2}^{n} (k-1) = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{n} \left(\frac{n-1}{2} (1 + n - 1) \right) = 1 \Leftrightarrow a \, \frac{n-1}{2} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{2}{n-1}. \end{aligned}$$

2. La fonction de répartition F_X de X est définie par :

Si $x < 2$: $F_X(x) = 0$,

Si $i \leq x < i+1$ $(i \in \{2, ..., n-1\})$,

$$F_X(x) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=2}^{i} (k-1) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{i-1} j = \frac{(i-1)\,i}{n(n-1)}.$$

Si $x \geq n$: $F_X(x) = 1$,

d'où

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x < 2 \\ \dfrac{(i-1)\,i}{n(n-1)} & \text{si } \ i \leq x < i+1, i \in \{2, ..., n-1\} \\ 1 & \text{si } \ x \geq n \end{cases}.$$

3. En utilisant la Proposition 2.23, on a

$$p\left(X \in \left]i, i+1\right[\right) = F_X\left(i+1\right) - F_X\left(i\right) - p_X\left(i+1\right)$$

donc,

Si $i+1 < 2$ (i.e. $i < 1$) :

$$p\left(X \in \left]i, i+1\right[\right) = 0,$$

Si $2 \leq i \leq n-1$:

$$\begin{aligned} p\left(X \in \left]i, i+1\right[\right) &= F_X\left(i+1\right) - F_X\left(i\right) - p_X\left(i+1\right) \\ &= \frac{i\left(i+1\right)}{n\left(n-1\right)} - \frac{\left(i-1\right)i}{n\left(n-1\right)} - \frac{2i}{n\left(n-1\right)} = 0. \end{aligned}$$

de même si $i = n$:

$$p\left(X \in \left]i, i+1\right[\right) = 1 - \frac{\left(n-1\right)n}{n\left(n-1\right)} - 0 = 0.$$

Si $i > n$: il est clair que $p\left(X \in \left]i, i+1\right[\right) = 0$.

Solution de l'exercice 2.3.

1.

$$p \text{ est une loi de probabilité} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\left(k+1\right)} = 1.$$

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\left(k+1\right)}$. Comme pour tout $k \geq 1$: $\frac{1}{k\left(k+1\right)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, alors

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\left(k+1\right)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} = 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\left(k+1\right)} = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

2. La fonction de répartition F_X de X est définie par :

Si $x < 1$: $F_X\left(x\right) = 0$,

Si $i \leq x < i+1$ ($i \in \mathbb{N}^*$):

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \sum_{k \leq x \text{ et } k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{i+1} = \frac{i}{i+1}, \end{aligned}$$

d'où

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x < 1 \\ \dfrac{i}{i+1} & \text{si } \ i \leq x < i+1, i \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

3. En utilisant la Proposition 2.23, on a

$$p(X \in [h,k]) = F_X(k) - F_X(h) + p_X(h).$$

Si $h = 0$:

$$p(X \in [h,k]) = \frac{k}{k+1} - 0 + 0 = \frac{k}{k+1}.$$

Si $h \in \mathbb{N}^*$:

$$p(X \in [h,k]) = \frac{k}{k+1} - \frac{h}{h+1} + \frac{1}{h(h+1)} = \frac{k}{k+1} - \frac{h-1}{h}.$$

Comme exemple

$$p(X \in [2,4]) = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = 0.3.$$

Solution de l'exercice 2.4.

1. f est une fonction de masse de la v.a.r X, alors son support est $D_X = \{1,2,3\}$.

$$f \text{ est une fonction de masse de } X \Leftrightarrow \sum_{x=1}^{3} f(x) = 1.$$

$$\sum_{x=1}^{3} f(x) = 1 \Leftrightarrow 2p + p + 4p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{7}.$$

2. Il est facile de déduire que la fonction de répartition de la v.a.r X est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{7} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{7} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases},$$

donc, en utilisant la Proposition 2.23, on trouve

$$\begin{aligned} p(0 \leq X < 3) &= p(X \in [0,3[) = F_X(3) - F_X(0) + p_X(0) - p_X(3) \\ &= 1 - 0 + 0 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

et

$$p(X > 1.6) = 1 - F_X(1.6) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}.$$

Solution de l'exercice 2.5.

1. Le support de X est $D_X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ et sa fonction de masse p_X est définie par :

$$p_X(-3) = p_X(-2) = p_X(-1) = p_X(0) = p_X(1) = p_X(2) = p_X(3) = p_X(4) = \frac{1}{8},$$

c'est-à-dire X suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ ($X \sim U_{\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}}$).

Il est facile de déduire que la fonction de répartition de la v.a.r X est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ \frac{1}{8} & \text{si } -3 \leq x < -2 \\ \frac{2}{8} & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ . & \\ . & \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases},$$

et

$$E(X) = \frac{1}{8}(-3 - 2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4) = \frac{1}{2}.$$

2. On pose $Y = h_1(X) = |X|$ et $Z = h_2(X) = X^2$ et en utilisant la Proposition 2.27, on trouve que

$$D_Y = h_1(D_X) = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad \text{et} \quad D_Z = h_2(D_X) = \{0, 1, 4, 9, 16\}$$

et les fonctions de masse p_Y et p_Z des v.a.r Y et Z sont définit par :

$$p_Y(y_j) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_i \in D_X \text{ et } h_1(x_i) = y_j} p_X(x_i) & \text{si } y_j \in D_Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$p_Z(z_j) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_i \in D_X \text{ et } h_2(x_i) = z_j} p_X(x_i) & \text{si } z_j \in D_Z \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

d'où

$$\begin{aligned} p_Y(0) &= p_X(0) = \frac{1}{8}, \\ p_Y(1) &= p_X(-1) + p_X(1) = \frac{2}{8}, \\ p_Y(2) &= p_X(-2) + p_X(2) = \frac{2}{8}, \\ p_Y(3) &= p_X(-3) + p_X(3) = \frac{2}{8}, \\ p_Y(4) &= p_X(3) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p_Z(0) &= p_X(0) = \frac{1}{8}, \\ p_Z(1) &= p_X(-1) + p_X(1) = \frac{2}{8}, \\ p_Z(4) &= p_X(-2) + p_X(2) = \frac{2}{8}, \\ p_Z(9) &= p_X(-3) + p_X(3) = \frac{2}{8}, \\ p_Z(16) &= p_X(4) = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Les fonctions de répartition F_Y et F_Z de Y et Z sont définie par

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ y < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{si } \ 0 \leq y < 1 \\ \frac{2}{8} & \text{si } \ 1 \leq y < 2 \\ \frac{4}{8} & \text{si } \ 2 \leq y < 3 \\ \frac{6}{8} & \text{si } \ 3 \leq y < 4 \\ 1 & \text{si } \ y \geq 4 \end{cases}$$

et

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ z < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{si } \ 0 \leq z < 1 \\ \frac{2}{8} & \text{si } \ 1 \leq z < 4 \\ \frac{4}{8} & \text{si } \ 4 \leq z < 9 \\ \frac{6}{8} & \text{si } \ 9 \leq z < 16 \\ 1 & \text{si } \ z \geq 16 \end{cases}.$$

L'espérance des v.a.r Y et Z sont donnés par

$$E(Y) = 0 \times \frac{1}{8} + (1+2+3) \times \frac{2}{8} + 4 \times \frac{1}{8} = 2$$

et

$$E(Z) = 0 \times \frac{1}{8} + (1+4+9) \times \frac{2}{8} + 16 \times \frac{1}{8} = 5.5.$$

Solution de l'exercice 2.6.

1. Le support de la v.a.r X est $D_X = \{-1, 0, 1\}$ et sa fonction de masse p_X est définit par

$$\begin{aligned} p_X(-1) &= p(\{1,3\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \\ p_X(0) &= p_X(\{5\}) = \frac{1}{6}, \\ p_X(1) &= p_X(\{2,4,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2.
$$E\left(X\right)=\left(-1\right)\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\simeq 0.17$$

et
$$E\left(X^{2}\right)=\left(-1\right)^{2}\times\frac{1}{3}+0^{2}\times\frac{1}{6}+1^{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{6}.$$

D'où
$$var\left(X\right)=E\left(X^{2}\right)-E^{2}\left(X\right)=\frac{5}{6}-\frac{1}{36}=\frac{29}{36}\simeq 0.8.$$

3. Il est clair que le support de la v.a.r Y est $D_Y=\{0,1\}$ et sa fonction de masse p_Y est définit par :

$$\begin{aligned} p_Y\left(0\right) &= p_X\left(0\right)=\frac{1}{6}, \\ p_Y\left(1\right) &= p_X\left(-1\right)+p_X\left(1\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Donc
$$E\left(Y\right)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{5}{6}=\frac{5}{6}\simeq 0.83.$$

Solution de l'exercice 2.7.

1. Il est clair que l'espace des évènements Ω de cette expérience aléatoire est

$$\Omega=\left\{\{s_1,s_2,s_3\}\ /\ s_{i(i=1,2,3)}\text{ un sujet parmis les 100 sujets}\right\}.$$

Nous remarquons aussi que chaque élément de Ω a la même probabilité de se réaliser, donc pour tout évènement A, on a

$$p\left(A\right)=\frac{|A|}{|\Omega|}.$$

a) On note A_1 :"le candidat ayant révisé les trois sujets tirés", alors

$$p\left(A_1\right)=\frac{|A_1|}{|\Omega|}=\frac{C_{60}^{3}}{C_{100}^{3}}=\frac{34220}{161700}\simeq 0.21.$$

b) On note A_2 :"le candidat ayant révisé exactement deux sujets sur les trois sujets tirés", alors

$$p\left(A_2\right) = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{C_{60}^2 \times C_{40}^1}{C_{100}^3} = \frac{70800}{161700} \simeq 0.43.$$

c) On note A_3 :"le candidat n'ayant révisé aucun des trois sujets sur les trois sujets tirés", alors

$$p\left(A_3\right) = \frac{|A_3|}{|\Omega|} = \frac{C_{40}^3}{C_{100}^3} = \frac{9880}{161700} \simeq 0.06.$$

2. Notons X la variable aléatoire représente "le nombre de sujets révisés par le candidat parmis les trois sujets tirés".

Il est clair que $D_X = \{0, 1, 2, 3\}$ et $X \sim H\left(100, 60, 3\right)$. Ainsi

$$E\left(X\right) = 3 \times \frac{60}{100} = 1.8.$$

Solution de l'exercice 2.8.

1. X : "le nombre d'erreurs dans une page donnée (par exemple la page 235)".

Il est clair que le support de X est $D_X = \{0, 1, ..., 1200\}$ et

$$p\left(\text{un erreur quelconque se trouve à la page donnée}\right) = \frac{1}{800},$$

donc il s'agit d'une loi Binomiale de paramètres $n = 1200$ et $p_1 = \dfrac{1}{800}$ (i.e. $X \sim B\left(1200, \dfrac{1}{800}\right)$).

2. En appliquant la Proposition 2.57, on peut approximer la loi de la v.a.r X par la loi de Poison de paramètre $\lambda = \dfrac{1200}{800} = 1.5$ (i.e. $\lambda = 1.5$).

3. a)

$$p\left(X = 0\right) = e^{-1.5}\frac{(1.5)^0}{0!} = e^{-1.5}.$$

b)

$$\begin{aligned} p\left(X \geq 3\right) &= 1 - \left[p\left(X = 0\right) + p\left(X = 1\right) + p\left(X = 2\right)\right] \\ &= 1 - \left[e^{-1.5}\frac{(1.5)^0}{0!} + e^{-1.5}\frac{(1.5)^1}{1!} + e^{-1.5}\frac{(1.5)^2}{2!}\right] \\ &= 1 - \left(e^{-1.5}\right)\left(1 + (1.5) + 1.125\right) \simeq 0.19. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2.9.

Si r est la raison de la suite arithmétique, on a, pour $k \in \{1, 2, ..., n\}$:

$$y_k = r(k-1) + y_1.$$

Donc si l'on pose

$$Y = r(X-1) + y_1 = rX + y_1 - r,$$

on obtient une variable aléatoire Y de support $D_Y = \{y_1, ..., y_n\}$ et de fonction de masse définie par :

$$p(Y = y_k) = p(rX + y_1 - r = rk + y_1 - r) = p(X = k) = \frac{1}{n}.$$

La v.a.r Y suit donc une loi uniforme sur $\{y_1, ..., y_n\}$.

Comme $r = \dfrac{y_n - y_1}{n-1}$, on a aussi

$$Y = \frac{y_n - y_1}{n-1} X + \frac{ny_1 - y_n}{n-1}.$$

Solution de l'exercice 2.10.

1. On a le support de S est $D_S = \{0, 1, ..., n\}$, donc d'aprés la Proposition 2.27, le support de T est $D_T = \{0, 1, ..., n\}$ et pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$, on a

$$\begin{aligned} p(T = k) &= p(n - S = k) = p(S = n-k) \\ &= C_n^{n-k} a^{n-k} (1-a)^k = C_n^k (1-a)^k a^{n-k}, \end{aligned}$$

car $C_n^{n-k} = C_n^k$ pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$. Ainsi $T \sim B(n, 1-a)$ (i.e. loi Binomiale de paramètres $n, 1-a$).

2. On a le support de U est $D_U = \{0, 1, ..., n\}$, donc d'aprés la Proposition 2.27, le support de V est $D_V = \{0, 1, ..., n\}$ et pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$, on a

$$p(V = k) = p(n - U = k) = p(U = n-k) = \frac{C_{N_1}^{n-k} \times C_{N-N_1}^{k}}{C_N^n},$$

Ainsi $V \sim H(N, N - N_1, n)$ (i.e. loi Hypergéométrique de paramètres $N, N - N_1, n$).

Solution de l'exercice 2.11.

1. En utilisant la Proposition 2.23, on trouve

$$p(X \geq 7) = p(X \in [7, +\infty[) = 1 - F_X(7) + p_X(7)$$

or d'aprés la Proposition 2.19, on a

$$\begin{aligned} F_X(7) &= \sum_{k=0}^{7} p(X = k) = \sum_{k=0}^{7} C_8^k \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{8-k} \\ &= \sum_{k=0}^{8} C_8^k \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{8-k} - C_8^8 \left(\frac{3}{4}\right)^8 \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{8-8} \\ &= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^8 \simeq 0.9, \end{aligned}$$

et

$$p_X(7) = p(X = 7) = C_8^7 \left(\frac{3}{4}\right)^7 \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{8-7} = 8 \times \left(\frac{3}{4}\right)^7 \times \frac{1}{4} \simeq 0.27,$$

d'où

$$p(X \geq 7) = 1 - 0.9 + 0.27 = 0.37.$$

2. D'aprés la Proposition 2.44, on a

$$E(X) = 8 \times \frac{3}{4} = 6 \text{ et } var(X) = 8 \times \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2} = 1.5.$$

Solution de l'exercice 2.12.

1. D'aprés la Proposition 2.29, on a

$$\begin{aligned} E(S(S-1)) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) p(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k a^k (1-a)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k a^k (1-a)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} k C_n^k a^k (1-a)^{n-k} \\ &= E\left(S^2\right) - E(S) = \left(var(S) + [E(S)]^2\right) - E(S) \\ &= na(1-a) + n^2 a^2 - na = n(n-1) a^2. \end{aligned}$$

L'égalité l'avant dèrnière découle de la Proposition 2.44.

2. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \ p_S(k)$$

donc la dérivée 3 de la fonction G_S est

$$G_S^{(3)}(t) = \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)\, t^{k-3} \ p_S(k) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)(k-2)\, t^{k-3} \ p_S(k),$$

d'où

$$G_S^{(3)}(1) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)(k-2) \ \ p_S(k) = E[S(S-1)(S-2)].$$

Comme $G_S(t) = (at+1-a)^n$, alors

$$E[S(S-1)(S-2)] = n(n-1)(n-2)\, a^3.$$

On a aussi

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)(k-2) \ \ p_S(k) = \sum_{k=0}^{n} k^3 \ p_S(k) - 3\sum_{k=0}^{n} k^2 \ p_S(k) + 2\sum_{k=0}^{n} k \ p_S(k)$$

ainsi

$$\begin{aligned} E\left(S^3\right) &= E[S(S-1)(S-2)] + 3E\left(S^2\right) - 2E(S) \\ &= n(n-1)(n-2)\, a^3 + 3\left[na(1-a) + n^2a^2\right] - 2na \\ &= n(n-1)(n-2)\, a^3 + 3n(n-1)\, a^2 + na. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2.13.

a) 1. Si X est "le nombre de boules noires extraites", alors

$$X \sim H(10, 6, 2).$$

2. D'aprés la Proposition 2.51, on trouve

$$E(X) = 2 \times \frac{6}{10} = 1.2$$

et

$$var\left(X\right)=2\times\frac{6}{10}\times\left(1-\frac{6}{10}\right)\times\frac{10-2}{10-1}\simeq 0.43.$$

b) 1. Si Y est "le nombre de boules blanches extraites", alors

$$X\sim B\left(2,0.4\right).$$

2. D'aprés la Proposition 2.44, on trouve

$$E\left(Y\right)=2\times 0.4=0.8$$

et

$$var\left(Y\right)=2\times 0.4\times 0.6=0.48.$$

Solution de l'exercice 2.14.

Il est clair que le support de X est $D_X=\{0,1,2\}$ car

$$X\left(w\right)=\begin{cases}0 & \text{si } w\notin A \text{ et } w\notin B\\ 1 & \text{si } w\in A \text{ et } w\notin B \text{ ou } w\in B \text{ et } w\notin A\\ 2 & \text{si } w\in A \text{ et } w\in B\end{cases}.$$

1. Si les évènements A et B sont indépendants, alors la fonction de masse de X est donnée par :

$$\begin{aligned}\bullet p\left(X=0\right) &= p\left\{w\in\Omega : w\notin A \text{ et } w\notin B\right\}=p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\\ &= p\left(\overline{A}\right)p\left(\overline{B}\right)=\left(1-p\left(A\right)\right)\left(1-p\left(B\right)\right)=\left(1-p_1\right)^2,\end{aligned}$$

car les évènements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants (voir la Proposition 1.40).

$$\begin{aligned}\bullet p\left(X=1\right) &= p\left\{w\in\Omega : w\in A \text{ et } w\notin B \text{ ou } w\in B \text{ et } w\notin A\right\}=p\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\right)\\ &= p\left(A\cap\overline{B}\right)+p\left(\overline{A}\cap B\right),\end{aligned}$$

car les deux évènements $A\cap\overline{B}$ et $\overline{A}\cap B$ sont disjoints. Comme les évènements, A et

$\overline{B}$ sont indépendants et $\overline{A}$ et B sont indépendants (voir la Proposition 1.40), on trouve

$$\begin{aligned}p(X=1) &= p(A)\,p\left(\overline{B}\right)+p(B)\,p\left(\overline{A}\right)=p(A)\,(1-p(B))+p(B)\,(1-p(A))\\ &= 2p_1(1-p_1)\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet\; p(X=2) &= p\{w\in\Omega : w\in A \text{ et } w\in B\}=p(A\cap B)\\ &= p(A)\,p(B)\,,\end{aligned}$$

car les évènements A et B sont indépendants. D'où

$$p(X=2)=p_1^2.$$

Ainsi

$$E(X)=2p_1$$

et

$$var(X)=(-1)^2\times(1-p_1)^2+0^2\times 2p_1(1-p_1)+1^2\times p_1^2=2p_1(1-p_1)\,.$$

2. Si les évènements A et B sont incompatible (i.e. disjoints), alors la fonction de masse de X est donnée par :

$$\bullet\; p(X=0)=p\{w\in\Omega : w\notin A \text{ et } w\notin B\}=p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$$

or

$$\overline{A}=\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)$$

et les évènements $\overline{A}\cap\overline{B}$ et $\overline{A}\cap B$ sont incompatibles, d'où

$$p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=p\left(\overline{A}\right)-p\left(\overline{A}\cap B\right)$$

de même

$$B=\left(\overline{A}\cap B\right)\cup(A\cap B)$$

et les évènements $\overline{A} \cap B$ et $A \cap B$ sont incompatibles, d'où

$$p\left(\overline{A} \cap B\right) = p(B) - p(A \cap B) = p(B),$$

car les évènements A et B sont incompatible. Ainsi

$$p(X=0) = p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = (1 - p(A)) - p(B) = 1 - 2p_1.$$

$$\bullet\ \begin{aligned} p(X=1) &= p\{w \in \Omega : w \in A \text{ et } w \notin B \ \text{ ou } \ w \in B \text{ et } w \notin A\} \\ &= p\left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right) \\ &= p\left(A \cap \overline{B}\right) + p\left(\overline{A} \cap B\right), \end{aligned}$$

car les deux évènements $A \cap \overline{B}$ et $\overline{A} \cap B$ sont disjoints. Comme

$$p\left(\overline{A} \cap B\right) = p(B) - p(A \cap B) = p(B),$$

et de même

$$p\left(A \cap \overline{B}\right) = p(A) - p(A \cap B) = p(A),$$

alors

$$p(X=1) = p\left(A \cap \overline{B}\right) + p\left(\overline{A} \cap B\right) = p(A) + p(B) = 2p_1.$$

Il est clair que

$$p(X=2) = 0,$$

ainsi le support de X se restreint à l'ensemble $\{0,1\}$ et donc X suit une loi Bernoulli de paramètre $2p_1$. D'où

$$E(X) = 2p_1 \ \text{ et } \ var(X) = 2p_1(1 - 2p_1).$$

Chapitre 3

Variables aléatoires absolument continues

Définition 3.1 *Soit* (Ω, T, p) *un espace de probabilité. Une variable aléatoire*

$$X \; : \; \Omega \longrightarrow D_X \subset \mathbb{R}$$

est dite variable aléatoire ***continue*** *si son support* D_X *est un intervalle ou bien réunion d'intervalles.*

Exemple 3.2 *1. Si on désigne par* X *: "la durée de vie d'une ampoule".*

Il est clair que le support de X *est* $D_X =]0, +\infty[$ *, donc* X *est une variable absolument continue.*

2. Si on désigne par Y *: "le temps d'attente avant l'arrivée du prochain bus", donc* Y *est une variable absolument continue de support* $[0, 1\,\mathrm{min}]$.

3. Si on désigne par Z *: "la moyenne des tailles de 20 étudiants pris au hasard", donc* Z *est une variable absolument continue de support* $[\alpha, \beta]$.

3.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire absolument continue

3.1.1 Densité de probabilité d'une variable aléatoire absolument continue

Pour la suite on suppose que toutes les variables aléatoires sont définies sur l'espace de probabilité (Ω, T, p).

Définition 3.3 *Une fonction réelle positive est dite* ***densité de probabilité*** *ou bien* ***densité*** *si*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1.$$

Définition 3.4 *1. La variable aléatoire réelle X* ***suit la loi de densité*** *f ou bien la variable aléatoire réelle X* ***à pour densité la fonction*** *f si pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$,*

$$p(X \in I) = p\left(X^{-1}(I)\right) = \int_I f(x)\, dx.$$

2. Si la variable aléatoire réelle X suit la loi de densité f, alors ***le support de*** *X est l'ensemble*

$$D_X = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}.$$

Exemple 3.5 *1. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X de support $D_X = \mathbb{R}$. En effet :*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)} dx \\ &= \frac{1}{\pi}\, arctg(x)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1.\end{aligned}$$

2. La fonction réelle

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases} = \lambda e^{-\lambda x}\ I_{[0,+\infty[}\ \text{où } \lambda > 0,$$

est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X de support $[0, +\infty[$. En effet :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx &= \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -\int_{0}^{+\infty} -\lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= -\left(e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = -(0-1) = 1.
\end{aligned}$$

Remarque 3.6 *i) Une variable aléatoire réelle continue possède une densité de probabilité est dite variable aléatoire réelle absolument continue.*

ii) La fonction densité d'une variable aléatoire réelle absolument continue n'est pas forcément continue sur $\mathbb{R}$, elle est continue par morceaux, (voir 2 de l'Exemple précédent).

3.1.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire absolument continue

Définition 3.7 *Soit X une v.a réelle absolument continue de support D_X et de fonction densité f_X. La* ***fonction de répartition*** *de X notée F_X est définie par:*

$$\begin{aligned}
F_X \ : \ \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\
x &\longmapsto F_X(x) = p(X \leq x)
\end{aligned}$$

où

$$p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt.$$

Exemple 3.8 *1. Soit X la v.a réelle de fonction densité f_X définie par*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ x \in [a,b] \\ 0 & sinon \end{cases} = \frac{1}{b-a}\ I_{[a,b]}(x) \quad où\ a, b \in \mathbb{R}.$$

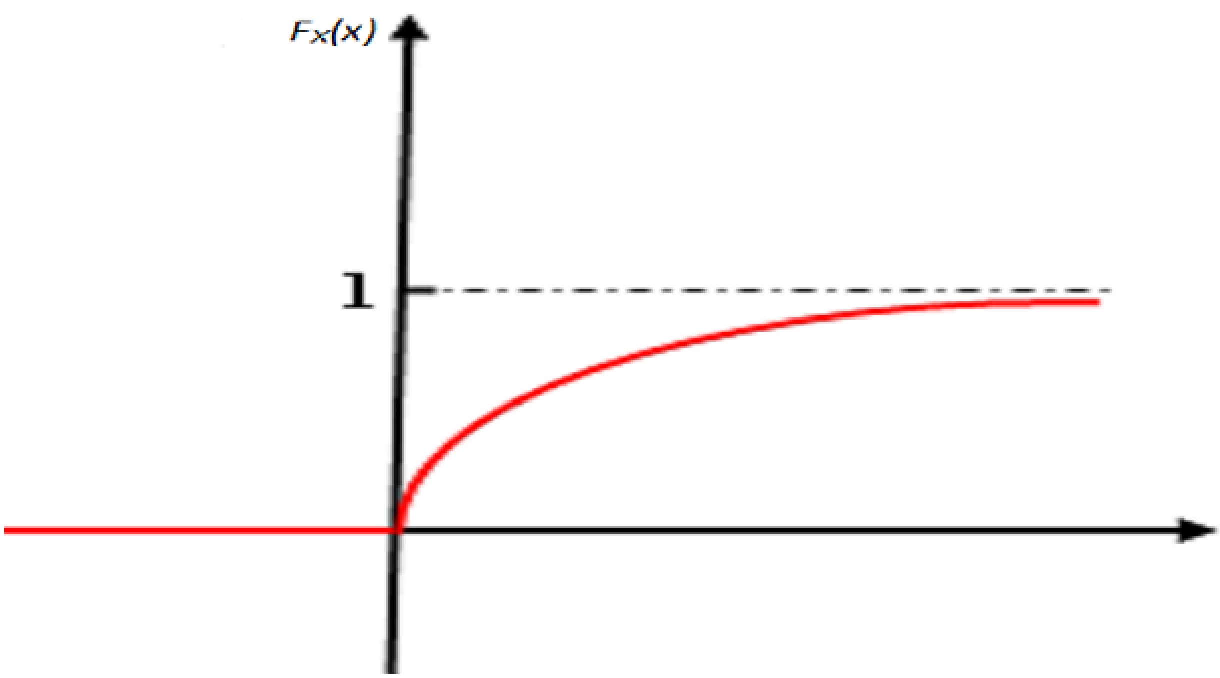
La fonction de répartition de X est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \\ \int_a^b \frac{1}{b-a} dt = 1 & si\ x > b \end{cases}$$
$$= \frac{x-a}{b-a} I_{[a,b]}(x) + I_{]b,+\infty[}(x).$$

2. Soit la v.a.r X de fonction de densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\ I_{[0,+\infty[}$ où $\lambda > 0$. La fonction de répartition de X est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \left. -e^{-\lambda t} \right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$
$$= \left(1 - e^{-\lambda x}\right) I_{[0,+\infty[}.$$

Voici la courbe de la fonction de répartition F_X



D'aprés la définition de la fonction de répartition d'une v.a réelle absolument continue, on peut déduire une Proposition équivalente à la Définition 3.4.

Proposition 3.9 *La variable aléatoire réelle X* ***suit la loi de densité*** *f ou bien la variable aléatoire réelle X* ***à pour densité la fonction*** *f si pour tout réels a, b tel que $a < b$,*

$$p\left(X \in \left]a, b\right]\right) = \int_{a}^{b} f\left(x\right) dx.$$

• **Propriétés de la fonction de répartition**

Proposition 3.10 *Soit X une v.a réelle absolument continue de densité f_X. La fonction de répartition F_X de X vérifie les propriétées suivantes :*

i) $\underset{x \to -\infty}{lim} F_X\left(x\right) = 0$ et $\underset{x \to +\infty}{lim} F_X\left(x\right) = 1$,

ii) F_X est croissante,

iii) F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable à gauche et à droite en tout points $x \in \mathbb{R}$, mais la dérivée à gauche n'est pas forcément égale à la dérivée à droite (voir l'exemple précédent ie Exemple 3.8).

De la définition précédente on peut déduire imédiatement la Proposition suivante

Proposition 3.11 *Soit X une v.a réelle absolument continue de densité f_X et de fonction de répartition F_X.*

Si F_X est dérivable en x_0, alors

$$F_X'\left(x_0\right) = f_X\left(x_0\right).$$

Remarque 3.12 *La forme explicite de la fonction de répartition d'une v.a réelle absolument continue X, peut ne pas être déterminer, elle sera évaluer par approximation.*

Exemple 3.13 *Soit X une v.a réelle absolument continue de densité*

$$f_X\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

La fonction de répartition de X est donnée par :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt,$$

$F_X(x)$ ne peut pas être déterminer par une primitive classique, elle sera évaluer par approximation.

3.1.3 Probabilité attachée à un intervalle

De la Définition 3.4, on déduit la Proposition suivante.

Proposition 3.14 *Soit X une v.a réelle absolument continue de densité f_X et de fonction de répartition F_X. Pour tous nombres réels a, b tels que $a < b$, on a*

i) $p(X \in]a,b[) = p(X \in [a,b[) = p(X \in]a,b]) = p(X \in [a,b]) = F_X(b) - F_X(a)$,

ii) $p(X \in]-\infty,b[) = p(X \in]-\infty,b]) = F_X(b)$,

iii) $p(X \in]a,+\infty[) = p(X \in [a,+\infty[) = 1 - F_X(a)$.

Démonstration. i)

$$\begin{aligned} p(X \in]a,b[) &= p(X \in [a,b[) = p(X \in]a,b]) \\ &= p(X \in [a,b]) = \int_{a}^{b} f_X(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{b} f_X(t)\,dt - \int_{-\infty}^{a} f_X(t)\,dt = F_X(b) - F_X(a). \end{aligned}$$

ii)

$$p(X \in]-\infty,b[) = p(X \in]-\infty,b]) = \int_{-\infty}^{b} f_X(t)\,dt = F_X(b).$$

iii)

$$\begin{aligned} p\left(X \in \left]a,+\infty\right[\right) &= p\left(X \in \left[a,+\infty\right[\right) = \int_{a}^{+\infty} f_X\left(t\right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(t\right) dt - \int_{-\infty}^{a} f_X\left(t\right) dt = 1 - F_X\left(a\right). \end{aligned}$$

■

3.2 Paramètres d'une variable aléatoire absolument continue

3.2.1 Valeur moyenne ou espérance mathématique d'une v.a.r absolument continue

Définition 3.15 *Soit X une v.a réelle absolument continue de support D_X et de fonction de densité f_X. On dit que X* ***possède une espérance mathématique*** *ou bien* ***une moyenne*** *noté $E\left(X\right)$ si l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|x\right| f_X\left(x\right) dx = \int_{D_X} \left|x\right| f_X\left(x\right) dx < +\infty, \ \textit{(i.e. existe)}.$$

Dans ce cas on a

$$E\left(X\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \ f_X\left(x\right) dx = \int_{D_X} x \ f_X\left(x\right) dx.$$

Exemple 3.16 *1. Si X à pour densité de probabilité $f_X\left(x\right) = \lambda e^{-\lambda x} \ I_{[0,+\infty[}$. Alors*

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} \left|x\right| f_X\left(x\right) dx = \int_{0}^{+\infty} \left|x\right| \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda x \ e^{-\lambda x} dx.$$

En utilisant l'intégration par partie une fois on trouve,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \, f_X(x) \, dx = \int_{0}^{+\infty} |x| \, \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda x \; e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda},$$

d'où X possède une espérance mathématique.

Il est clair que

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \; f_X(x) \, dx = \frac{1}{\lambda}.$$

2. Si X à pour densité de probabilité $f_X(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ pout tout $x \in \mathbb{R}$, alors la variable aléatoire X n'admet pas un moment d'ordre 1 *(un espérance). En effet :*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \, f(x) \, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[-\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{(1+x^2)} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)} dx \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)} dx = \frac{2}{\pi} \ln\left(1+x^2\right)\Big]_0^{+\infty} = +\infty.
\end{aligned}$$

3.2.2 Variance d'une v.a.r absolument continue

• **Moment d'ordre k d'une v.a.r absolument continue**

Définition 3.17 *Soit X une v.a réelle absolument continue de support D_X et de fonction de densité f_X. On dit que X* ***possède un moment d'ordre k*** *noté $E\left(X^k\right)$ ($k \in \mathbb{N}^*$) si*

$$E\left(|X|^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k \, f_X(x) \, dx = \int_{D_X} |x|^k \, f_X(x) \, dx < +\infty.$$

Dans ce cas

$$E\left(X^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x) \, dx = \int_{D_X} x^k f_X(x) \, dx.$$

Définition 3.18 *Soit X une v.a réelle absolument continue de support D_X et de fonction densité f_X. Si X possède un moment d'ordre* 2 *($E\left(|X|^2\right) < +\infty$), alors* ***la variance*** *de* *la v.a X, notée $var(X)$ ou bien σ_X^2 est donnée par :*

$$var(X) = E\left[(X - E(X))^2\right].$$

La quantité $\sqrt{var(X)}$ notée σ_X est appelée ***l'écart quadratique moyen*** *ou* ***l'écart type*** *de la variable aléatoire X.*

Remarque 3.19 *i) Lorsqu'une v.a.r absolument continue X vérifie $Var(X) = 1$, on dit que la variable est réduite,*

ii) la variance d'une v.a.r absolument continue X peut s'éxprimer par

$$var(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2.$$

- **Propriétés**

Proposition 3.20 *Soit X réelle absolument continue de support D_X, de fonction densité f_X, d'espérance $E(X)$ et de variance $var(X)$. Pour tous réels a, b, on a :*

i) $E(aX + b) = aE(X) + b$,

ii) $var(aX + b) = a^2\ var(X)$,

ii) $E(a) = a$ et $var(a) = 0$.

3.3 Transformation de variables aléatoires absolument continues

Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue de support D_X et de fonction de densité f_X et soit h une application de D_X vers un sous ensemble E de $\mathbb{R}$. Alors on distingue deux cas, le cas où E est dénombrable et l'autre cas, E est sous forme d'un intervalle ou bien réunion d'intervalles.

3.3.1 Cas discrète

Théorème 3.21 *(**Théorème de transfert**) Soit X une v.a réelle absolument continue de support D_X et de fonction de densité f_X et soit $h : D_X \longrightarrow E \subset \mathbb{R}$ une appli-*

cation telle que $h(D_X)$ est un sous ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$. Alors l'application

$$Y = h \circ X = h(X) \;:\; \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \subset \mathbb{R} \\ w & \longmapsto & Y(w) = h(X(w)) \end{array}$$

est une v.a réelle discrète de support $D_Y = h(D_X)$ et de fonction de masse p_Y définie par

$$p_Y(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\{t \;/\; h(t)=y\}} f_X(x)\,dx & si \;\; y \in D_Y \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

Exemple 3.22 *Soit X la v.a.r de densité de probabilité la fonction f_X définie par*

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda t} I_{[0,+\infty[} \quad , \;\; \lambda > 0,$$

et soit la fonction h définie par $h(x) = [x]$ (la partie entière de x). Alors l'application

$$Y = h \circ X = h(X) = [X]$$

est une v.a réelle discrète de support

$$D_Y = h(D_X) = h([0,+\infty[) = \{0, 1, ...\} = \mathbb{N}$$

et de fonction de masse p_Y définie par:

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} p_Y(k) &= p(Y = k) = p([X] = k) = p(k \leq X < k+1) \\ &= \int_k^{k+1} f_X(x)\,dx = F_X(k+1) - F_X(k) \\ &= \left(1 - e^{-\lambda(k+1)}\right) - \left(1 - e^{-\lambda k}\right) = e^{-\lambda k}\left(1 - e^{-\lambda}\right), \end{aligned}$$

car la fonction de répartition de X est $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ (voir l'Exemple 3.8).

Il est facile de voir que

$$\int_{k}^{k+1} f_X(x)\,dx = \int_{\{t\ /\ [t]=k\}} f_X(x)\,dx.$$

Remarque 3.23 *Dans l'Exemple précédent il est clair que la fonction p_Y représente une loi de probabilité, en effet :*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} p_Y(k) &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda k}\left(1-e^{-\lambda}\right) = \left(1-e^{-\lambda}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}\left(e^{-\lambda}\right)^k \\ &= \left(1-e^{-\lambda}\right)\times\frac{1}{1-e^{-\lambda}} = 1,\end{aligned}$$

car $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(e^{-\lambda}\right)^k$ *est série géométrique de raison* $e^{-\lambda}$.

3.3.2 Cas Continue

Théorème 3.24 *(**Théorème de transfert**) Soit X une v.a réelle absolument continue de support D_X et de fonction de densité f_X et soit $h\ :\ D_X \longrightarrow E\subset\mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et continuement dérivable sur D_X. Alors l'application*

$$\begin{array}{rcccc} Y = h\circ X = h(X) & : & \Omega & \longrightarrow & E\subset\mathbb{R} \\ & & w & \longmapsto & Y(w) = h(X(w)) \end{array}$$

est une v.a réelle absolument continue de support $D_Y = h(D_X)$ et de fonction de densité f_Y définie par

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{f_X\left(h^{-1}(y)\right)}{\left|h'\left(h^{-1}(y)\right)\right|} & si\ \ y\in D_Y \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

Exemple 3.25 *Si X a pour densité $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\dfrac{x^2}{2}}$ et si $Y = h(X) = 2X+3$.*

Il est clair que la fonction h vérifie les conditions du Théorème précédent, d'où la variable aléatoire $Y = h(X)$ est absolument continue, de support $D_Y = h(D_X) = \mathbb{R}$ et de fonction de densité

$$f_Y(y) = \frac{f_X\left(h^{-1}(y)\right)}{\left|h'\left(h^{-1}(y)\right)\right|}\quad pour\ tout\ y\in\mathbb{R}.$$

Comme $h^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{2}$, *alors pour tout* $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{f_X\left(h^{-1}(y)\right)}{\left|h'\left(h^{-1}(y)\right)\right|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-3}{2}\right)^2}{2}}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-3}{2}\right)^2}{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-3)^2}{4}}. \end{aligned}$$

Proposition 3.26 *Soit X une v.a réelle absolument continue de support D_X et de fonction densité f_X et soit $h : D_X \longrightarrow E \subset \mathbb{R}$ une fonction continue sur D_X sauf, éventuellement, en un nombre fini de points. Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\ f_X(x)\,dx$ est absolument convergente, alors l'espérance de la variable aléatoire $Y = h(X)$, peut s'exprimer par :*

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\ f_X(x)\,dx = \int_{D_X} h(x)\ f_X(x)\,dx.$$

Si dans le Théorème de transfert (Théorème 3.24), la condition de monotonie de la fonction h n'est pas vérifié, en utilisant la Proposition précédente on déduit le Théorème suivant qui exprime la loi de la v.a. $h(X)$.

Théorème 3.27 *Soit X une v.a réelle absolument continue de support D_X et de fonction de densité f_X et soit $h : D_X \longrightarrow E \subset \mathbb{R}$ une fonction continuement dérivable sur D_X. Alors l'application*

$$\begin{array}{rccc} Y = h \circ X = h(X) & : \Omega & \longrightarrow & E \subset \mathbb{R} \\ & w & \longmapsto & Y(w) = h(X(w)) \end{array}$$

est une v.a réelle absolument continue de support $D_Y = h(D_X)$ et de fonction de densité f_Y déduite par le calcul suivant :

Pour toute fonction continue φ et en utilisant le changengement du variable $\langle y = h(x)\rangle$, on a

$$E(\varphi[h(X)]) = \int_{D_X} \varphi[h(x)]\ f_X(x)\,dx = \int_{D_Y} \varphi(y)\ f_Y(y)\,dy$$

où f_Y *est la fonction de densité de la variable aléatoire* $Y = h(X)$.

Exemple 3.28 *Si* X *une variable aléatoire de densité* $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ *et* $Y = h(X) = |X|$.

Il est clair que le support de la v.a Y *est* $D_Y = [0, +\infty[$. *Pour déterminer la fonction du densité de la variable* Y, *en effet : soit la fonction continue* φ, *alors*

$$\begin{aligned} E(\varphi[|X|]) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(|x|) \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \int_{0}^{+\infty} \varphi(x) \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(|x|) \left[\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} I_{[0,+\infty[} \right] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \, f_Y(y) \, dy, \end{aligned}$$

d'où d'aprés le Théorème 3.27, la fonction de densité de la v.a $Y = |X|$ *est*

$$f_Y(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} I_{[0,+\infty[}.$$

3.4 Fonctions remarquables liées à une variable aléatoire absolument continue

3.4.1 Fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire absolument continue

Définition 3.29 *Soit* X *une v.a réelle absolument continue de support* D_X *et de fonction de densité* f_X. *Si* $E\left(e^{Xt}\right)$ *existe sur* $]-\alpha, \alpha[\; (\alpha > 0)$, *on définie* ***la fonction génératrice des moments*** *de la v.a* X *noté* M_X *par :*

$$\begin{array}{rccc} M_X & : \mathbb{R} & \longrightarrow & E \subset \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & M_X(t) = E\left(e^{Xt}\right) \end{array}$$

à savoir

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} \, f_X(x) \, dx = \int_{D_X} e^{xt} \, f_X(x) \, dx.$$

Proposition 3.30 *Soit X une v.a réelle absolument continue de support D_X et de fonction de densité f_X. La fonction génératrice des moments M_X de la v.a X vérifie les propriétés suivantes:*

i) M_X est a valeurs dans $[0, +\infty[$ et $M_X(0) = 1$,

ii) M_X caractérise la loi de X (i.e. si deux variable ont la même fonction génératrice, alors elle ont la même loi),

iii) si $E\left(|X|^k\right) < +\infty$, alors la fonction M_X est dérivable k fois en 0 et et la dérivée $k^{ième}$ en zéro vaut

$$M_X^{(k)}(0) = E\left(X^k\right).$$

3.4.2 Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle absolument continue

Définition 3.31 *Soit X une v.a réelle absolument continue de support D_X et de fonction de densité f_X. On appelle **fonction caractéristique** de la v.a X la fonction réelle φ_X définie par :*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_X & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & t & \longmapsto & \varphi_X(t) = E\left(e^{iXt}\right) \end{array}$$

à savoir

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\ f_X(x)\,dx = \int_{D_X} e^{ixt}\ f_X(x)\,dx,$$

où i est le nombre complexe qui vérifie $i^2 = 1$.

Remarque 3.32 *La fonction caractéristique φ_X d'une variable aléatoire absolument continue X de fonction de densité f_X est bien définie sur $\mathbb{R}$, en effet :*

$$|\varphi_X(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{ixt}\right|\ f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1,$$

d'où l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\ f_X(x)\,dx$ est absolument convergente, ainsi la fonction φ_X est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.33 *Soit X une v.a réelle absolument continue de fonction caractéristique φ_X. Alors*

i) Pour tout $t \in \mathbb{R} : |\varphi_X(t)| \leq 1$,

ii) $\varphi_X(0) = 1$,

iii) pour tout $t \in \mathbb{R} : \varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$ (où $\overline{\varphi_X(t)}$ est le conjugué du nombre complexe $\varphi_X(t)$),

iv) pour tout réels $a, b : \varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

v) φ_X est continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque 3.34 *La fonction caractéristique d'une variable aléatoire X discrète (resp. continue) caractérise sa loi de probabilité c'est-à-dire si on connait la fonction caractéristique φ_X d'une variable aléatoire X, on connait sa loi p_X (resp. f_X). Autrement dit, si deux variables aléatoires ont même fonction caractéristique, elles ont même loi.*

Le Théorème suivant montre cette remarque dans le cas où X une v.a réelle absolument continue de support D_X et de fonction de densité f_X.

Théorème 3.35 *Si φ_X est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X et si φ_X est intégrable sur $\mathbb{R}$ i.e.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_X(x)|\, dx < +\infty,$$

alors la v.a X admet une densité de probabilité définie par

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\ \varphi_X(t)\, dt, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.36 *Si X est une v.a réelle absolument continue de fonction caractéristique $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$, alors sa fonction de densité est*

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En effet :

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\ \varphi_X(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\ e^{-|t|}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-ixt+t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-ixt-t}dt\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\left[\frac{e^{(1-ix)t}}{(1-ix)}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{-e^{-(1+ix)t}}{(1+ix)}\right]_{-\infty}^{0}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{(1-ix)} + \frac{1}{(1+ix)}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{(1-ix)+(1+ix)}{(1-ix)(1+ix)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.
\end{aligned}$$

Proposition 3.37 *Si X est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre n, alors la fonction caractéristique de X est de classe C^n et on a :*

$$\forall k \in \{1, ..., n\} : \varphi_X^{(k)}(0) = i^k E\left(X^k\right)$$

où $\varphi_X^{(k)}(0)$ désigne la dérivée d'ordre k de la fonction φ_X au point 0.

En particulier, si X admet un moment d'ordre 2 et est centrée avec une variance σ^2, on a le d ´eveloppement limité en 0 :

$$\varphi_X(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o\left(t^2\right).$$

3.5 Quelques inégalitées remarquables

Les inégalités suivantes sont valables pour toutes les variables aléatoire réelles soit discrètes ou bien absoluments continues. Mais les preuves dans cette partie sont donnés juste dans le cas des variables aléatoire réelles absoluments continues.

3.5.1 Inégalité de Markov

Proposition 3.38 *Soit X une v.a positive de support D_X et de fonction de densité f_X, tel que $E(|X|) < +\infty$, alors pour tout $a > 0$,*

$$p(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Démonstration. Comme la v.a X est positive, on a

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x\ f_X(x)\, dx \geq \int_a^{+\infty} x\ f_X(x)\, dx,$$

car la fonction $x\ f_X(x)$ est positive. Donc

$$E(X) \geq \int_a^{+\infty} x\ f_X(x)\, dx \geq a \int_a^{+\infty} f_X(x)\, dx = a\ p(X > a)$$

ainsi

$$p(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

■

3.5.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Proposition 3.39 *Soit X une v.a réelle absolument continue de moyenne μ et de variance σ^2, alors pour tout $\varepsilon > 0$*

$$p(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration. Il est clair que pour tout $\varepsilon > 0$

$$p(|X - \mu| \geq \varepsilon) = p\left(|X - \mu|^2 \geq \varepsilon^2\right).$$

En appliquant l'inégalité de Markov à la v.a positive $|X-\mu|^2$, on trouve

$$\begin{aligned} p(|X-\mu|\geq\varepsilon) &= p\left(|X-\mu|^2\geq\varepsilon^2\right) \\ &\leq \frac{E\left(|X-\mu|^2\right)}{\varepsilon^2}=\frac{var(X)}{\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

■

3.6 Variables aléatoires absolument continues usuelles

3.6.1 Loi Uniforme

Définition 3.40 *La variable aléatoire réelle X* ***suit la loi uniforme sur l'intervalle*** *$[a,b]$ $(-\infty<a<b<+\infty)$ et on note $X\sim U_{[a,b]}$, si elle a une densité f constante sur cet intervalle et nulle en dehors. On a alors*

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & si\ x\in[a,b]\\ 0 & sinon\end{cases}=\frac{1}{b-a}\,I_{[a,b]}\ \text{où}\ a,b\in\mathbb{R}.$$

La fonction de répartition F_X est affine par morceaux :

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<a\\ \displaystyle\int_a^x\frac{1}{b-a}dt=\frac{x-a}{b-a} & \text{si } a\leq x<b\\ \displaystyle\int_a^b\frac{1}{b-a}dt=1 & \text{si } x\geq b\end{cases}$$

La règle suivante permet en général d'éviter les calculs d'intégrales pour évaluer la quantité $P(X\in B)$ lorsque B est une réunion finie ou dénombrable d'intervalles (voir l'exercice 8.2).

Proposition 3.41 *Si X suit la loi uniforme sur $[a,b]$, alors pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$,*

$$p(X\in I)=\frac{l([a,b]\cap I)}{l([a,b])},$$

où $l(J)$ désigne la longueur de l'intervalle J.

En particulier pour $I=[a,b]$ on voit que $p(X\in[a,b])=1$. Ainsi une variable aléatoire de loi uniforme est bornée. Elle a donc des moments de tout ordre.

Calculons l'espérance et la variance.

Proposition 3.42 *Si X suit la loi uniforme sur $[a,b]$, son espérance et sa variance sont données par :*

$$E(X)=\frac{a+b}{2}\qquad et \qquad var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\bullet\ E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\ f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x\ \frac{1}{b-a}\ I_{[a,b]}dx\\ &= \int_a^b x\ \frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx\\ &= \frac{1}{b-a}\ \frac{x^2}{2}\Big]_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}.\end{aligned}$$

Le moment d'ordre deux se calcule de la même façon.

$$\begin{aligned}\bullet\ E\left(X^2\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ \frac{1}{b-a}\ I_{[a,b]}dx\\ &= \int_a^b x^2\ \frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx\\ &= \frac{1}{b-a}\ \frac{x^3}{3}\Big]_a^b=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}\\ &= \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3(b-a)}=\frac{(a^2+ab+b^2)}{3},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}var(X) &= E\left(X^2\right)-E^2(X)\\ &= \frac{(a^2+ab+b^2)}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.\end{aligned}$$

■

3.6.2 Loi Exponentielle

Définition 3.43 *Soit λ un réel strictement positif. La variable aléatoire réelle X suit la* ***loi Exponentielle de paramètre*** *λ et on note $X \sim \xi(\lambda)$, si elle admet pour densité*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases} = \lambda e^{-\lambda x}\ I_{[0,+\infty[}.$$

Proposition 3.44 *Si X suit la loi exponentielle de paramètre λ, son espérance et sa variance sont données par :*

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad et \quad var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Démonstration. Pour l'espérance de X voir l'Exemple 3.15.

Pour le calcul du moment d'ordre 2 et de la variance de X, on a :

- $E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ \lambda e^{-\lambda x}\ I_{[0,+\infty[}dx = \int_0^{+\infty} \lambda\ x^2 e^{-\lambda x} dx.$

On fait l'intégration par partie $\langle u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$ et $v' = \lambda e^{-\lambda x} \Rightarrow v = -e^{-\lambda x}\rangle$ on trouve

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \left.-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} \lambda\ x e^{-\lambda x} d \\ &= \frac{2}{\lambda} E(X) = \frac{2}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} var(X) &= E\left(X^2\right) - E^2(X) \\ &= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

■

3.6.3 Loi Gamma

Fonction Gamma

Définition 3.45 *Soit r un réel strictement positif, la **fonction Gamma** noté $\Gamma(r)$ est l'intégral généralisée*

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{r-1} dx.$$

Proposition 3.46 *Soit r un réel strictement positif, alors*

i) $\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$,

ii) $\Gamma(n) = (n-1)!$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$,

iii) $\Gamma(1) = 1$ *et* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Définition 3.47 *Une variable aléatoire réelle absolument continue X **suit la loi Gamma de paramètres** λ et r $(\lambda > 0, r > 0)$ si sa fonction de densité s'écrit*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)} e^{-\lambda x}\ x^{r-1} & si\ \ x \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases} = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} e^{-\lambda x}\ x^{r-1} I_{[0,+\infty[}.$$

On notera $X \sim \Gamma_{\lambda,r}$.

Proposition 3.48 *Si X suit la loi Gamma de paramètres λ, r, son espérance et sa variance sont données par :*

$$E(X) = \frac{r}{\lambda} \quad et \quad var(X) = \frac{r}{\lambda^2}.$$

Démonstration.

$$\bullet E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} e^{-\lambda x}\ x^{r-1} dx = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\ x^r dx.$$

En utilisant le changement de variable $\langle y = \lambda x,\ dy = \lambda dx \rangle$, on trouve

$$E(X) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^{+\infty} e^{-y} \ \left(\frac{y}{\lambda}\right)^r \frac{dy}{\lambda}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\lambda\ \Gamma(r)} \int_0^{+\infty} e^{-y}\ y^r dy \\
&= \frac{\Gamma(r+1)}{\lambda\ \Gamma(r)} = \frac{r\Gamma(r)}{\lambda\ \Gamma(r)} = \frac{r}{\lambda}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bullet\ E\left(X^2\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} e^{-\lambda x}\ x^{r-1} dx \\
&= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\ x^{r+1} dx.
\end{aligned}
$$

En utilisant le changement de variable $\langle y = \lambda x,\ dy = \lambda dx \rangle$, on trouve

$$
\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^{+\infty} e^{-y}\ \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{r+1} \frac{dy}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2\ \Gamma(r)} \int_0^{+\infty} e^{-y}\ y^{r+1} dy \\
&= \frac{\Gamma(r+2)}{\lambda\ \Gamma(r)} = \frac{r(r+1)\Gamma(r)}{\lambda^2\ \Gamma(r)} = \frac{r(r+1)}{\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

d'où

$$
var(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) = \frac{r(r+1)}{\lambda^2} - \left(\frac{r}{\lambda}\right)^2 = \frac{r}{\lambda^2}.
$$

■

Remarque 3.49 *1. La loi Gamma de paramètres $\lambda, 1$ n'est autre que la loi exponentielle de paramètre λ.*

2. La loi Gamma de paramètres $\lambda = \frac{1}{2}, r = \frac{n}{2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est appelée loi de Chi-deux à n degrés de liberté notée χ_n^2.

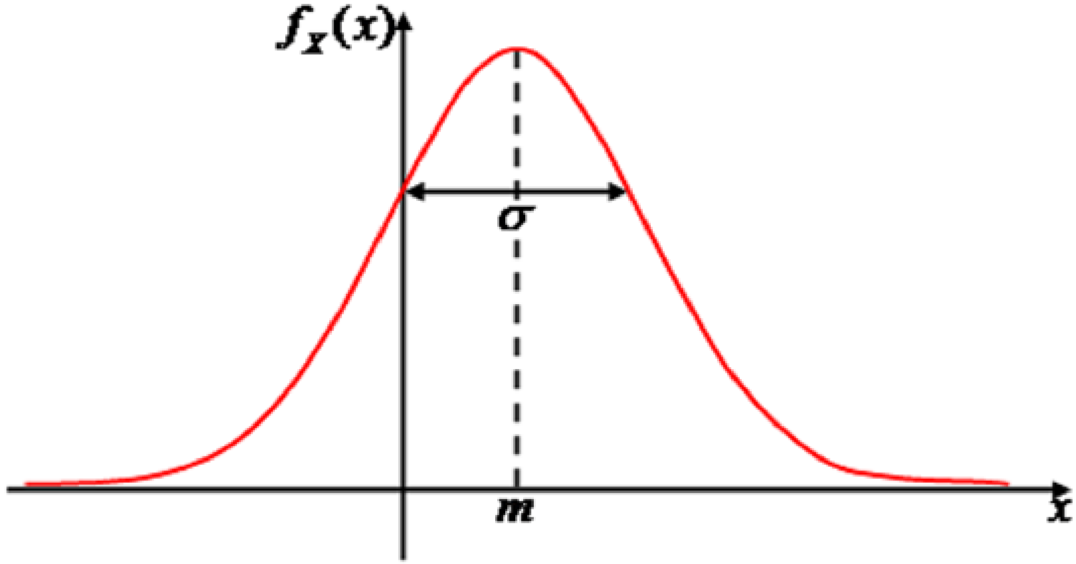
3.6.4 Loi Normale

Définition 3.50 *On dit que la variable aléatoire X suit la **loi Gaussienne** ou **Normale de paramètres** m, σ^2 et on note $X \sim N(m, \sigma^2)$, si elle a pour densité la fonction :*

$$
f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.
$$

La loi $N(0,1)$ est appelée ***loi Normale standard*** *ou* ***loi Normale centré réduite.***

Voici la courbe de la fonction de densité de la loi $N(m,\sigma^2)$



Tous les calculs de probabilités concernant une variable aléatoire de loi $N(m,\sigma^2)$ peuvent se ramener à des calculs sur une variable de loi normale standard.

Proposition 3.51 *Si la variable aléatoire X suit la loi $N(m,\sigma^2)$ alors $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $N(0,1)$.*

Démonstration. En utilisant la Proposition 3.8, on calcule $P(a < Y \leq b)$ pour a et b réels quelconques $(a < b)$,

$$\begin{aligned} P(a &< Y \leq b) = P(a < \frac{X-m}{\sigma} \leq b) = P(a\sigma + m < X \leq b\sigma + m) \\ &= \int_{a\sigma+m}^{b\sigma+m} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx. \end{aligned}$$

Il suffit alors de faire le changement de variable $y = \dfrac{x-m}{\sigma}$ pour obtenir

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b > a : P(a < Y \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{y^2}{2}} dy$$

Donc Y a pour densité de probabilité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$, d'où $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $N(0,1)$. ■

Proposition 3.52 *Si la variable aléatoire X suit la loi $N(m,\sigma^2)$, alors*

$$E(X) = m \quad et \quad var(X) = \sigma^2.$$

Démonstration. La variable aléatoire $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $N(0,1)$ et l'on a $X = \sigma Y + m$. Il suffit donc de montrer que $E(Y) = 0$ et $var(Y) = 1$.

$$\begin{aligned} \bullet\ E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} -ye^{-\frac{y^2}{2}}dy \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{y^2}{2}}\right]_{+\infty}^{-\infty} = 0. \end{aligned}$$

$$\bullet\ E\left(Y^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} -y^2e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$$

En utilisant l'intégration par partie, on pose

$$\left\langle \begin{array}{c} u = y \Rightarrow u' = 1 \\ v' = -ye^{-\frac{y^2}{2}} \Rightarrow v = e^{-\frac{y^2}{2}} \end{array} \right\rangle$$

on trouve

$$\bullet\ E\left(Y^2\right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{ ye^{-\frac{y^2}{2}}\right]_{+\infty}^{-\infty} - \left.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right\} = 1,$$

car

$$\lim_{y\to-\infty} ye^{-\frac{y^2}{2}} = \lim_{y\to+\infty} ye^{-\frac{y^2}{2}} = 0 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \sqrt{2\pi} \text{ (Intégral de Gauss).}$$

Ainsi

$$var(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) = 1.$$

$\blacksquare$

3.6.5 Loi de Cauchy

Définition 3.53 *On dit que la variable aléatoire X suit la* ***loi de Chauchy de paramètres*** *μ, θ ($\mu > 0$ $\theta \in \mathbb{R}$) si elle a pour densité la fonction :*

$$f_X(x) = \frac{\mu}{\pi} \frac{1}{\mu^2 + (x-\theta)^2}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On notera $X \sim C(\mu, \theta)$.

Si $\mu = 1$ et $\theta = 0$, alors $X \sim C(1, 0)$, sa densité de probabilité est

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Remarque 3.54 *Si $X \sim C(1, 0)$, alors $E(X)$ n'existe pas (voir l'Exemple 3.15).*

Le tableau suivant exprime la fonction génératrice, la fonction génératrice des moments et la fonction caractéristique de quelques variables aléatoires usuelles absolument continues.

$v.a$	f.g.m $M_X(t)$	f.c $\varphi_X(t)$
$U_{[a,b]}$	$\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$ si $t \neq 0$ 1 si $t = 0$	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$ si $t \neq 0$ 1 si $t = 0$
$\Gamma_{\lambda,r}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r$ si $t < \lambda$,	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^r$
$\xi(\lambda)$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$ si $t < \lambda$	$\frac{\lambda}{\lambda - it}$
$N(m, \sigma^2)$	$\exp\left(mt + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$	$\exp\left(imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$
$N(0,1)$	$\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$	$\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$

3.7 Exercices

Exercice 3.1. Soit la fonction réelle f définie par

$$f(x) = kx(1-x) I_{]0,1[}(x) \quad k > 0.$$

1. Déterminer la constante k pour que f une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.
3. Calculer $E(X)$, $E(X^2)$ et $var(X)$.

Exercice 3.2. **a-** Soit θ un réel strictement positif et soit la fonction réelle f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\theta^2} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

b- Soit X la variable aléatoire de fonction densité f.

1. Calculer $E(X)$, $E(X^2)$ et $var(X)$ en fonction de θ.
2. Evaluer $P(X < \dfrac{\theta}{4})$.

Exercice 3.3. La consommation journalière en eau d'une aglomération au cours du mois de juillet est une variable aléatoire X dont la densité f_X à la forme :

$$f_X(x) = c(x-a)(b-x)1_{]a,b[}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

où a, b, c sont des constantes strictement positives ($a < b$).

1. Vérifier que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_a^b (x-a)^n (b-x)\, dx = \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

2. Exprimer la constante c en fonction de a et b.
3. Calculer $E(X-a)$ et $E\left[(X-a)^2\right]$. En déduire $E(X)$ et $var(X)$.
4. Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.

5. Donner une approximation à la quantité $p(X > a + 2)$.

Exercice 3.4. Soit X une variable aléatoire de densité f_X et de fonction de répartition F_X. X est dite symétrique par rapport à α si

$$p(X \geq \alpha + x) = p(X \leq \alpha - x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que si X est dite symétrique par rapport à α, alors

$$F_X(\alpha - x) = 1 - F_X(\alpha + x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Si X est symétrique par rapport à α, on peut déduire que

$$f_X(\alpha - x) = f_X(\alpha + x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

montrer alors que si X est symétrique par rapport à α et $E(|X|) < +\infty$, on a

$$E(X) = \alpha.$$

Exercice 3.5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} a \times 3^x & \text{si } x < 0 \\ a \times 3^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité. Déterminer la fonction de répartition de X. Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et la calculer.

3. On pose $Y = 3^X$. Déterminer la fonction de répartition de Y. Y admet-elle une espérance?

Exercice 3.6. Soit X une variable aléatoire de loi $N(0,1)$.

1. Calculer $E(X^{2n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

2. On pose $c_n = E\left(X^{2n}\right)$. Montrer en intégrant par partie que

$$\forall n \in \mathbb{N} : c_n = \frac{1}{2n+1} c_{n+1}.$$

3. En déduire une formule explicite pour $E\left(X^{2n}\right)$.

Exercice 3.7. **a-** Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale standard $N\left(m, \sigma^2\right)$.

1. Détèrminer la fonction de densité de la variable aléatoire $Y = \alpha X + \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

2. Si $m = 0$ et $\sigma = 1$, détèrminer la fonction de densité de la variable aléatoire $Z = X^2$.

b- Soit X une variable aléatoire qui suit une loi Gamma $\Gamma_{\lambda,r}$.

Détèrminer la fonction de densité de la variable aléatoire $T = \alpha X$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Exercice 3.8. Soit X une variable aléatoire positive admettant une densité f. On note F_X la fonction de répartition de X. Montrer que

$$E(X) = \int_0^{+\infty} \left(1 - F_X(x)\right) dx.$$

Exercice 3.9. On suppose que la durée de vie d'un disque dur est distribuée selon une loi exponentielle. Le fabricant veut garantir que le disque dur a une probabilité inférieure à 0.001 de tomber en panne sur un an. Quelle durée de vie moyenne minimale doit avoir le disque dur ?

Exercice 3.10. D'après une étude récente, la taille des femmes françaises est distribuée selon une loi normale de moyenne $m = 1,58$ et d'écart-type $\sigma = 0,06$. Pour produire un stock de vêtements, un fabricant souhaite utiliser cette loi.

1. Il commence par déterminer un intervalle de la forme $[m-a, m+a]$ (donc symétrique autour de la moyenne) contenant en moyenne 90 % (environ) des tailles des femmes françaises. Calculer a.

2. Il en déduit trois tailles, S, M et L, correspondant respectivement aux intervalles $[m-a, m-\frac{a}{3}]$, $[m-\frac{a}{3}, m+\frac{a}{3}]$ et $[m+\frac{a}{3}, m+a]$. Calculer le pourcentage de la production qui doit être affecté à chaque taille.

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 3.1.

1.

$$f \text{ est une densité de probabilité} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} kx(1-x)\,I_{]0,1[}(x)\,dx = 1 \\
&\Leftrightarrow k\int_{0}^{1} x(1-x)\,dx = 1 \\
&\Leftrightarrow k\int_{0}^{1} \left(x - x^2\right) dx = 1 \\
&\Leftrightarrow k\left(\left.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1\right) = 1 \\
&\Leftrightarrow k\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow k = 6.
\end{aligned}$$

2. La fonction de répartition de la v.a.X est la fonction réelle F_X définie par

$$F_X(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 6t(1-t)\,I_{]0,1[}(t)\,dt,$$

alors,

si $x \leq 0$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0,$$

si $0 < x < 1$:

$$F_X(x) = \int_{0}^{x} 6t(1-t)\,dt = 6\left(\left.\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^x\right) = \left(3x^2 - 2x^3\right),$$

si $x \geq 1$:

$$F_X(x) = \int_{0}^{1} 6t(1-t)\,dt = 1,$$

d'où

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \leq 0 \\ 3x^2 - 2x^3 & \text{si } \ 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } \ x \geq 1 \end{cases} .$$

3.

$$\bullet\ E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left[6x(1-x)\, I_{]0,1[}(x)\right] dx$$
$$= 6\int_0^1 x^2(1-x)\,dx = 6\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1\Bigg)$$
$$= 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 0.5,$$

$$\bullet\ E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \left[6x(1-x)\, I_{]0,1[}(x)\right] dx$$

$$= 6\int_0^1 x^3(1-x)\,dx = 6\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1\Bigg) = 6\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = 0.3,$$

d'où

$$var(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = 0.3 - (0.5)^2 = 0.05.$$

Solution de l'exercice 3.2.

a- Il est clair que la fonction f est positive, donc pour démontrer que f représente une densité de probabilité il suffit de montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{\theta^2} I_{[0,\theta]}(x)\,dx = \int_0^{\theta} \frac{2x}{\theta^2} dx$$
$$= \frac{1}{\theta^2}\int_0^{\theta} 2x dx = \frac{1}{\theta^2}\left(x^2\right]_0^{\theta}\Big) = \frac{\theta^2}{\theta^2} = 1.$$

b- 1.

$$\bullet\ E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left[\frac{2x}{\theta^2} I_{[0,\theta]}(x)\right] dx$$
$$= \frac{2}{\theta^2}\int_0^{\theta} x^2 dx = \frac{2}{\theta^2}\left(\left.\frac{x^3}{3}\right]_0^{\theta}\right)$$
$$= \frac{2}{\theta^2}\left(\frac{\theta^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\theta,$$

$$\bullet\ E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\left[\frac{2x}{\theta^2} I_{[0,\theta]}(x)\right] dx$$
$$= \frac{2}{\theta^2}\int_0^{\theta} x^3 dx = \frac{2}{\theta^2}\left(\left.\frac{x^4}{4}\right]_0^{\theta}\right) = \frac{2}{\theta^2}\left(\frac{\theta^4}{4}\right) = \frac{\theta^2}{2},$$

d'où

$$var(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2 = \frac{\theta^2}{2} - \left[\frac{2}{3}\theta\right]^2 = \frac{1}{18}\theta^2.$$

2.

$$p\left(X < \frac{\theta}{4}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{\theta}{4}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\frac{\theta}{4}} \frac{2x}{\theta^2} I_{[0,\theta]}(x)\,dx = \int_0^{\frac{\theta}{4}} \frac{2x}{\theta^2} dx$$
$$= \frac{1}{\theta^2}\left(\left.x^2\right]_0^{\frac{\theta}{4}}\right) = \frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\theta}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \simeq 0.06.$$

Solution Exercice 3.3.

1.

$$\int_a^b (x-a)^n (b-x)\,dx = \int_a^b (x-a)^n (b-a+a-x)\,dx$$
$$= \int_a^b (x-a)^n (b-a)\,dx + \int_a^b (x-a)^n (a-x)\,dx$$
$$= (b-a)\int_a^b (x-a)^n\,dx - \int_a^b (x-a)^{n+1}\,dx$$

$$= (b-a)\left(\left.\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}\right]_a^b\right) - \left(\left.\frac{(x-a)^{n+2}}{n+2}\right]_a^b\right)$$
$$= \frac{(b-a)^{n+2}}{n+1} - \frac{(b-a)^{n+2}}{n+2} = \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

2. f_X est une densité de probabilité, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} c(x-a)(b-x)1_{]a,b[}(x)dx = \int_a^b c(x-a)(b-x)dx.$$

En utilisant la question 1, on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow c\frac{(b-a)^3}{6} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{6}{(b-a)^3}.$$

3. En utilisant la Proposition 3.26, on trouve

$$\bullet E(X-a) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)\,f(x)\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \left[\frac{6}{(b-a)^3}(x-a)(b-x)1_{]a,b[}(x)\right] dx$$
$$= \frac{6}{(b-a)^3}\int_a^b (x-a)^2(b-x)dx.$$

En utilisant la question 1, on trouve

$$E(X-a) = \frac{6}{(b-a)^3}\int_a^b (x-a)^2(b-x)dx = \frac{6}{(b-a)^3}\frac{(b-a)^4}{12} = \frac{b-a}{2}$$

et

$$\begin{aligned}
\bullet E\left(X-a\right)^{2} &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x-a\right)^{2}f\left(x\right)dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x-a\right)^{2}\left[\frac{6}{\left(b-a\right)^{3}}(x-a)(b-x)1_{]a,b[}(x)\right]dx
\end{aligned}$$

$$= \frac{6}{\left(b-a\right)^{3}}\int\limits_{a}^{b}(x-a)^{3}(b-x)dx.$$

En utilisant la question 1, on trouve

$$\begin{aligned}
E\left[\left(X-a\right)^{2}\right] &= \frac{6}{\left(b-a\right)^{3}}\int\limits_{a}^{b}(x-a)^{3}(b-x)dx \\
&= \frac{6}{\left(b-a\right)^{3}}\frac{\left(b-a\right)^{5}}{20} = \frac{3\left(b-a\right)^{2}}{10}.
\end{aligned}$$

Comme

$$E\left(X-a\right) = E\left(X\right)-a,$$

alors,

$$E\left(X\right) = E\left(X-a\right)+a = \frac{b-a}{2}+a = \frac{a+b}{2}.$$

On a aussi

$$E\left[\left(X-a\right)^{2}\right] = E\left(X^{2}-2aX+a^{2}\right) = E\left(X^{2}\right)-2aE\left(X\right)+a^{2},$$

donc

$$\begin{aligned}
E\left(X^{2}\right) &= E\left[\left(X-a\right)^{2}\right]+2aE\left(X\right)-a^{2} \\
&= \frac{3\left(b-a\right)^{2}}{10}+2a\,\frac{\left(a+b\right)}{2}-a^{2} = \frac{3b^{2}+3a^{2}+4ab}{10},
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} var\left(X\right) &= E\left(X^2\right) - \left[E\left(X\right)\right]^2 = \frac{3b^2+3a^2+4ab}{10} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{\left(b-a\right)^2}{20}. \end{aligned}$$

4. La fonction de répartition de la v.a X est la fonction réelle F_X définie par

$$F_X\left(x\right) = \int_{-\infty}^{x} f\left(t\right) dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{6}{\left(b-a\right)^3}(t-a)(b-t)1_{]a,b[}(t)dt,$$

alors,

si $x \leq a : F_X\left(x\right) = 0,$

si $a < x < b :$

$$\begin{aligned} F_X\left(x\right) &= \frac{6}{\left(b-a\right)^3}\int_{a}^{x}(t-a)(b-t)dt = \frac{6}{\left(b-a\right)^3}\int_{a}^{x}(t-a)(b-t)dt \\ &= -\frac{6}{\left(b-a\right)^3}\int_{a}^{x}(t^2-\left(a+b\right)t+ab)dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{6}{\left(b-a\right)^3}\left[\left(\left[\frac{t^3}{3}\right]_a^x\right) - \left(a+b\right)\left(\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^x\right) + ab\left(t\right]_a^x)\right] \\ &= -\frac{6}{\left(b-a\right)^3}\left[\frac{x^3-a^3}{3} - \frac{\left(a+b\right)\left(x^2-a^2\right)}{2} + ab\left(x-a\right)\right], \end{aligned}$$

si $x \geq b :$

$$F_X\left(x\right) = \frac{6}{\left(b-a\right)^3}\int_{a}^{b}(t-a)(b-t)dt = 1,$$

d'où

$$F_X\left(x\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ -\dfrac{6}{\left(b-a\right)^3}\left[\dfrac{x^3-a^3}{3} - \dfrac{\left(a+b\right)\left(x^2-a^2\right)}{2} + ab\left(x-a\right)\right] & \text{si } a < x < b \\ 1 & \text{si } \quad x \geq b \end{cases}.$$

5. En appliquant l'inégalité de Markov. En effet : comme le support de la variable aléatoire X est $]a,b[$, alors la v.a $X-a$ est positive, donc

$$p(X>a+2)=p(X-a>2)\leq\frac{E(X-a)}{2}=\frac{\frac{b-a}{2}}{2}=\frac{b-a}{4}.$$

Solution Exercice 3.4.

1.

$$\begin{aligned} X \text{ symétrique par rapport à } \alpha &\Leftrightarrow p(X\geq\alpha+x)=p(X\leq\alpha-x) \quad \forall x\in\mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow 1-p(X<\alpha+x)=p(X\leq\alpha-x) \quad \forall x\in\mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow 1-F_X(\alpha+x)=F_X(\alpha-x) \quad \forall x\in\mathbb{R}, \end{aligned}$$

car X est une variable aléatoire absolument continue et donc pour tout réel y,

$$p(X<y)=p(X\leq y)=F_X(y).$$

2. Comme $E(|X|)$ existe, alors on peut écrire

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\ f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\alpha+\alpha)\ f_X(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\alpha)\ f_X(x)\,dx+\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\alpha)\ f_X(x)\,dx+\alpha, \end{aligned}$$

car f_X est une densité de probabilité (i.e. $\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\,dx=1$). Donc il suffit de montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\alpha)\ f_X(x)\,dx=0.$$

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\alpha)\ f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\alpha} (x-\alpha)\ f_X(x)\,dx + \int_{\alpha}^{+\infty} (x-\alpha)\ f_X(x)\,dx.$$

Posons le changement du variable $\langle y = x-\alpha \Rightarrow dy = dx \rangle$, on trouve

$$\int_{-\infty}^{\alpha} (x-\alpha)\ f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} y\ f_X(y+\alpha)\,dy$$

et

$$\int_{\alpha}^{+\infty} (x-\alpha)\ f_X(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} y\ f_X(y+\alpha)\,dy = -\int_{-\infty}^{0} t\ f_X(\alpha-t)\,dt = -\int_{-\infty}^{0} t\ f_X(t+\alpha)\,dt,$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\alpha)\ f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} y\ f_X(y+\alpha)\,dy - \int_{-\infty}^{0} t\ f_X(t+\alpha)\,dt = 0.$$

Ainsi $E(X) = \alpha$.

Solution de l'exercice 3.5.

1. La fonction f est positive si $a \geq 0$, et on a

$$\int_{0}^{+\infty} 3^{-x}dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-x\ln(3)}dx = -\frac{1}{\ln(3)}e^{-x\ln(3)}\Big]_{0}^{+\infty} = \frac{1}{\ln(3)}.$$

En utilisant le changement du variable $\langle t = -x \Rightarrow dt = -dx \rangle$, on trouve aussi

$$\int_{-\infty}^{0} 3^{x}dx = \int_{0}^{+\infty} 3^{-x}dx = \frac{1}{\ln(3)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= 1 \Leftrightarrow a\left[\int_{-\infty}^{0} 3^{x}dx + \int_{0}^{+\infty} 3^{-x}dx\right] = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{2a}{\ln(3)} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{\ln(3)}{2}.\end{aligned}$$

2. La fonction de répartition F_X de la v.a. X est donnée par :

Si $x < 0$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{\ln(3)}{2} \int_{-\infty}^{x} 3^t dt = \frac{\ln(3)}{2} \int_{-\infty}^{x} e^{t\ln(3)} dt \\ &= \frac{\ln(3)}{2} \left(\frac{1}{\ln(3)} \left. e^{t\ln(3)} \right]_{-\infty}^{x} \right) = \frac{1}{2} e^{x\ln(3)} = \frac{3^x}{2}. \end{aligned}$$

Si $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{\ln(3)}{2} \int_{-\infty}^{x} 3^t dt = \frac{\ln(3)}{2} \left[\int_{-\infty}^{0} 3^t dt + \int_{0}^{x} 3^{-t} dt \right] \\ &= \frac{\ln(3)}{2} \left[\left(\frac{1}{\ln(3)} \left. e^{t\ln(3)} \right]_{-\infty}^{0} \right) - \frac{1}{\ln(3)} \left. e^{-t\ln(3)} \right]_{0}^{x} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - e^{-x\ln(3)} + 1 \right] = 1 - \frac{e^{-x\ln(3)}}{2} = 1 - \frac{3^{-x}}{2}, \end{aligned}$$

d'où

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{3^x}{2} & \text{si } \ x < 0 \\ 1 - \dfrac{3^{-x}}{2} & \text{si } \ x \geq 0 \end{cases}.$$

La fonction $xf(x)$ est négligeable au voisinage de $+\infty$ devant la fonction $\dfrac{1}{x^2}$, et il en est de même au voisinage de $-\infty$ car cette fonction est impaire. Elle est donc intégrable, et X admet bien une espérance. En outre, toujours par imparité de $x \mapsto xf(x)$, l'espérance est nulle.

3. La variable aléatoire Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$p(Y \leq y) = p\left(3^X \leq y\right) = p\left(X \leq \frac{\ln(y)}{\ln(3)}\right).$$

On en déduit :

si $0 < y < 1$:

$$F_Y(y) = \frac{1}{2} 3^{\frac{\ln(y)}{\ln(3)}} = \frac{1}{2} e^{\frac{\ln(y)}{\ln(3)}\ln(3)} = \frac{y}{2}.$$

si $y \geq 1$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= 1 - \frac{3^{-\frac{\ln(y)}{\ln(3)}}}{2} = 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{\ln(y)}{\ln(3)} \ln(3)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} e^{-\ln(y)} = 1 - \frac{1}{2y}. \end{aligned}$$

En particulier pour $y > 1$, la densité de Y est :

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{1}{2y^2},$$

et donc au voisinage de $+\infty$, on a $y f_Y(y) \sim \dfrac{1}{2y}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2y} dy$ diverge, ainsi la v.a.r Y n'admet pas d'espérance.

Solution de l'exercice 3.6.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \bullet E\left(X^{2n+1}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} x^{2n+1}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} dx + \int_{0}^{+\infty} x^{2n+1}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right]. \end{aligned}$$

Or d'aprés le changement du variable $\langle t = -x \Rightarrow dt = -dx \rangle$ pour la première intégrale, on trouve

$$\int_{-\infty}^{0} x^{2n+1}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = -\int_{+\infty}^{0} (-1)^{2n+1}\, t^{2n+1}\, e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = -\int_{0}^{+\infty} t^{2n+1}\, e^{-\frac{1}{2}t^2} dt,$$

d'où

$$E\left(X^{2n+1}\right) = 0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\bullet E\left(X^{2n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

En utilisant l'intégration par partie

$$\left\langle \begin{array}{c} u = x^{2n-1}\ e^{-\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow du = \left[(2n-1)\,x^{2n-2} - x^{2n}\right] e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \\ dv = x \Rightarrow v = \frac{1}{2}x^2 \end{array} \right\rangle,$$

on trouve

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n}\ e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx &= \left.\frac{1}{2}x^{2n+1}e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{(2n-1)}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n}\ e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+2}\ e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+2}\ e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx - \frac{(2n-1)}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n}\ e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx, \end{aligned}$$

car

$$\left.\frac{1}{2}x^{2n+1}e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Donc

$$\left(1 + \frac{(2n-1)}{2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n}\ e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+2}\ e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx,$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n}\ e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \frac{1}{2n+1}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+2}\ e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx,$$

c'est-à-dire

$$C_n = \frac{1}{2n+1}C_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. D'aprés la question 2, nous remarquons que $E\left(X^{2n}\right)$ s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} E\left(X^{2n}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(2n-1)\times(2n-3)\times ... \times 3 \times E\left(X^2\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times (2n-1)\times(2n-3)\times ... \times 3 \times 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2n\times(2n-1)\times(2n-2)\times(2n-3)\times ... \times 4\times 3\times 2\times 1}{2n\times(2n-2)\times ... \times 4\times 2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(2n)!}{2^n n!}. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3.7.

a- 1. Si $X \sim N(m,\sigma)$, alors X a pour densité $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}$.

Si $Y = h(X) = \alpha X + \beta$, il est clair que la fonction h vérifie les conditions du Théorème 3.24, d'où la variable aléatoire $Y = h(X)$ est absolument continue, de support $D_Y = h(D_X) = \mathbb{R}$ et de fonction de densité

$$f_Y(y) = \frac{f_X(h^{-1}(y))}{|h'(h^{-1}(y))|} \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

Comme $h^{-1}(y) = \frac{y-\beta}{\alpha}$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{f_X(h^{-1}(y))}{|h'(h^{-1}(y))|} = \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-\beta}{\alpha}-m\right)^2}{2\sigma^2}}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-\beta}{\alpha}-m\right)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{\alpha\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{[y-(\alpha m+\beta)]^2}{(\alpha\sigma)^2}}. \end{aligned}$$

Ainsi $Y \sim N\left(\alpha m + \beta, (\alpha\sigma)^2\right)$.

2. Si $X \sim N(0,1)$, alors X a pour densité $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}$. Si $Z = h(X) = X^2$,

Il est clair que le support de la v.a Z est $D_Z = [0,+\infty[$. Pour déterminer la fonction du densité de la variable Z, nous utilisons le Théorème 3.27, en effet : soit la fonction continue φ, alors

$$E\left(\varphi\left(X^2\right)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(x^2\right) \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\int_0^{+\infty} \varphi\left(x^2\right) \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

car la fonction $\varphi(x^2) \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est paire.

Prenons le changement du variable $\langle z = x^2 \Rightarrow dz = 2xdx \rangle$, on a

$$\begin{aligned}
E\left(\varphi\left(X^2\right)\right) &= 2\int_0^{+\infty} \varphi\left(x^2\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\int_0^{+\infty} \varphi\left(z\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z}{2}} \frac{dz}{2\sqrt{z}} \\
&= \int_0^{+\infty} \varphi\left(z\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z}{2}} z^{-\frac{1}{2}} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(z\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z}{2}} z^{-\frac{1}{2}} I_{[0,+\infty[} dz,
\end{aligned}$$

d'où la densité de la fonction de la v.a $Z = X^2$ est

$$f_Y\left(z\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z}{2}} z^{-\frac{1}{2}} I_{[0,+\infty[}\left(z\right),$$

c'est-à-dire la v.a Z suit une loi de Chi-deux à 1 degré de liberté $Z \sim \chi_1^2$.

b- Si $X \sim \Gamma_{\lambda,r}$, alors X a pour densité $f_X\left(x\right) = \dfrac{\lambda^r}{\Gamma\left(r\right)} e^{-\lambda x}\ x^{r-1} I_{[0,+\infty[}$.

Si $T = h\left(X\right) = \alpha X$, il est clair que la fonction h vérifie les conditions du Théorème 3.24, d'où la variable aléatoire $T = h\left(X\right)$ est absolument continue, de support $D_Y = h\left(D_X\right) = [0, +\infty[$ et de fonction de densité

$$f_T\left(y\right) = \frac{f_X\left(h^{-1}\left(y\right)\right)}{\left|h'\left(h^{-1}\left(y\right)\right)\right|} \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

Comme $h^{-1}\left(y\right) = \dfrac{y}{\alpha}$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
f_T\left(y\right) &= \frac{f_X\left(h^{-1}\left(y\right)\right)}{\left|h'\left(h^{-1}\left(y\right)\right)\right|} = \frac{\frac{\lambda^r}{\Gamma\left(r\right)} e^{-\lambda\left(\frac{y}{\alpha}\right)} \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{r-1}}{\alpha} = \frac{\frac{\lambda^r}{\Gamma\left(r\right)} e^{-\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)y} y^{r-1}}{\alpha^r} \\
&= \frac{\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^r}{\Gamma\left(r\right)} e^{-\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)y} y^{r-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi $T \sim \Gamma_{\frac{\lambda}{\alpha},r}$.

Solution de l'exercice 3.8.

Une preuve facile utilise le théorème de Fubini : on commence par remarquer que

$$1 - F_X(x) = p(X > x) = \int_x^{+\infty} f_X(t)\, dt,$$

et donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} (1 - F_X(x))\, dx &= \int_0^{+\infty} \left[\int_x^{+\infty} f_X(t)\, dt \right] dx \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{t} dx \right) f_X(t)\, dt = \int_0^{+\infty} t f_X(t)\, dt = E(X)
\end{aligned}$$

le changement dans l'ordre d'intégration étant justifié par le fait que tout est positif.

Solution de l'exercice 3.9.

On appelle X la variable aléatoire donnant la durée de vie du disque dur.

X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Le fabricant veut garantir que

$$p(X \leq 1) < 0,001.$$

Comme $p(X \leq 1) = F_X(1)$ par définition et la fonction de répartition F_X d'une loi exponentielle de paramètre λ est $1 - e^{-\lambda t}$, on obtient

$$1 - e^{-\lambda} < 0,001 \Rightarrow 0,999 < e^{-\lambda}.$$

D'aprés la croissance de la fonction $\ln(x)$ et la décroissance de la fonction $\frac{1}{x}$, on trouve

$$\begin{aligned}
0,999 &< e^{-\lambda} \Rightarrow \ln(0,999) < -\lambda \Rightarrow \lambda < -\ln(0,999) \\
&\Rightarrow \frac{1}{\lambda} > -\frac{1}{\ln(0,999)} = 999,5.
\end{aligned}$$

Or, comme X suit une loi exponentielle de paramètre λ, son espérance est $\frac{1}{\lambda}$. La durée de vie moyenne du disque dur doit donc être d'au moins $999,5$ ans.

Solution de l'exercice 3.10.

1. Soit T la variable aléatoire représentant la taille d'une femme. Par hypothèse, T suit une loi normale $N(1.58, 0.062)$. On cherche $a > 0$ tel que

$$p(T \in [m-a, m+a]) = 0.9.$$

Soit la variable $Y = \dfrac{T-m}{\sigma}$. On sait que Y suit une loi normale standard $N(0,1)$. De plus, on a

$$m - a \leq T \leq m + a \Leftrightarrow -\frac{a}{\sigma} \leq \frac{T-m}{\sigma} \leq \frac{a}{\sigma}.$$

Donc

$$p(T \in [m-a, m+a]) = 0.9 \Leftrightarrow p(Y \in [-\frac{a}{\sigma}, \frac{a}{\sigma}]) = 0.9.$$

Cherchons donc λ tel que

$$p(Y \in [-\lambda, \lambda]) = 0.9.$$

On sait que

$$p(Y \in [-\lambda, \lambda]) = F_Y(\lambda) - F_Y(-\lambda)$$

car Y est une variable aléatoire continue. De plus, par symétrie de la loi normale standard, on $F_X(-\lambda) = 1 - F_X(\lambda)$, et ainsi

$$p(Y \in [-\lambda, \lambda]) = 2F_Y(\lambda) - 1.$$

De ce fait, chercher λ tel que $p(Y \in [-\lambda, \lambda]) = 0,9$ est équivalent à chercher λ tel que

$$F_Y(\lambda) = \frac{1 + 0.9}{2} = 0.95.$$

La lecture de la table de la loi normale donne :

$$\begin{aligned} F_Y(1.64) &= 0.9495, \\ F_Y(1.65) &= 0.9505. \end{aligned}$$

Pour avoir un intervalle légèrement plus grand que celui recherché par le fabricant, on choisit $\lambda = 1.65$. Si on pose $a = \sigma\lambda = 0.06 \times 1.65 = 0.099$, on a donc

$$p(T \in [m-a, m+a]) = P(T \in [1.481, 1.679]) \simeq 0,9.$$

2. Étudions le premier intervalle. On a

$$\begin{aligned} m - a \quad &\leq \quad T \leq m - \frac{a}{3} \Leftrightarrow -a \leq T - m \leq -\frac{a}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{a}{\sigma} \leq \frac{T-m}{\sigma} \leq -\frac{a}{3\sigma} \Leftrightarrow -\lambda \leq Y \leq -\frac{\lambda}{3}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} p(T \quad &\in \quad [m-a, m-\frac{a}{3}]) = p(Y \in [-\lambda, -\frac{\lambda}{3}]) = F_Y\left(-\frac{\lambda}{3}\right) - F_Y(-\lambda) \\ &= \quad 1 - F_Y\left(\frac{\lambda}{3}\right) - [1 - F_Y(\lambda)] \qquad \text{par symétrie} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \quad 0.9505 - F_Y\left(\frac{1.65}{3}\right) \qquad \text{selon l'analyse précédente} \\ &= \quad 0.9505 - 0.7088 \qquad \text{par lecture dans la table} \\ &= \quad 0.2417. \end{aligned}$$

On a de la même façon

$$\begin{aligned} m - \frac{a}{3} \quad &\leq \quad T \leq m + \frac{a}{3} \Leftrightarrow -\frac{a}{3} \leq T - m \leq +\frac{a}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{a}{3\sigma} \leq \frac{T-m}{\sigma} \leq \frac{a}{3\sigma} \Leftrightarrow -\frac{\lambda}{3} \leq Y \leq \frac{\lambda}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(T \quad &\in \quad [m-a, m-\frac{a}{3}]) = p(Y \in [-\frac{\lambda}{3}, +\frac{\lambda}{3}]) = F_Y\left(\frac{\lambda}{3}\right) - F_Y\left(-\frac{\lambda}{3}\right) \\ &= \quad 2F_Y\left(\frac{\lambda}{3}\right) - 1 \qquad \text{par symétrie} \\ &= \quad 2F_Y\left(\frac{1.65}{3}\right) - 1 \\ &= \quad 2 \times 0.7088 - 1; \qquad \text{selon l'analyse précédente} \\ &= \quad 0.4176. \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} m+\frac{a}{3} &\leq T \leq m+a \Leftrightarrow +\frac{a}{3} \leq T-m \leq +a \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{3\sigma} \leq \frac{T-m}{\sigma} \leq \frac{a}{\sigma} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{3} \leq Y \leq \lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(T &\in [m-a, m-\frac{a}{3}]) = p(Y \in [\frac{\lambda}{3}, \lambda]) = F_Y(\lambda) - F_Y\left(\frac{\lambda}{3}\right) \\ &= 0.9505 - 0.7088 \\ &= 0.2417. \end{aligned}$$

La Table suivante représente les probabilités $p\left(Z \leq t\right) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$, où Z suit la loi normale centré réduite ($Z \sim N\left(0,1\right)$).

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862

Quelques identités remarquables

$$\begin{aligned} C_n^0 &= C_n^n = 1 \\ C_n^p &= C_n^{n-p} \\ C_n^p \times C_p^m &= C_n^m \times C_{n-m}^{n-p} \\ C_n^p &= C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} \end{aligned}$$

Le binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k},$$

Fonction Gamma d'Euler

$$\Gamma(r) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^{r-1} dx, \quad r > 0$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad , \quad \Gamma(0) = \Gamma(1) = 1 \ \text{ et } \ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} x^{r-1} dx = \frac{\Gamma(r)}{a^r}, \quad a, r > 0$$

Intégrale de Gauss

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0 \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx &= \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} x^r dx = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{2\ a^{\frac{r+1}{2}}}, \quad a > 0 \text{ et } r > -1.$$

Bibliographie

[1] **A. Perrut,** Cours de probabilités et statistiques, Université Claude Bernard Lyon 1, 2010.

[2] **A Tortrat,** Calcul de Probabilités, Masson-Paris 1963.

[3] **Bruno Saussereau,** Cours de théorie des probabilités avec exercices corrigés et devoirs, Année universitaire 2013-2014.

[4] **C. Fiszka,** Cours d'introduction aux probabilités, Université Paris VII, 2013.

[5] **CUAZ. M,** Cours et exercices de mathématiques, Probabilités, http://mathscyr.free.fr.

[6] **D. Daccuna Castelle, M. Duflo,** Probabilités et Statistiques, Problèmes à temps fixe, Masson-Paris 1982.

[7] **DUSART. Pierre,** Cours de Probabilités, France, 2013.

[8] **Fabrice Rossi & Fabrice Le Lec,** Exercices corrigés de probabilités et statistique, Université Paris Panthéon-Sorbonne, 2012.

[9] **Jean-François Delmas,** Introduction au calcul des probabilités et à la statistique, Les Presses de l'ENSTA, Paris, ISBN 978-2-7225-0922-1, 2010.

[10] **Jean-Jacques Ruch et Marie-Line Chabanol,** Rappels de probabilités, Préparation à l'Agrégation Bordeaux 1, 2012 - 2013.

[11] **Kaci Redjal,** Cours de probabilités, L'Office des publications universitaires, Algérie 1988.

[12] **Murray R. Spiegel,** Probabilités et Statistique, Cours et problèmes, ISBN : 2-7042-1030-6, Parie 1981.

[13] **Nils Berglund,** Probabilités et Statistiques, Université d'Orleans, Version de Mars 2010.

[14] **Ricco Rakotomalala,** Probabilités et Statistique, Note de cours, Université Lumière Lyon 2.