République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Hassiba Benbouali Chlef

Faculté de Technologie

Département de Tronc Commun en Sciences et Techniques

POLYCOPIÉ

Élaboré en vue de l'obtention de l'habilitation universitaire.

Cours algebre et analyse avec des exemples et exercices non corrigés.

Destiné aux étudiants de

Licence LMD : (première année Tronc Commun)

Matière : mathématique

Chargé de la matière :

M. BRAIK Abdelkader

Maitre de conférences « B »

Année universitaire : 2020 / 2021

Distribution du Programme de Mathématiques 1

Domaine : *Sciences et Technologie*	**Programme :** *Mathématiques 1* **Code :** $F111$ **Unités d'enseignement :** *Fondamental* **Volume horaire semestriel :** $67h30'$ **Volume horaire hebdomadaire :** ($3h$ *cours et* $1h30'$ *TD*) **Semestre 1 :** 15 *semaines*	$1^{ère}$ **Année** *socle commun* **Coefficient :** 03 **Crédits :** 06

Chapitre	*Les sous-titres*	*Nombre de semaines*
1. Méthodes du raisonnement mathématique	*1-1 Raisonnement direct* *1-2 Raisonnement par contraposition* *1-3 Raisonnement par l'absurde* *1-4 Raisonnement par contre exemple* *1-5 Raisonnement par récurrence*	**01**
2. Les ensembles, les relations et les applications	*2-1 Théorie des ensembles* *2-2 Relation d'ordre, Relations d'équivalence* *2-3 Application injective, surjective, bijective : définition d'une application, image directe, image réciproque, caractéristique d'une application.*	**02**
3. Les fonctions réelles à une variable réelle	*3-1 Limite, continuité d'une fonction* *3-2 Dérivée et différentiabilité d'une fonction*	**03**
4. Application aux fonctions élémentaires	*4-1 Fonction puissance* *4-2 Fonction logarithmique* *4-3 Fonction exponentielle* *4-4 Fonction hyperbolique* *4-5 Fonction trigonométrique* *4-6 Fonction inverse*	**03**
5. Développement limité	*5-1 Formule de Taylor* *5-2 Développement limité* *5-3 Applications*	**02**
6. Algèbre linéaire	*6-1 Lois et composition interne* *6-2 Espace vectoriel, base, dimension (définitions et propriétés élémentaires)* *6-3 Application linéaire, noyau, image, rang.*	**04**

Introduction

Ce polycopié est un ouvrage, principalement destiné aux étudiants de première année des filières technologiques et scientifiques.
Le manuscrit couvre une partie de l'algèbre et une partie de l'analyse. La première débute par la logique et la théorie des ensembles, qui sont des fondamentaux en mathématiques. Ensuite nous étudierons les relations et les applications. Puis on discute à la structure algébrique, avec les notions de groupe, anneau et corps et après en termine cette partie par un domaine totalement nouveau pour ces étudiants et très riche, qui recouvre la notion d'espaces vectoriels ainsi que les applications linéaires. Ces concepts, à la fois profonds et utiles, demandent du temps et du travail pour être bien compris.
Le programme officiel de mathématiques supérieures prévoit que les notions apparaissant dans cette partie (logique, ensembles et applications, structures) soient acquises progressivement au cours de l'année, car elles sont à la base de tous les raisonnements usuels (ou de la plupart des erreurs de raisonnement usuelles) de premier cycle d'études.
L'étude de la théorie des ensembles (ainsi que l'étude de la logique mathématique) s'est développée à la fin du XIX^e siècle et au début du XX^e.
Les deux grands noms de l'étude de la théorie des ensembles et de la logique mathématique sont (Georg Ferdinand Ludwig Philipp) Cantor (1845-1918) pour les ensembles et (Kurt) Gödel (1906-1978) pour la logique. En mathématiques supérieures, nous avons besoin d'un vocabulaire simple mais efficace, des notations de base ainsi que d'un certain nombre de raisonnements types qui seront ensuite utilisés dans tous les autres chapitres.
Le premier chapitre, commun aux deux modules d'Algèbre et d'Analyse, traite des quelques notions et des concepts de bases dont vous aurez besoin durant le reste du cours de mathématiques. Beau-

coup de ces notions n'ont pas été vues au lycée et reviendront de façon rémanente tout au long du programme de mathématiques. Il faudra donc les assimiler et se familiariser avec elles au travers d'exercices nombreux et variés.
L'algèbre linéaire est un langage universel qui sert à décrire de nombreux phénomènes en mécanique, électronique, et économie, par exemple.
La deuxième partie débute par l'étude des fonctions : limite, continuité, dérivabilité sont des notions essentielles. Les chapitres suivants sont consacrés aux application aux fonctions élémentaires et développements limités.
L'outil central abordé dans cette partie d'analyse, ce sont les fonctions. Elles interviennent dès que l'on s'intéresse à des phénomènes qui varient en fonction de certains paramètres. Position d'une comète en fonction du temps, variation du volume d'un gaz en fonction de la température et de la pression, nombre de bactérie en fonction de la nourriture disponible : physique, chimie, biologie ou encore économie, autant de domaines dans lesquels le formalisme mathématique s'applique et permet de résoudre des problèmes.
Les développements limités sont l'outil principal d'approximation locale des fonctions. L'objectif de ce chapitre est de vous apprendre à les calculer. Vous aurez essentiellement besoin de savoir manipuler des polynômes, ainsi que d'avoir assimilé les limites, la comparaison des fonctions et la dérivation.
Les efforts que vous devrez fournir sont importants : tout d'abord comprendre le cours, ensuite connaître par coeur les définitions, les théorèmes, les propositions... sans oublier de travailler les exemples et les démonstrations, qui permettent de bien assimiler les notions nouvelles et les mécanismes de raisonnement.
Avant de terminer, je vous informe, chers étudiants, que la clé pour résoudre les exercices et les problèmes est une leçon théorique. Comme le dit le proverbe, il m'a appris à attraper un poisson au lieu de m'en donner un tous les jours.
Nous tenons à exprimer notre gratitude et notre reconnaissance aux deux spécialistes anonymes qui ont expertisé ce modeste ouvrage. Grâce à leurs commentaires nous avons pu améliorer la présentation du présent manuscrit dans sa forme et dans son contenu. Nous les remercions pour leur travail consciencieux et professionnel et pour leurs remarques toujours pertinentes.

Table des matières

Chapitre 1

Logique et méthodes du raisonnement mathématique

1.1 Notions de logique

1.1.1 Proposition, Assertion

Définition 1.1.1 :

*Une **proposition** (ou **assertion**) est une **phrase** ou est un **énoncé mathématique** qui peut prendre l'un des deux valeurs : soit vraie, soit fausse, c'est-a-dire pas les deux en même temps.*

Exemples 1.1.2 :

1. *Il pleut.*
2. *Je suis plus grand que toi.*
3. $5 - 2 = 3$.
4. $2 \times 3 = 9$.
5. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a* $x^2 > 0$.

1.1.2 Négation d'une proposition

Définition 1.1.3 :

*Soit P une proposition. On appelle **négation de** P et on note **non** P la proposition définie par : L'assertion « non P »est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.*

1.1.3 Les connecteurs logiques

Soient P et Q sont deux assertions, nous allons définir de nouvelles assertions construites à partir de P et de Q.

Conjonction « et : $\wedge$ »

Définition 1.1.4 *:*

*Soit P et Q deux propositions. On appelle **conjonction** de P **et** Q la proposition notée « $P \wedge Q$ »se lit « P **et** Q », et définie de la manière suivante : L'assertion « $P \wedge Q$ »est vraie si P est vraie et Q est vraie. est fausse sinon.*

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	**P $\wedge$ Q**
v	v	**v**
v	f	**f**
f	v	**f**
f	f	**f**

Table de vérité de « P $\wedge$ Q »

Exemples 1.1.5 *:*

a. *« L'Algérie est un pays arabe **et** africain», est une proposition **vraie** .*
b. *« $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$», est une proposition **vraie**.*
c. *« 27 est un nombre impaire **et** premièr», est une proposition **fause**.*
d. *« 30 est un multiple de 4 **et** de 5», est une proposition **fause**.*
e. *« 21 est divisible par 5 **et** par 6», est une proposition **fause**.*

Disjonction « ou : $\vee$ »

Définition 1.1.6 *:*

*Soit P et Q deux propositions. On appelle **disjonction** de P **ou** Q la proposition notée « $P \vee Q$ »se lit « P **ou** Q ». L'assertion « P **ou** Q »est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions P ou Q est vraie, est fausse lorsque P et Q sont fausses.*

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	**P $\vee$ Q**
v	v	**v**
v	f	**v**
f	v	**v**
f	f	**f**

Table de vérité de « P $\vee$ Q »

Exemples 1.1.7 *:*

a « L'Algérie est un pays arabe* ***ou*** *européen», est une proposition* ***vraie****.*

b « 27 est un nombre impaire* ***ou*** *premièr», est une proposition* ***vraie****.*

c «* $\sqrt{3} > 2$ ***ou*** $\sqrt{3} < 3$*», est une proposition* ***vraie****.*

d « 31 est divisible par 3* ***ou*** *par 5», est une proposition* ***fause****.*

Implication « $\Longrightarrow$ »

Définition 1.1.8 *:*

Soit P et Q deux propositions. On appelle ***implication*** *de Q par P la proposition «non P ou Q »ou «$\overline{P} \vee Q$». Cette proposition se note «$P \Longrightarrow Q$». La proposition $P \Longrightarrow Q$ se lit «P* ***implique*** *Q »ou encore «si P alors Q »elle se lit souvent aussi «si P est vraie alors Q est vraie ».*

Sa table de vérité est donc la suivante :

P	Q	**P $\Longrightarrow$ Q**
v	v	**v**
v	f	**f**
f	v	**v**
f	f	**v**

Table de vérité de « P $\Longrightarrow$ Q »

Remarque 1.1.9 *:*

Si P est fausse alors l'assertion «$P \Longrightarrow Q$»est toujours vraie.

Exemples 1.1.10 *:*

1 Pour $x \in \mathbb{R}$, « $\left(x^2 = 4\right) \Longrightarrow (x = 2)$ », est **fausse** (car $\sqrt{x^2} = |x|$).*

2 « $-3 \leq x \leq 1 \Longrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0$ », est **vraie** (étudier le sine de polynôme).*

3 « $2 \times 6 = 8 \Longrightarrow 6 - 3 = 2$ », est **vraie** (par la Remarque 1.1.9).*

4 « $\cos\theta > 1 \Longrightarrow \theta \in [0, 2\pi]$ », est **vraie** (par la Remarque 1.1.9).*

Équivalence « $\Longleftrightarrow$ »

Définition 1.1.11 *:*

*Soit P et Q deux propositions. « L'**équivalence** de P et Q »définie par : la proposition « $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$ ». Cette proposition se note « $P \Longleftrightarrow Q$ ». On dira « P est **équivalent** à Q »ou « P si et seulement si Q ».*

Cette proposition est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses.

La table de vérité est :

P	Q	**P $\Longleftrightarrow$ Q**
v	v	**v**
v	f	**f**
f	v	**f**
f	f	**v**

Table de vérité de « P$\Longleftrightarrow$Q »

Remarque 1.1.12 *:*

*d'après cette table de vérité, si P et $P \Longrightarrow Q$ sont vraies alors Q est vraie. C'est le **principe de déduction**.*

Exemples 1.1.13 *:*

*1) Pour $x \in \mathbb{R}$, l'équivalence « $\left(x^2 = 4\right) \Longleftrightarrow (x = 2 \text{ ou } x = -2)$ », est **vraie**.*

*2) Pour $x, y \in \mathbb{R}$, l'équivalence « $x^2 = y^2 \Longleftrightarrow x = y$ », est **fausse**.*

*3) « $(7 \text{ est divisible par } 2) \Longleftrightarrow (7 \text{ est pair })$ », est **vraie**.*

*4) Pour $\theta \in [0, 2\pi]$ l'équivalence « $\cos\theta = 0 \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ », est **fausse**.*

Définition 1.1.14 *:*

*Soit P et Q deux propositions. L'implication « $nonQ \Longrightarrow nonP$ »s'appelle la **contraposée** de l'implication « $P \Longrightarrow Q$ ».*

Définition 1.1.15 *:*

On dit que deux propositions sont équivalentes lorsqu'elles ont les même valeurs de vérité.

Proposition 1.1.16 *:*

Soit P et Q deux propositions. Alors :

a. $\text{non}(\text{non}(P)) \iff P$.

b. $(P \text{ et } Q) \Longleftrightarrow (Q \text{ et } P)$. *Le connecteur « **et** » **commutatif**.*

c. $(P \text{ ou } Q) \Longleftrightarrow (Q \text{ ou } P)$. *Le connecteur « **ou** » **commutatif**.*

d. $((P \text{ et } Q) \text{ et } R) \Longleftrightarrow (P \text{ et } (Q \text{ et } R))$. *Le connecteur « **et** » **associatif**.*

e. $((P \text{ ou } Q) \text{ ou } R) \Longleftrightarrow (P \text{ ou } (Q \text{ ou } R))$. *Le connecteur « **ou** » **associatif**.*

f. $(\text{ non } (P \text{ et } Q)) \Longleftrightarrow ((\text{ non } P) \text{ ou } (\text{ non } Q))$. ***Négation** de « **et** » est « **ou** ».*

g. $(\text{ non } (P \text{ ou } Q)) \Longleftrightarrow ((\text{ non } P) \text{ et } (\text{ non } Q))$. ***Négation** de « **ou** » est « **et** ».*

h. $(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)) \Longleftrightarrow ((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R))$. *« **et** » **distributif** sur « **ou** ».*

i. $(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)) \Longleftrightarrow ((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R))$. *« **ou** » **distributif** sur « **et** ».*

j. $((P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$. ***L'implication** est **transitive***

k. $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\text{ non } Q \Longrightarrow \text{ non } P)$.

Démonstration : On démontre ces équivalences à l'aide de tables de vérité. Voici des exemples de démonstrations :

— Démontrons par exemple l'équivalence de **h.** à l'aide d'une table de vérité.

Il s'agit de vérifier que les deux propositions $(P \wedge (Q \vee R))$ et $((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$ ont les mêmes valeurs de vérité pour toutes les valeurs possibles de P, Q et R.

P	Q	R	Q ∨ R	p ∧ (Q ∨ R)	P ∧ Q	P ∧ R	(P ∧ Q) ∨ (P ∧ R)
v	v	v	v	v	v	v	v
v	v	f	v	v	v	f	v
v	f	v	v	v	f	v	v
v	f	f	f	f	f	f	f
f	v	v	v	f	f	f	f
f	v	f	v	f	f	f	f
f	f	v	v	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

Table de vérité de « $(P \wedge (Q \vee R)) \Longleftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$ ».

On remarque que les colonnes en rouge ont les mêmes valeurs de vérité. Donc, on dit que l'équivalence **h.** est vraie.

Exercice 1.1.17 *:*

Démontrerez le reste de manière analogue à titre d'exercice.

Exercice 1.1.18 *:*

Remplacez dans chaque expression les pointés $\cdots$ par l'un des opérateurs logique suivants : $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ ou $\Longleftrightarrow$.

A, B et C sont trois points du plan. x, y et z sont trois nombres réels.

1. *P : les points A, B et C sont alignés $\cdots$ C le barycentre de A et B.*
2. *Q : $|x| = 2 \cdots x = 2$.*
3. *R : $x = 3 \cdots x^2 = 9$.*
4. *S : $x + z = y + z \cdots x = y$.*
5. *T : $x \times z = y \times z \cdots x = y$.*

1.1.4 Les quantificateurs

Soit $P(x)$ une propriété dépendant d'un paramètre x, où x est un élément d'un ensemble E.

Quantificateur universel : « $\forall$ » := « pour tout »

La proposition : « Pour tous les éléments x de E, la propriété $P(x)$ est vraie » s'écrit en abrégé : « $\forall x \in E,\ P(x)$ » ou « $\forall x \in E\ /\ P(x)$ ».

- Le symbole "$\forall$" (un A retourné) vient de l'allemand "Alle" qui signifie "tous" en français, se lit "quel que soit" ou "pour tous". C'est un quantificateur, il indique que la propriété est vraie pour tous les objets satisfaisants la condition qui suit.
- x est un objet mathématique (un nombre, un point, un vecteur...).
- Le symbole " $\in$ " signifie " **appartient** à ". C'est un opérateur qui permet de dire que x appartient à un ensemble précisé.
- E est un ensemble d'objets. Par exemple le plan qui est un ensemble de points, ou bien l'ensemble $\mathbb{R}$ qui est l'ensemble des nombre réels.

Exemples 1.1.19 *:*

1) *Soient E l'ensemble des étudiants d'un groupe.*
On note $P(x)$: « x est présent »(x est un étudiant).
La proposition Q : « Tous les étudiants de ce groupe sont présents »
s'écrit alors « $\forall x \in E,\ P(x)$ ».

2) *On nomme $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres naturels.*
La proposition R : « Pour tout nombre naturel n, le nombre $(n+1)(n+2)$ est supérieur ou égal à deux »
s'écrit alors « $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)(n+2) \geq 2$ ».

Quantificateur existentiel : « $\exists$ » := « il existe »

La proposition : « il existe au moins un élément x de E, la propriété $P(x)$ est vraie »s'écrit en abrégé : « $\exists x \in E,\ P(x)$ » ou « $\exists x \in E\ /\ P(x)$ ».

- Le symbole " $\exists$ " (un E à l'envers) vient de l'allemand " Existieren " qui signifie " exister " en français, se lit " il existe ".

Exemples 1.1.20 *:*

1). $\mathbb{R}$ *l'ensemble des nombres réels.*

La proposition Q' : « il existe au moins un nombre réel de carrés 1 »

s'écrit alors « $\exists x \in \mathbb{R};\ x^2 = 1$».

2). *f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

La proposition R' : « Le graphe de f coupe la droite d'équation $y - x - 1 = 0$ »

s'écrit alors « $\exists x \in \mathbb{R};\ f(x) = x + 1$ ».

Remarque 1.1.21 *:*

attention*, l'ordre des quantificateurs dans une proposition est très important.*

C'est-à-dire

Si nous modifions l'ordre des quantificateurs dans une proposition, la signification de cette proposition peut changer.

Exemples 1.1.22 *:*

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R};\ y = x^2 + 3$. *Cette proposition est vraie.*
- $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R};\ y = x^2 + 3$. *Cette proposition est fausse.*

La négation des quantificateurs

La négation de « $\forall$ » est « $\exists$ » et la négation de « $\exists$ » est « $\forall$ ».

Négation des propositions avec quantificateurs

Soient E un ensemble, x un élément de E et $P(x)$ une propriété.

* La négation de la proposition « $\forall x \in E;\ P(x)$ » est : « $\exists x \in E,\ non P(x)$ ».

* La négation de la proposition « $\exists x \in E;\ P(x)$ » est : « $\forall x \in E,\ non P(x)$ ».

Exemples 1.1.23 *:*

1 • *La négation de « $\forall x \in [-2, +2];\ (x^2 \leq 4)$ » est « $\exists x \in [-2, +2];\ (x^2 > 4)$ ».*

2 • *La négation de « $\exists z \in \mathbb{C};\ (z^2 + z + 1 = 0)$ » est « $\forall z \in \mathbb{C};\ (z^2 + z + 1 \neq 0)$ ».*

3 • *La négation de « $\forall x \in \mathbb{R};\ (x^2 - 1 \in \mathbb{C})$ » est « $\exists x \in \mathbb{R};\ (x^2 - 1 \notin \mathbb{C})$ ».*

4 • *Pour la proposition : « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y > 0;\ (x \times y > 0)$ » sa négation est*

« $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y > 0;\ (x \times y \leq 0)$ ».

Propriété 1.1.24 *:*

Soient E un ensemble, x élément de E et $P(x),\ Q(x)$ deux propriétés.

1)$*$ $(\forall x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \Longleftrightarrow ((\forall x \in E, P(x)) \wedge (\forall x \in E, Q(x)))$.

2)$*$ $(\forall x \in E, P(x) \vee Q(x)) \overset{\Rightarrow}{\nLeftarrow} ((\forall x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x)))$.

3)$*$ $(\exists x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \overset{\Rightarrow}{\nLeftarrow} ((\exists x \in E, P(x)) \wedge (\exists x \in E, Q(x)))$.

4)$*$ $(\exists x \in E, P(x) \vee Q(x)) \Longleftrightarrow ((\exists x \in E, P(x)) \vee (\exists x \in E, Q(x)))$.

5)$*$ $((\forall x \in E), (\forall y \in E), P(x, y)) \Longleftrightarrow ((\forall y \in E), (\forall x \in E), P(x, y))$.

On peut s'écrire plus simplement $\forall (x, y) \in E^2, P(x, y)$.

6)$*$ $((\exists x \in E), (\exists y \in E), P(x, y)) \Longleftrightarrow ((\exists y \in E), (\exists x \in E), P(x, y))$.

On peut s'écrire plus simplement $\exists (x, y) \in E^2, P(x, y)$.

Remarque 1.1.25 *:*

1$\diamond$ *On peut distribuer « $\forall$ » sur « $\wedge$ » et « $\exists$ » sur « $\vee$ ».*

2$\diamond$ *Mais on ne peut pas distribuer « $\forall$ » sur « $\vee$ » et « $\exists$ » sur « $\wedge$ ».*

3$\diamond$ *On peut permuter des quantificateurs de même nature.*

Dans les propriétés 2)$*$ et 3)$*$, on trouve seulement une implication. Pour le comprendre, on donne les exemples suivants :

1• **a)** La proposition : « Dans la section une, il existe un étudiant qui est le plus grand et un autre qui est le plus petit »est vraie, mais un même étudiant ne peut jouer les deux rôles à la fois.

« il existe un étudiant qui est le plus grand et le plus petit » est fausse.

b) De même, la phrase « Dans l'université, tout étudiant est un neveu bachelier ou non » est vraie, mais la phrase « Dans l'université, tout étudiant est un neveu bachelier ou tout étudiant est un enseigne bachelier » est fausse.

2• On donne ici des exemples plus mathématique : pour cela, on considérons les deux propositions suivantes :

P : « $\exists x \in \mathbb{R};\ cosx = sinx$ et $\exists x \in \mathbb{R};\ sinx = 0$».

Q : « $\exists x \in \mathbb{R};\ cosx = sinx$ et $sinx = 0$».

La proposition : **P** est vraie, car le réel $\frac{\pi}{4}$ est un solution de l'équation $cosx = sinx$ et 0 est un solution de l'équation $sinx = 0$.

La proposition : **Q** est clairement fausse, car par exemple $\forall x \in \mathbb{R}, cos^2 x + sin^2 x = 1 \neq 0$.

3• On donne un autre exemple.

On écrit la proposition : **R** : « qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est monotone » avec des quantificateurs comme suit :

R : « $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2;\ (a < b \Longrightarrow f(a) \leq f(b))\ \vee\ (\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2;\ (a < b \Longrightarrow f(a) \geq f(b))$ ». Mais la phrase suivante : « $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2;\ (a < b \Longrightarrow f(a) \leq f(b) \vee f(a) \geq f(b))$ » elle vérifiée par toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1.2 Méthodes du raisonnement mathématique

1.2.1 Raisonnement par Déduction

La méthode du raisonnement déductif est le suivant :

Si les deux propositions « P » et « $P \Longrightarrow Q$ » sont vraies, alors, on peut affirmer que la proposition Q est vraie.

Exemple 1.2.1 *:*

Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R};\ x^2 - 4x + 5 > 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}(x-2)^2 \geq 0 \ &\Longrightarrow (x-2)^2 + 1 > 0\\ &\Longrightarrow x^2 - 4x + 5 > 0.\end{aligned}$$

Ici P est « $\forall x \in \mathbb{R};\ (x-2)^2 \geq 0$ » et Q est « $\forall x \in \mathbb{R};\ x^2 - 4x + 5 > 0$ ».

Puisque P et $P \Longrightarrow Q$ sont vraies, alors Q est vraie.

1.2.2 Raisonnement par Disjonction de cas (ou Cas par cas)

Soient E un ensemble et A une partie de E.

Si l'on souhaite vérifier l'assertion « $\forall x \in E, P(x)$ », on montre l'assertion pour les x dans A , puis pour les x dans C_E^A (le complément de A par rapport a E).

Exemple 1.2.2 *:*

Montrons que,

$$P:\ \forall n \in \mathbb{N}; \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \in \mathbb{N}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si $n = 3k$ *avec* $k \in \mathbb{N}$ *on a :*

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = k(3k+1)(3k+2) \in \mathbb{N}.$$

Si $n = 3k+1$ *avec* $k \in \mathbb{N}$ *on a :*

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = (3k+1)(3k+2)(k+1) \in \mathbb{N}.$$

Si $n = 3k+2$ *avec* $k \in \mathbb{N}$ *on a :*

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = (3k+2)(k+1)(3k+4) \in \mathbb{N}.$$

Dans les trois cas la propriété $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} \in \mathbb{N}$ *est vrais. Donc, la proposition* P *est vrais.*

1.2.3 Raisonnement par Contraposée

Le schéma est le suivant :

Pour montrer que « $P \Longrightarrow Q$ » est une proposition vraie, il (faut et) il suffit de montrer que « $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$ » est une proposition vraie.

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante : L'assertion « $P \Longrightarrow Q$ » est équivalente à « $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$ ».

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion « $P \Longrightarrow Q$ », on montre en fait que si $\overline{Q}$ est vraie alors $\overline{P}$ est vraie.

Exemple 1.2.3 *Montrons que,*

$$\forall n \in \mathbb{N}; \Big(n^2 \text{ multiple de } 3 \Longrightarrow n \text{ multiple de } 3\Big).$$

On utilisons le raisonnement par contraposition. Pour cela, montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}; \Big(n \text{ n'est pas multiple de } 3 \Longrightarrow n^2 \text{ n'est pas multiple de } 3\Big).$$

Supposons que, n un entier naturel n'est pas multiple de 3, il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que soit $n = 3k+1$ ou soit $n = 3k+2$.
Si $n = 3k+1$, on a :

$$\begin{aligned} n^2 &= (3k+1)^2 \\ &= 3\left(3k^2+2k\right)+1 \\ &= 3k'+1 \text{ avec } \ k' = 3k^2+2k. \end{aligned}$$

Si $n = 3k+2$, on a :

$$\begin{aligned} n^2 &= (3k+2)^2 \\ &= 3\left(3k^2+4k+1\right)+1 \\ &= 3k''+1 \text{ avec } \ k'' = 3k^2+4k+1. \end{aligned}$$

On a alors dans les deux cas, le nombre n^2 est n'est pas multiple de 3. C.Q.F.D.

1.2.4 Raisonnement par Absurde

Le raisonnement par l'absurde repose sur le principe suivant :
On veut montrer qu'une proposition P est vraie. On suppose que c'est sa négation P qui est vraie et on montre que cela entraîne une proposition fausse i.e une contradiction.

Exemple 1.2.4 *:*
Montrons que, $\sqrt{3}$ est irrationnel i.e $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Définition 1.2.5 *:*
Nombres premiers entre eux :
Soit p et q deux entiers naturels non nuls.
On dit que p et q sont premiers entre eux, si et seulement si le plus grand commun diviseur de p et q est égal à 1 ($PGCD(p,q) = 1$).

Définition 1.2.6 *:*
Nombre rationnel : *On dit que r est un nombre rationnel si et seulement s'il existe un couple $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$. c'est-à-dire*

$$(r \in \mathbb{Q}) \Longleftrightarrow \left(\exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \ / \ r = \frac{p}{q}\right).$$

DÉMONSTRATION de $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$
Supposons que $\sqrt{3}$ soit un nombre rationnel i.e $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Il existe $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$ avec p, q premiers entre eux.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{3} = \frac{p}{q}\right) &\iff \left(3 = \frac{p^2}{q^2}\right) \\ &\iff p^2 = 3q^2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

D'où p^2 multiple de 3. D'après l'**exemple** 1.2.3, on en deduit que p est multiple de 3. Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 3k$. D'après (1.1), on obtient $q^2 = 3k^2$, ce qui implique aussi que q est multiple de 3. ce qui signifie que 3 est un diviseur comun à p et q. ce qu'est contraduction à l'hypothèse « p, q premiers entre eux ».

1.2.5 Raisonnement par Contre-exemple

Un raisonnement par contre-exemple sert à démontrer qu'une proposition quantifiée de la forme « $\forall x \in E;\ P(x)$ » est fausse. Pour cela, on démontre que sa négation est vraie.
Ainsi, pour montrer que « $\forall x \in E;\ P(x)$ » est une proposition fausse, la méthode consiste de trouver un élément x de E ne vérifiant pas $P(x)$.

Exemple 1.2.7 *:*
Montrons que, l'assertion « toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est derivable sur $\mathbb{R}$ » est fausse.
Cette assertion est fausse, puisqu'on peut trouver une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas derivable sur $\mathbb{R}$, comme par exemple : la fonction $f : x \longmapsto \left|x^2 - 1\right|$ n'est pas derivable en 1 et -1.

1.2.6 Raisonnement par Récurrence

Soient $\mathbb{A}$ une partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément n_0, et $P(n)$ une propriété dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Pour démontrer qu'une proposition de forme « $\forall n \in \mathbb{A};\ P(n)$ » est vraie, on peut utiliser un raisonnement par récurrence.
Principe de récurrence.
La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes :

1)• **Initialisation :** Vérifier que la propriété $P(n_0)$ est vraie,

2)• **Hérédité :** On suppose $n > n_0$ donné avec $P(n)$ vraie, et on démontre alors que la propriété $P(n+1)$ est vraie, 3)• **Conclusion :** Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{A}$.

Exemple 1.2.8 *:*

Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; (1+2+3+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3.$$

Soit $P(n) : (1+2+3+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3.$

1) Car $1^2 = 1^3$, $P(1)$ *est vraie,*

2) On suppose $P(n)$ *vraie pour* $n > 1$ *donné, et on démontre que la propriété* $P(n+1)$ *est vraie, c'est-à-dire on montre que*

$$P(n+1) : (1+2+3+\cdots+n+(n+1))^2 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3$$

est vraie.

On sait que $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ *(La somme des termes consécutifs d'une suite arthemitique de raison 1)*

Partons du terme de gouche pour arriver au terme adroite

$$\begin{aligned}(1+2+3+\cdots+n+(n+1))^2 &= \left(\tfrac{n(n+1)}{2}+(n+1)\right)^2\\ &= \left(\tfrac{n(n+1)}{2}\right)^2+n(n+1)^2+(n+1)^2\\ &= \underbrace{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}_{(*)}+(n+1)^3,\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$(1+2+3+\cdots+n+(n+1))^2 = \underbrace{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}_{(*)}+(n+1)^3.$$

Nous avons ainssi montré que l'implication $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ *était vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *Alors, l'égalité est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

1.2.7 Récurrence forte (ou récurrence multiple)

Soient r un entier naturel non nul et $P(n)$ une propriété définie pour tout entier naturel $n \geq n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.

Si les propriétés $P(n_0), P(n_0+1), \cdots, P(n_0+r-2)$ et $P(n_0+r-1)$ sont vraies, et l'implication

$$(P(n) \ et \ P(n+1) \ et \ \ldots\ldots \ et \ P(n+r-1)) \Longrightarrow P(n+r)$$

est vraie, alors, pour tout entier $n > n_0$ la propriété $P(n)$ est vraie.

Exemple 1.2.9 *:*
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et vérifiant la reltion de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n. \tag{1.2}$$

Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_n = 2^n + 1.$$

Soit $P(n)$ la propriété $u_n = 2^n + 1$.
On a $u_0 = 2^0 + 1 = 2$ et $u_1 = 2^1 + 1 = 3$, donc les propriétés $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
Montrons maintenant que $\forall n \in \mathbb{N}; ((P(n) \ et \ P(n+1)\ ) \Longrightarrow P(n+2))$ est vraie.
Supposons que pour $n \geq 2$ fixie les propriétés $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies, puis montrons que la propriété $P(n+2)$ est vraie.
En remplaçant u_n par $2^n + 1$ et u_{n+1} par $2^{n+1} + 1$ dans l'égalité (1.2), on trouve

$$\begin{aligned} u_{n+2} \quad &= 3\left(2^n + 1 - 2\left(2^{n+1} + 1\right)\right) \\ &= 2^{n+2} + 1. \end{aligned}$$

Donc $P(n+2)$ est vraie.
Par le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = 2^n + 1$ est vraie.

1.3 Exercices

- **Raisonnement par déduction**

Exercice 1.3.1 *:*
Soient a, b deux nombres réelles positifs.
Montrer que si $a \leq b$ alors, $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ et $a \leq \sqrt{ab} \leq b$.

Exercice 1.3.2 *:*

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$, *Montrer que : si* $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x}$, *alors* $x = y$.

- **Raisonnement par disjonction de cas**

Exercice 1.3.3 *:*

Soit $x \in \mathbb{R}$, *Montrer que :* $x^2 - 4 > 0 \Longrightarrow x^2 - x - 2 > 0$.

- **Raisonnement par récurrence et par Contraposée**

Exercice 1.3.4 *:*

1) Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}; 4n^2 + 4n \text{ est divisible par } 8.$$

2) Soient n *un entier naturel non nul et* $R(n)$ *la propriété suivante :*

$$R(n) \text{ : Si le nombre } n^2 - 1 \text{ n'est pas divisible par } 8, \text{ alors } n \text{ est pair.}$$

a • Ecrire la contraposée de la propriété $R(n)$.

b • Ecrire à l'aide de quantificateurs la proposition Q *suivante : « Pour tout* n *dans* $\mathbb{N}$ *;* $R(n)$ *».*

c • Montrer par contraposition que la proposition Q *est vraie.*

Exercice 1.3.5 *:*

1 Montrer par l'absurde que :* $\forall x \in \mathbb{R};\ |x| \geq \frac{|x|}{\alpha}$. *Avec* $\alpha \geq 1$ *fixé.*

2 Montrer par contraposition que :*

$$\forall x \in \mathbb{R};\ \left((\forall \varepsilon > 0,\ |x| < \varepsilon) \Longrightarrow |x| = 0\right).$$

- **Raisonnement par Absurde**

Exercice 1.3.6 *:*

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'applications de l'ensemble* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}^*$ *et* f *l'application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}^*$ *définie par* $f(n) = (f_n(n))^2 - 1$.

a) Traduire en termes de quantificateurs l'expression P *suivante :*

P : « n'existe aucun $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$ ».

b) Donner la négation de P.

c) Montrer par l'absurde que P elle est vraie.

Exercice 1.3.7 *:*

a.) *Traduire en termes de quantificateurs l'expression Q suivante :*

Q : « Si n est le carré d'un nombre entier non nul alors $2n$ n'est pas le carré d'un nombre entier ».

b.) *Donner la négation de Q.*

c.) *Montrer par l'absurde que la proposition Q précédente est vraie.*

- **Raisonnement par récurrence et par contre-exemple**

Exercice 1.3.8 *:*

Une urne contient des boules numérotées de 1 à n, réparties de la façon suivante : pour tout entier k, compris entre 1 et n, l'urne contient k boules portant le numéro k.

On tire au hasard une boule dans l'urne et on note X le numéro obtenu.

1/ Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, le nombre des boules dans cette urne est $\frac{n(n+1)}{2}$.

2/ Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, la somme de ces numéros dans cette urne est $\frac{n(n+1)(2n+1}{6}$.

3/ Montrer par contre-exemple que la proposition R suivante :

R : si n est pair, alors $P(X$ est pair$) = \frac{(n)}{(n+1)}$ est fausse.

- **Raisonnement par récurrence**

Exercice 1.3.9 *:*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N};\ u_n + 2 = u_{n+1} + u_n$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N};\ u_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)$

Exercice 1.3.10 *:* *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N};\ 2^n \geq n+1$.*

Exercice 1.3.11 *:*

Montrer que pour tout entier naturel n non nul ; $(1+x)^n \geq 1+nx$, avec $x \geq 0$ fixé.

Exercice 1.3.12 *:* *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N};\ 10^n - (-1)^n$ est divisible par 11 .*

Chapitre 2

Les ensembles, les relations et les applications

2.1 Ensembles

Définition 2.1.1 *:*

Un ensemble est une collection d'éléments (d'objets), et on le note en général par un lettre majuscule, comme par exemple : A, B, C, D, E,...

Exemples 2.1.2 *:*

$A = \{a, b, c\}$, $B = \{Ahmed, Mohammed, Ali, Fatima, Halima\}$, $C = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$.

• Soit E un ensemble. On appelle cardinal de E le nombre des éléments de E, et on le note $card(E)$.

Exemples 2.1.3 *:*

Soient $E = \{\{0\}, \{0,1\}, \{1\}\}$, $F = \{n \in \mathbb{N};\ 1 \leq 2n < 11\}$, $G = \{x \in \mathbb{Z},\ 3x - 1 < 0\}$.

Alors, $card(E) = 3$, $card(F) = 5$, $card(G) = \infty$.

• Si on a donné explicitement tous les éléments de l'ensemble (ou bien en se donnant la liste de tous les éléments de l'ensemble), on dit alors que l'ensemble est donné par « Extension ».

• Si on a donné des propriétés qui nous permettent de retrouver tous les éléments de l'ensemble, on a alors de définir l'ensemble par « Compréhension ».

Exemples 2.1.4 *:*

$*$ *Les ensembles donnés dans 2.1.2 sont définis par extension (leurs éléments).*

$*$ *Soit* $D = \left\{x \in \mathbb{R};\ x^2 - 1 \leq 0\right\}$. *D est défini par compréhension.*

Remarque 2.1.5 :

• *l'ordre des éléments d'un ensemble n'a aucune importance, comme exemple :*

$\{1,3,2\} = \{2,3,1\} = \{1,2,3\}$.

• *la répétition d'un même élément dans un ensemble ne sert à rien.*

Définition 2.1.6 :

Ensemble vide : *C'est l'ensemble qui ne contient aucun élément. Il se note ϕ , ou $\{\}$.*

Singletons : *C'est l'ensemble qui contient un et un seul élément. Comme par exemple :*

$\{a\}$, $\{0\}$, $\{\phi\}$.

2.1.1 Appartenance

Si un objet x est un élément de E, on dit que x appartient à E et on écrit $x \in E$.

Si x n'est pas un élément de E, on écrit $x \notin E$.

2.1.2 Parties d'un ensemble (ou L'inclusion)

Définition 2.1.7 :

On dit qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F, (ou E est une partie de l'ensemble F, ou aussi E est un sous ensemble de F), si chaque élément de E est aussi un élément de F et on écrit $E \subset F$, et on a formellement :

$$E \subset F \iff \text{pour tout} \quad x \quad (x \in E \Longrightarrow x \in F).$$

2.1.3 Égalité de deux ensembles :

Deux ensembles sont égaux si et seulement si chacun est inclu dans l'autre, c'est à dire :

$$\begin{aligned}(E = F) &\iff (E \subset F \quad \text{et} \quad F \subset E)\\ &\iff (\text{ pour tout} \quad x \quad (x \in E \iff x \in F))\end{aligned}$$

Exemple 2.1.8 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la droite (Δ) d'équation $x + y = 1$ et l'ensemble $E = \left\{M(x,y) / \exists t \in \mathbb{R}; x = \frac{1}{1+2t^2} \wedge y = \frac{2t^2}{1+2t^2}\right\}$.

On peut écrire plus simplement $E = \left\{ \left(\frac{2}{1+2t^2}, \frac{2t^2}{1+2t^2} \right) ; t \in \mathbb{R} \right\}$.
Montrons que $E \subset (\Delta)$.

$$\begin{aligned} M(x,y) \in E &\iff \exists t \in \mathbb{R} / x = \frac{1}{1+2t^2} \wedge y = \frac{2t^2}{1+2t^2} \\ &\Longrightarrow x + y = 1 \\ &\iff M(x,y) \in (\Delta). \end{aligned}$$

Mais (Δ) *n'est pas une partie de* E*. Car* $M(-2,1) \in (\Delta)$ *et* $M(-2,1) \notin E$*.*

2.1.4 Ensemble des parties

L'ensemble des parties d'un ensemble E est l'ensemble de toutes les sous ensemble (ou les parties) de E, et on le note $\mathcal{P}(E)$.
Par **exemple** si $E = \{0, 1, 2\}$ alors :

$$\mathcal{P}(E) = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}.$$

Remarque 2.1.9 *:*
- *Card* $\mathcal{P}(E) = 2^{card(E)}$.
- *Soit* A *un ensemble, alors l'ensemble* $\mathcal{P}(E)$ *contient au moins* E *et l'ensemble vide.*

Méthode :
Soient A et B deux parties de E.
Pour montrer que $A = B$,
$*$) on montre que $\forall x \in E, (x \in A \iff x \in B)$,
$*$) ou bien, on se partage le travail en deux étapes en montrant que $A \subset B$ et $B \subset A$, c'est-à-dire en montrant que $\forall x \in E, (x \in A \Longrightarrow x \in B)$ et $\forall x \in E, (x \in B \Longrightarrow x \in A)$.

Propriétés 2.1.10 *(Propriétés usuelles de l'inclusion).*
Soit E *un ensemble.*
★ $\forall A \in \mathcal{P}(E);\ A \subset A$ *(l'inclusion est réflexive).*
★ $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$ *; (* $A \subset B$ *et* $B \subset A) \Longrightarrow\ A = B$ *(l'inclusion est anti-symétrique).*
★ $\forall A, B$ *et* $C \in \mathcal{P}(E)$ *; (* $A \subset B$ *et* $B \subset C) \Longrightarrow\ A \subset C$ *(l'inclusion est transitive).*

2.1.5 Complémentaire

Définition 2.1.11 :

Soit E un ensemble et A une partie de E. L'ensemble complémentaire de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A. Et on le note $C_E A$, (ou $E \setminus A$). s'il n'y a pas d'ambiguïté sur E on le note aussi A^c ou $\bar{A}$.

Formellement on a :

$$C_E A = \{x \in E \ / \ x \notin A\}.$$

2.1.6 Réunion et intersection de deux ensembles

Définition 2.1.12 :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

On appelle réunion de A et de B, l'ensemble des éléments de E qui sont dans A ou dans B, et est noté $A \cap B$ c'est-à-dire $A \cup B = \{x \in E; \ x \in A \ \vee \ x \in B\}$.

L'intersection de A et B, est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A et dans B, et est noté $A \cap B$, c'est-à-dire $A \cap B = \{x \in E; \ x \in A \ \wedge \ x \in B\}$.

Exemple 2.1.13 :

Soient $E = \{a, b, c, x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, 0, 1, 2, 3\}$, $A = \{a, c, 1, \alpha, \beta, 2\}$

et $B = \{\gamma, \alpha, 3, a, \lambda, 0, z\}$, alors :

$A \cap B = \{a, \alpha\}$, $A \cup B = \{a, c, 1, \alpha, \beta, 2, \gamma, 3, \lambda, 0, z\}$,

$C_E A = \{b, x, t, z, \gamma, \lambda, 0, 3\}$ *et* $C_E B = \{b, c, x, t, \beta, 1, 2\}$.

Propriétés 2.1.14 :

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E.

$$\begin{array}{lll}
A \cap B = B \cap A. & A \cup B = B \cup A. & (\cap \ \textit{et} \ \cup \text{sont commutatives.}) \\
(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C). & (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C). & (\cap \ \textit{et} \ \cup \text{sont associatives.}) \\
(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). & (\cup \ \text{est distributive par rapport} \ \cap.) & \\
(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C). & (\cap \ \text{est distributive par rapport} \ \cup.) & \\
A \cap \phi = \phi \ \ \text{et} \ \ A \cap E = A. & A \cup \phi = A \ \ \text{et} \ \ A \cup E = E. & \\
A \cap C_E A = \phi \ \ \text{et} \ \ A \cup C_E A = E & (A \subset B) \Longleftrightarrow (C_E B \ \subset \ C_E A) \ \ \text{et} \ \ C_E(C_E A) = A. & \\
C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B. & C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B. &
\end{array} \tag{2.1}$$

Les propriétés (commutativité, associativité et distributivité) seront étudiées dans le chapitre sur les lois de composition internes.

2.1.7 Différence de deux ensembles

Définition 2.1.15 *:*

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

On appelle différence de A et B, l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A et n'appartiennent pas à B, et est noté $A - B$ (ou $A \backslash B$), on lit A moins B.

Formellement, on a : $A - B = A \cap C_E B = \{x \in E;\ x \in A \wedge x \notin B\}$.

2.1.8 Différence symétrique de deux ensembles

Définition 2.1.16 *:*

La différence symétrique de A et de B, l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A et n'appartiennent pas à B ou appartiennent à B et n'appartiennent pas à A, et est noté $A\Delta B$.

Formellement, on a :

$A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) = \{x \in E;\ (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$.

Remarque 2.1.17 *:*

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

$$A\Delta B = (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Exemple 2.1.18 *:*

Soit $A = \{x \in \mathbb{Z};\ |x| \leq 2\}$ et $B = \{x \in \mathbb{Z};\ 0 \leq 3x \leq 10\}$. On a :

$$\begin{aligned} A\backslash B &= \{x \in \mathbb{Z};\ x \in A \wedge x \notin B\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z};\ |x| \leq 2 \wedge (3x < 0 \vee 3x > 10)\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z};\ x \in \{-2,-1,0,1,2\} \wedge (x < 0 \vee x > 3)\} \\ &= \{-2,-1\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\Delta B &= \{x \in \mathbb{Z};\ (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z};\ (|x| \leq 2 \wedge (3x < 0 \vee 3x > 10)) \vee (0 \leq 3x \leq 10 \wedge |x| > 2)\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z};\ x \in \{-2,-1,0,1,2\} \wedge (x < 0 \vee x > 3) \vee (x \in \{0,1,2,3\} \wedge (x < -2 \vee x > 2))\} \\ &= \{-2,-1,3\}. \end{aligned}$$

2.1.9 Partition d'un ensemble

Définition 2.1.19 :

Soit E un ensemble non vide, et F une famille de $\mathcal{P}(E)$ $(F \subset \mathcal{P}(E)$ $)$.

On dit que F est une partition de E si les conditions suivantes sont véerifiées :

1) tout élément de F est non vide. C'est-à-dire $\forall A \in F; A \neq \phi$.

2) F est un recouvrement de E. C'est-à-dire $\bigcup\limits_{A \in F} A = E$.

3) Les éléments de la famille F sont disjoints deux à deux. C'est-à-dire $\forall A, B \in F, A \cap B = \phi$.

Exemple 2.1.20 :

Soient $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty, 1[$, $B = [1, 7]$ et $C =]7, +\infty[$. Alors, les sous-ensembles A, B et C forment une partition de $\mathbb{R}$.

2.1.10 Produit cartésien

Définition 2.1.21 :

*Soient E et F deux ensembles, le **produit cartésien** de E et F est l'ensemble des couples ordonnés (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$, noté $E \times F$. C'est-à-dire :*

$$E \times F = \{(x, y) \ / \ x \in E \wedge y \in F\}.$$

Plus généralement, on définit le produit cartésien de n ensembles $E_1, E_2, \cdots, E_n$ par :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n} E_i &= E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \\ &= \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \ / \ x_1 \in E_1 \wedge x_2 \in E_2 \wedge \cdots \wedge x_n \in E_n\} \\ &= \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \ / \ \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\} ; \ x_i \in E_i\} . \end{aligned}$$

Si les ensembles $E_i, \ i = 1, 2, \cdots, n$ sont égaux à E, on note $\prod\limits_{i=1}^{n} E_i = E^n$.

Exemples 2.1.22 :

1) • Si $A = \{1, 2, 5\}$ et $B = \{a, b\}$, alors le produit cartésien de A et B est l'ensemble

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (5, a), (5, b)\} .$$

2) • Si $A = [1, 5]$ et $B =]-2, 3]$, alors l'ensemble $A \times B = \{(x, y); \ 1 \leq x \leq 5 \ \wedge \ -2 < y \leq 3\}$, est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ qui est représenté par un rectangle.

Remarques 2.1.23 :

• *Soient E et F deux ensembles finis. On a $Card(E \times F) = CardE \times CardF$.*

• *Il exsiste deux ensembles A et B tel que $A \times B \neq B \times A$.*

C'est-à-dire (le produit cartésien n'est pas comitative).

• *Soient A et B deux ensembles,*

$(A \times B = B \times A)$ *si et seulement si* $(A = B)$.

$(A \times B = \phi)$ *si et seulement si* $(A = \phi \vee B = \phi)$.

Proposition 2.1.24 :

Soient E et F deux ensembles, $(A, C) \in (\mathcal{P}(E))^2$ *et* $(B, D) \in (\mathcal{P}(F))^2$.

1 • $(A \subset E$ *et* $B \subset F)$ *si et seulement si* $(A \times B \subset E \times F)$.

2 • $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

3 • $(A \times C) \cup (A \times D) = A \times (C \cup D)$.

4 • $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$.

Preuve :

♢ Montrons la première proppriété.

<u>Premièrement</u>, on suppose que $(A \subset E$ et $B \subset F)$ et on montre que $(A \times B \subset E \times F)$.

Soit $(x, y) \in A \times B$,

$$\begin{aligned}(x, y) \in A \times B &\iff x \in A \;\text{ et }\; y \in B \;\; (\textit{ par définition}) \\ &\implies x \in E \;\text{ et }\; y \in F \;\; (\textit{ d'après la proposition }) \\ &\iff (x, y) \in E \times F \;\; (\textit{ par définition }).\end{aligned}$$

Ce qui est montre que si $(A \subset E$ et $B \subset F)$ alors $(A \times B \subset E \times F)$.

<u>Deuxièment</u>, on supose que $(A \times B \subset E \times F)$ et on montre que $(A \subset E$ et $B \subset F)$.

Soient $x \in A$ et $y \in B$,

$$\begin{aligned}x \in A \;\text{ et }\; y \in B &\iff (x, y) \in A \times B \;\; (\textit{ par définition }) \\ &\implies (x, y) \in E \times F \;\; (\textit{ d'après la proposition }) \\ &\iff x \in E \;\text{ et }\; y \in F \;\; (\textit{ par définition }).\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

◇ Montrons maintenant la deuxième proppriété,

$$\begin{aligned}(A\times C)\cap(B\times D) &= \{(x,y):(x,y)\in A\times C \ \text{ et } \ (x,y)\in B\times D\}\\ &= \{(x,y):(x\in A \ \text{ et } \ y\in C) \ \text{ et } \ (x\in B \ \text{ et } \ y\in D)\}\\ &= \{(x,y):(x\in A \ \text{ et } \ x\in B) \ \text{ et } \ (y\in C \ \text{ et } \ y\in D)\}\\ &= \{(x,y):(x\in A\cap B) \ \text{ et } \ (y\in C\cap D)\}\\ &= \{(x,y):(x,y)\in (A\cap B)\times(C\cap D)\}\\ &= (A\cap B)\times(C\cap D).\end{aligned}$$

◇ Les deux derniers se traitent de la même façon. ■

2.2 Relations binaires

Maintenant que nous avons « étudié » la notion d'ensemble, nous allons nous occuper des relations pouvant exister entre les éléments de deux ensembles.

Définition 2.2.1 *(**Relation binaire**) :*

Soient E, F deux ensembles non vides.

Une relation binaire $\mathcal{R}$ de E vers F est un triplet $(E,\ F,\ \Omega\ )$ où Ω est une partie de $E\times F$.

Si le couple $(x,y)\in\Omega$ on dit que x est en relation avec y par $\mathcal{R}$ et on note $x\mathcal{R}y$.

*E s'appelle l'**ensemble de départ** de $\mathcal{R}$, F l'**ensemble d'arrivée** de $\mathcal{R}$ et Ω le **graphe** de la relation $\mathcal{R}$.*

Quand $F=E$, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E.

Exemples 2.2.2 *:*

1. *Considérons $E=\{2,3,4\}$, $F=\{3,6,7\}$ et $\Omega=\{(2,6),(3,3),(3,6)\}$.*

Lorsque $\Omega\subset E\times F$, donc le triplet (E,F,Ω) définit une relation $\mathcal{R}$ comme suit :

$2\ \mathcal{R}\ 6$, $3\ \mathcal{R}\ 6$ *et* $3\ \mathcal{R}\ 3$. *On remarque ici que $\mathcal{R}$ est la relation « divise » de E vers F.*

C'est-à-dire la relation « divise » est une relation binaire de E vers F.

2. *L'inclusion ($\subset$) est une relation binaire de $\mathcal{P}(E)$ vers $\mathcal{P}(E)$.*

3. *La relation inférieur ou égal ($\leq$) est une relation binaire sur $\mathbb{R}$.*

4. *La relation parallèle ($\backslash\backslash$) est une relation binaire dans l'ensemble E des droites affines du plan.*

Définition 2.2.3 *:*

Soient $\mathcal{R}$ une relation binaire sur l'ensemble non vide E.

- ($\mathcal{R}$ est réflexive) *si et seulement si* $(\forall x \in E, x \mathcal{R} x)$.
- ($\mathcal{R}$ est symétrique) *si et seulement si* $\Big(\forall (x,y) \in E^2,\ (x \mathcal{R} y \Longrightarrow y \mathcal{R} x)\Big)$.
- ($\mathcal{R}$ est anti-symétrique) *si et seulement si* $\Big(\forall (x,y) \in E^2,\ (x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x \ \Longrightarrow\ x = y)\Big)$.
- ($\mathcal{R}$ est transitive) *si et seulement si* $\Big(\forall (x,y,z) \in E^3,\ (x \mathcal{R} y\ \wedge\ y \mathcal{R} z \Longrightarrow\ x \mathcal{R} z)\Big)$.

Exemples 2.2.4 *:*

1) *La relation « divise » sur* $E = \{0,1,2,3,4,5,7,8\}$ *est anti-symétrique et transitive.*

2) *La relation « $\subset$ » est réflexive, anti-symétrique et transitive sur* $\mathcal{P}(E)$.

3) *La relation « $\leq$ » est réflexive, anti-symétrique et transitive sur* $\mathbb{R}$.

4) *La relation parallèle (\\\\ ) est réflexive, symétrique et transitive sur l'ensemble E des droites affines du plan.*

5) *La relation perpendiculaire « $\perp$ » sur l'ensemble E des droites affines du plan est symétrique mais (la anti-symétrie, la réflexivité et la transitivité ne sont pas vérifiées).*

2.2.1 Relations d'équivalence

Définition 2.2.5 *:*

Soient $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble non vide E.

On dit $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E si et seulement si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.

Exemples 2.2.6 *:*

1) *La relation « né en même mois » sur E l'ensemble du personnes est une relation d'équivalence.*

2) *La relation parallèle (\\\\ ) est une relation d'équivalence sur l'ensemble E des droites affines du plan.*

3) *La relation $\mathcal{R}$ définie par :* $\forall (x,y) \in \mathbb{Z};\ x \mathcal{R} y \iff \exists k \in \mathbb{Z}\ /\ x - y = 3k$, *est une relation d'équivalence sur* $\mathbb{Z}$.

Car, • *pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $x - x = 0 = 3 \times 0$, ce qui montre que $\exists k \in \mathbb{Z}\ /\ x - x = 3k$. Donc, $\forall x \in \mathbb{Z};\ x \mathcal{R} x$ est vraie. Ceci montre que la relation $\mathcal{R}$ est réflexive.*

• *Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x \mathcal{R} y$. C'est-à-dire $\exists k \in \mathbb{Z};\ x - y = 3k$.*

Mais, on a $x - y = 3k \iff y - x = 3(-k)$. Ce qui montre que $\exists k' \in \mathbb{Z};\ y - x = 3k'$, alors $y \mathcal{R} x$.

Donc, $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2;\ x\ \mathcal{R}\ y \implies y\ \mathcal{R}\ x$ *est vraie. Ceci montre que la relation* $\mathcal{R}$ *est symétrique.*

• *Soit* $(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$ *tel que* $x\ \mathcal{R}\ y$ *et* $y\ \mathcal{R}\ z$*. Il existe un entier relatif* k *tel que* $x - y = 3k$ *et un entier relatif* k' *tel que* $y - z = 3k'$*. On a donc*

$$(\exists k, k' \in \mathbb{Z};\ x - y = 3k \text{ et } y - z = 3k') \implies \exists k, k' \in \mathbb{Z};\ x - z = 3(k + k').$$

C'est-à-dire $\exists k'' \in \mathbb{Z}\ / x - z = 3k''$*, ce qui implique que* $x\ \mathcal{R}\ z$*. Ainssi* $\forall (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3;\ x\ \mathcal{R}\ y$ *et* $y\ \mathcal{R}\ z \implies x\ \mathcal{R}\ z$*. Ceci montre que* $\mathcal{R}$ *est transitive.*

4) la relation « multipte », n'est pas une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$*. Car, la symétrie n'est pas vérifiée.*

2.2.2 Classes d'équivalence

Définition 2.2.7 *:*

Soient $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence sur un ensemble* E *non vide et* $a \in E$*.*

On appelle classe d'équivalence de l'élément « a » l'ensemble des éléments de E *qui sont en relation avec* a *par* $\mathcal{R}$*, notée* $Cl(a)$ *(ou* $\dot{a}$*).*

Formellement, on a : $Cl(a) = \{x \in E;\ x\mathcal{R}a\}$*.*

Exemple 2.2.8 *:*

Soit $\mathcal{R}$ *la relation d'équivalence qui définie dans les* ***exemples 2.2.6****.*

$$\bigstar\ Cl(0) = \{x \in \mathbb{Z};\ x\mathcal{R}0\} = \{x \in \mathbb{Z};\ x - 0 = 3k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\} = \{\cdots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \cdots\}.$$

$$\bigstar\ \dot{1} = \{x \in \mathbb{Z};\ x\mathcal{R}1\} = \{x \in \mathbb{Z};\ x - 1 = 3k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z};\ x = 3k + 1 \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\} = \{\cdots, -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \cdots\}.$$

$$\begin{aligned} \bigstar\ \dot{2} &= \{x \in \mathbb{Z};\ x\mathcal{R}2\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z};\ x-2 = 3k \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z};\ x = 3k+2 \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\cdots, -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, \cdots\}. \end{aligned}$$

Propriétés 2.2.9 *:*

Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.

On a les propriétés suivantes :

1. $\forall (x,y) \in E^2; x \in cl(y) \Longleftrightarrow cl(x) = cl(y) \Longleftrightarrow x\mathcal{R}y$

2. *Pour tout* $(x,y) \in E^2$, *soit* $cl(x) = cl(y)$ *soit* $cl(x) \cap cl(y) = \phi$.

3. *l'ensemble de toutes les classes d'équivalence constitue une partition de E.*

Exemple 2.2.10 *:*

Dans l'exemple précident, on a :

■ $\dot{5} = \dot{2}$ *car*

$$\begin{aligned} \dot{5} &= \{x \in \mathbb{Z};\ x\mathcal{R}5\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z};\ x = 3k+5 \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z};\ x = 3k'+2 \quad \text{avec} \quad k' = k+1 \in \mathbb{Z}\} \\ &= \dot{2}. \end{aligned}$$

• On remarque que l'ensemble $\left\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}\right\}$ de toutes les classes d'équivalence de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Z}$ qui définie dans les **exemples 2.2.6**, constitue une partition de $\mathbb{Z}$.

2.2.3 Ensemble quotient $E/\mathcal{R}$

Définition 2.2.11 *:*

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans un ensemble E.

On appelle ensemble quotient de E par la relation $\mathcal{R}$, l'ensemble de toutes les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$ sur E, noté $E/\mathcal{R}$.

Formalement on a : $E/\mathcal{R} = \{\dot{x};\ x \in E\}$.

Exemple 2.2.12 *:*

Soient n un entier non nul et a, b deux éléments de $\mathbb{Z}$.

a congru à b modulo n, et on note $a \equiv b\,[n]$ si est seulement si $\exists k \in \mathbb{Z}\ /\ a-b = kn$. C'est-à-dire n

divise $a-b$ dans $\mathbb{Z}$. L'ensemble quotion de $\mathbb{Z}$ par la relation de congruence modulo n, noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \cdots, n \dot{-} 1\right\}$.

2.2.4 Relations d'ordre

Définition 2.2.13 :

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire dans un ensemble non vide E.

On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre dans E si et seulement si $\mathcal{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive.

2.2.5 Ordre Total et Ordre Parliel

Définition 2.2.14 :

Soient E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E. On dit que :

- *$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total sur E si et seulement si pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $x\ \mathcal{R}\ y$ ou $y\ \mathcal{R}\ x$.*
- *$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel sur E si et seulement si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre n'est pas totale. C'est-à-dire il existe ou moins deux éléments x, y dans E tel que, x n'est pas en relation avec y par $\mathcal{R}$ et y n'est pas en relation avec x par $\mathcal{R}$.*

Exemples 2.2.15 :

- *La relation $\geq$ est une relation d'ordre total sur n'import quel sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.*
- *La relation divis (/) qui définie par : $\forall (x, y) \in {\mathbb{N}^*}^2$; $x\ \mathcal{R}\ y \iff \exists k \in \mathbb{N}^*;\ x = ky$. est une relation d'ordre parliel sur $\mathbb{N}^*$. Car (2 ne divise pas 3) et (3 ne divise pas 2).*
- *La relation divis (/) n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}^*$. Car, sur $\mathbb{Z}^*$, $(a/b$ et $b/a)$ entrainent $(a = b$ ou $a = -b)$ et donc la relation (/) n'est pas anti-symétrique dans $\mathbb{Z}^*$.*
- *La relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ avec E non vide par :*
  $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ A\ \mathcal{R}\ B \iff CardA \geq CardB$, n'est pas une relation d'ordre : Car elle n'est pas antisymétrique. Parce que il existe deux ensembles dans $\mathcal{P}(E)$ tels que $CardA \geq CardB$ et $CardB \geq CardA$ mais $A \neq B$.

2.3 Exercices

Exercice 2.3.1 *:*

1) Soit $A = \{a, b\}$*. Donner tous les sous-ensembles de* A^2*.*

2) On considère les ensembles $E = \{1, 2, 3, 4\}$*,* $A = \Big\{(i, j) \in E^2 / i < j\Big\}$*,* $B = \Big\{(i, j) \in E^2 / i = j\Big\}$ *et* $C = \Big\{(i, j) \in E^2 / i > j\Big\}$*.*

Montrer que A*,* B *et* C *forment une partition de* E^2*.*

Exercice 2.3.2 *:*

Soient A*,* B*,* C *et* D *des sous-ensembles d'un ensemble* E*.*

Montrer les deux égalités suivantes :

$A - B = (A \cup B) - B$ *et* $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$*.*

Exercice 2.3.3 *:*

On suppose que les sous-ensembles A_1*,* A_2*,* A_3 *et* A_4 *forment une partition de l'ensemble* E*.*

Combien y-a-t-il de façons de former une partition de E *apartir de ces sous-ensembles* A_i*, avec des sous-ensembles qui sont des réunions de certains des* A_i *?.*

Exercice 2.3.4 *:*

Soient E *et* F *deux ensembles,* $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ *et* $(C, D) \in (\mathcal{P}(F))^2$*.*

Montrer que les égalités suivantes sont toujours vraies :

1) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$*.*

2) $(A \times C) - (B \times C) = (A - B) \times C$*.*

Exercice 2.3.5 *:*

Soient A *et* B *deux parties d'un ensemble* E*.*

I. *Montrer les égalités suivantes :*

1• $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

2• $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

II. *Montrer les équivalences suivantes :*

3• $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B \Longleftrightarrow \overline{A} \cup B = E$.

4• $A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A \Longleftrightarrow A \cap \overline{B} = \varnothing$.

5• $A \cup B = A \cap C \Longleftrightarrow B \subset A \subset C$.

6• $A \subset B \Longleftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A} \Longleftrightarrow A \cup B = B$.

Exercice 2.3.6 *:*

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E.

Montrer que :

(1°) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

(2°) $\overline{A \Delta B} = \overline{A} \Delta B = A \Delta \overline{B}$.

(3°) $A \Delta B = \varnothing \Longrightarrow A = B$.

(4°) $A \Delta B = A \Delta C \Longrightarrow C = B$.

(5°) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$.

(6°) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A - C)$.

Exercice 2.3.7 *:*

Soit $\mathcal{R}$ la relation qui définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2;\ (x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff x \leq y'$ *et* $y \leq x'$.

1. montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.

2. Cette relation $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre total ? Justifier votre réponse.

Exercice 2.3.8 *:*

Soit $\mathcal{R}_1$ la relation qui définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2;\ (x, y)\mathcal{R}_1(x', y') \iff x < x'$ *ou* $(x = x'$ *et* $y \leq y')$.

1.) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.3.9 *:*

Soit $\mathcal{R}$ la relation qui définie sur $\mathbb{N}$ par :

$\forall (x, y) \in \mathbb{N};\ x\ \mathcal{R}\ y \iff \exists k \in \mathbb{N};\ 2x + y = 3k$.

a) Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$.

b) Calculer les classes d'équivalence : $\dot{0}$, $\dot{1}$, $\dot{2}$ et $\dot{3}$.

c) Deduire l'ensemble quotient $\mathbb{N}/\mathcal{R}$.

Exercice 2.3.10 *:*

Soit $\mathcal{R}_1$ la relation qui définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2;\ (x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff x + y' = y + x'$.

a). Montrer que la relation $\mathcal{R}_1$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$.

b). Calculer les classes d'équivalence : $Cl((a, a))$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $Cl((-1, 3))$.

Exercice 2.3.11 *:*

Déterminer sur $\mathbb{R}^*$ les classes d'équivalence et la décomposition des fonctions correspondantes des relations suivantes

1.) $\forall x, y \in \mathbb{R}^*;\ x\mathcal{R}_1 y \Longleftrightarrow x + x^{-2} = y + y^{-2}$.

2.) $\forall x, y \in \mathbb{R}^*;\ x\mathcal{R}_2 y \Longleftrightarrow x^3 - x = y^3 - y$.

Exercice 2.3.12 *:*

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ *tel que* $a \neq b$ *et* $M(x, y), M'(x', y')$ *deux points du plan euclidien* P.

Sur l'ensemble P*, on définit une relation binaire* $\mathcal{R}$ *par :*

$$M\mathcal{R}M' \Longleftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x &= x'cos\theta + \frac{a}{b}y'sin\theta \\ y &= -\frac{b}{a}x'sin\theta + y'cos\theta. \end{cases}$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence sur* P.

b) Préciser les classes d'équivalence et l'ensemble quotient $P/\mathcal{R}$.

2.4 Fonctions

Définition 2.4.1 *:*

Soient E *et* F *deux ensembles non vides.*

Une fonction f *de* E *vers* F *est une Relation binaire de* E *vers* F *de graphe* G_f *telle que si tout élément* x *de* E*, est en relation avec au plus un élément* y *de* F*, c'est-à-dire :*

$\forall x \in E, \forall (y_1, y_2) \in F; (x, y_1) \in G_f \wedge (x, y_2) \in G_f \Longrightarrow y_1 = y_2$*, on note :* $f : E \longrightarrow F$

(ou $E \xrightarrow{f} F$*).*

Pour signifier que x *est en relaion avec* y *par la fonction* f*, c'est-à-dire* $(x, y) \in G_f$*, on écrit* $y = f(x)$.

Exemples 2.4.2 *:*

♢ *Soient* $\mathcal{R}$ *la relation de* $E = \left\{-2, 1, 3, \sqrt{6}, \sqrt{7}\right\}$ *vers* $F = \left\{-\sqrt{3}, -1, 0, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 4\right\}$ *de graphe* $G_{\mathcal{R}} = \left\{(3, -\sqrt{3}), (3, \sqrt{3}), (4, -2), (1, -1)\right\}$.

Lorsque $3 \in E$ *est en relation avec* $-\sqrt{3}$ *et* $\sqrt{3}$ *dans* F*, (c'est-à-dire 3 a deux images par* $\mathcal{R}$ *), alors la relation* $\mathcal{R}$ *ne défine pas une fonction de* E *vers* F.

♢ *Soient* A *une partie de* E *et* $\mathcal{R}$ *une relation de* $\mathcal{P}(E)$ *vers* $\mathcal{P}(A)$ *définie par :*

$\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(A);\ X\mathcal{R}Y \iff Y = X \cap A$.

La relation $\mathcal{R}$ *est une fonction de* $\mathcal{P}(E)$ *vers* $\mathcal{P}(A)$ *que l'on note* f *et on écrie :*

$$\begin{aligned} f: \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(A) \\ X &\longmapsto X \cap A. \end{aligned}$$

$\diamondsuit$ *La relation binaire g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+$ et de graphe $G_g = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \ / \ y = 1 + \sqrt{x^2 - x + 2}\right\}$, est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+$, et écrie :*

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto 1 + \sqrt{x^2 - x + 2}. \end{aligned}$$

Définition 2.4.3 *:*

Soient E et F deux ensembles et f une fonction de E vers F.

On appelle ensemble de définition de f (ou domaine de définition de f) l'ensemble des éléments de E qui ont effectivement une image par la fonction f dans F, et on note D_f.

Formallement on a : $D_f = \{x \in E \ / \ f(x) \ \text{ exsiste dans } F\}$.

Exemples 2.4.4 *:*

$\star$ *Domaine de définition de la fonction $f : \left\{-3, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 1\right\} \longrightarrow \left\{\frac{\sqrt{5}}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{2}, 3\right\}$ définie par la formule $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, est $D_f = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right\}$.*

$\star$ *Soit h la fonction définie par :*

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto -\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} D_h &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ -\sqrt{x} \in \mathbb{R}_+\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ -\sqrt{x} \geq 0\} \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

$\star$ *Soit k la fonction définie par :*

$$\begin{aligned} k: \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} D_k &= \left\{x \in \mathbb{Z} \ / \ \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \ / \ \exists p \in \mathbb{Z}; 1 = px\} \\ &= \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

2.4.1 Ègalité de deux fonctions

Définition 2.4.5 :

Deux fonctions f et g sont égales si et seulement si elles ont même ensemble de définition D et $\forall x \in D; f(x) = g(x)$.

Exemples 2.4.6 :

Soient f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On détermine dans chacun des cas suivants que les fonctions f et g sont égales ou non.

1)⋆ $f(x) = \frac{1}{x}$ *et* $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$.

Dans ce cas on a : $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$, *et* $\exists x \in \mathbb{R}^* \ / \ f(x) \neq g(x)$. *Comme par exemple :*

$f(-2) = -\frac{1}{2} \neq g(-2) = \frac{1}{2}$. *Donc* $f \neq g$.

2)⋆ $f(x) = \frac{x^3+1}{(\sqrt{x})^2}$ *et* $g(x) = \frac{x^3+1}{x}$.

Dans ce cas on a : $D_f = \mathbb{R}_+^* \neq D_g = \mathbb{R}^*$, *et donc* $f \neq g$.

3)⋆ $f(x) = ln\frac{x+2}{1-x}$ *et* $g(x) = ln(x+2) - ln(1-x)$.

Dans ce cas on a : $D_f = D_g =]-2, 1[$, *et* $\forall x \in]-2, 1[; x+2 > 0 \wedge 1-x > 0 \wedge \frac{x+2}{1-x} > 0$.

D'après les propriétés de ln on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-2,1[; \quad f(x) &= ln\frac{x+2}{1-x} \\ &= ln(x+2) - ln(1-x) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Donc $f = g$.

2.4.2 Restriction et prolongement d'une fonction

Définition 2.4.7 :

Soient E, F et G des ensembles non vides, f une fonction de E vers F, A une partie non vide de E et $G \supset E$ (G contenant E) .

▶ *On appelle restriction de f à A la fonction, notée $f_{|A}$, telle que :*

$$\begin{array}{rccc} f_{|A}: & A & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

▶ *On dit que la fonction g de G vers F est une prolengement de f à G si et seulement si* $\forall x \in D_f \subset E; g(x) = f(x)$. *C'est-à-dire f est la restriction de g à E. Que l'on écrie :*

$$\begin{array}{rcl} g: \; G & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \begin{cases} g(x) = f(x); & \text{si } \; x \in E \\ g(x) = h(x); & \text{si } \; x \notin E. \end{cases} \end{array}$$

Où h est une fonction de G vers F.

Exemples 2.4.8 *:*

- *La fonction* $\begin{array}{rcl} f: \; \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & sinx \end{array}$ *n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais*

$\begin{array}{rcl} f_{|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}}: \; \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & sinx \end{array}$ *la restriction de f à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.*

- *La fonction*

$\begin{array}{rcl} f: \;]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2-1} \end{array}$ *n'est pas définie sur $]-1,1[$, mais*

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f}: \; \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sqrt{x^2-1}; & |x| \geq 1 \\ 0; & |x| < 1. \end{cases} \end{array}$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec f sur $E =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$. Donc $\tilde{f}$ est un prolongement à $\mathbb{R}$ de la fonction f.

- *Etant donnée la fonction :*

$$\begin{array}{rcl} g: \; \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & lnx. \end{array}$$

Alors les deux fonctions $\tilde{g}_1$ et $\tilde{g}_2$ suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{g}_1: \; \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ln\frac{x^2}{|x|}. \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \tilde{g}_2: \; \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ln\left(3\,|x| - 2x\right). \end{array}$$

sont deux prolongements différents de g à $\mathbb{R}^*$.

2.4.3 Fonction indicatrice (ou caractéristique)

Définition 2.4.9 *:*

Soit E un ensemble non vide et A une partie donnée de E.

La fonction indicatrice d'une partie A (ou fonction caractéristique d'une partie A), notée χ_A est la fonction définie par : Pour tout $x \in E$, $\begin{cases} \chi_A(x) = 1; & si \;\; x \in A \\ \chi_A(x) = 0; & si \;\; x \notin A. \end{cases}$

2.5 Applications

Définition 2.5.1 *:*

Soient E et F deux ensembles non vides et f une fonction de E vers F.

f est dite application de E vers F si et seulement si tout élément de E a une et une seule image dans F par la relation f. C'est-à-dire $\forall x \in E, (\exists! \; y \in F \; / \; y = f(x))$.

Ou bien la fonction f est dite application de E vers F si et seulement si $D_f = E$.

Exemples 2.5.2 *:*

▶ *La fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.*

▶ *La relation $\mathcal{R}$ de $E = \{a, b, d, f, h, m\}$ vers $F = \{$Mohammed, Fatima, Hlima, Ahmed, Bilal$\}$ définie par $\forall (x, y) \in E \times F; \; x\mathcal{R}y \iff x$ la première lettre de y. est une fonction mais pas une application, car l'élément d dans E n'a pas d'image dans F.*

▶ *La restriction d'une fonction f à son domaine de définition D_f est une application.*

Définition 2.5.3 *:*

Soit E un ensemble non vide.

L'application identité de E, notée Id_E est l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall x \in E; Id_E(x) = x.$$

2.5.1 Image directe, image réciproque d'un ensemble

Soient E et F deux ensembles non vides, f une application de E vers F, $A \subset E$ et $B \subset F$.

Définition 2.5.4 *:*

L'image directe de lensemble A par l'application f est l'ensemble noté $f(A)$ telle que :

$$f(A) = \{f(x) \in F \ / \ x \in A\}.$$

Définition 2.5.5 *:*

L'image réciproque de lensemble B par l'application f est l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ telle que :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \ / \ f(x) \in B\}.$$

Exemples 2.5.6 *:*

1$*$ *Soit f l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{2}{|x|+3}$.*

- $$\begin{aligned} f([-1,3]) &= \{f(x) \in \mathbb{R};\ x \in [-1,3]\} \\ &= \{f(x) \in \mathbb{R};\ -1 \leq x \leq 3\} \\ &= \{f(x) \in \mathbb{R};\ -1 \leq x \leq 0 \ \ ou \ \ 0 \leq x \leq 3\} \\ &= \{f(x) \in \mathbb{R};\ 0 \leq |x| \leq 1 \ \ ou \ \ 0 \leq |x| \leq 3\} \\ &= \{f(x) \in \mathbb{R};\ 0 \leq |x| \leq 3\} \\ &= \{f(x) \in \mathbb{R};\ 3 \leq |x|+3 \leq 6\} \\ &= \left\{f(x) \in \mathbb{R};\ \tfrac{2}{3} \geq \tfrac{2}{|x|+3} \geq \tfrac{1}{3}\right\} \\ &= \left[\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right]. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= \{f(x) \in \mathbb{R};\ x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{f(x) \in \mathbb{R};\ -\infty < x < +\infty\} \\ &= \{f(x) \in \mathbb{R};\ 0 \leq |x| < +\infty\} \\ &= \{f(x) \in \mathbb{R};\ 3 \leq |x|+3 < +\infty\} \\ &= \left\{f(x) \in \mathbb{R};\ \tfrac{2}{3} \geq \tfrac{2}{|x|+3} > 0\right\} \\ &= \left]0, \tfrac{2}{3}\right]. \end{aligned}$$

2∗ *Soit g l'application de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *définie par :* $g(x) = cos(\pi x + \frac{\pi}{2})$.

- $$\begin{aligned} g(\mathbb{R}) &= \{g(x) \in \mathbb{R};\ x \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{g(x) \in \mathbb{R};\ (\pi x + \tfrac{\pi}{2}) \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{g(x) \in \mathbb{R};\ -1 \leq cos(\pi x + \tfrac{\pi}{2}) \leq 1\right\} \\ &= [-1, 1]. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} g(\mathbb{Z}) &= \{g(x) \in \mathbb{R};\ x \in \mathbb{Z}\} \\ &= \left\{g(x) \in \mathbb{R};\ (\pi x + \tfrac{\pi}{2})\ /\ x \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{g(x) \in \mathbb{R};\ (2x+1)\tfrac{\pi}{2}\ /\ x \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{g(x) \in \mathbb{R};\ COS\left((2x+1)\tfrac{\pi}{2}\right) = 0\ /\ x \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} g^{-1}(1) &= \{x \in \mathbb{R};\ g(x) = 1\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R};\ cos(\pi x + \tfrac{\pi}{2}) = 1\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R};\ (2x+1)\tfrac{\pi}{2} = 2k\pi\ /\ k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R};\ x = 2k - \tfrac{1}{2}\ /\ k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{2k - \tfrac{1}{2}\ /\ k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

3∗ *Soit h l'application de* $\mathbb{R} - \{2\}$ *vers* $\mathbb{R}$ *définie par :* $h(x) = \frac{1}{x-2}$.

- $$\begin{aligned} h([0,3]) &= \{h(x) \in \mathbb{R};\ x \in [0,3]\} \\ &= \{h(x) \in \mathbb{R};\ x \neq 2\ \text{ et }\ 0 \leq x \leq 3\} \\ &= \{h(x) \in \mathbb{R};\ 0 \leq x < 2\ \text{ ou }\ 2 < x \leq 3\} \\ &= \{h(x) \in \mathbb{R};\ -2 \leq x - 2 < 0\ \text{ ou }\ 0 < x - 2 \leq 1\} \\ &= \left\{h(x) \in \mathbb{R};\ -\tfrac{1}{2} \geq \tfrac{1}{x-2} > -\infty\ \text{ ou }\ +\infty > \tfrac{1}{x-2} \geq 1\right\} \\ &= \,]-\infty, -\tfrac{1}{2}\,] \cup [1, +\infty\,[\,. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} h^{-1}([-1,1]) &= \{x \in \mathbb{R} - \{2\};\ h(x) \in [-1,1]\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} - \{2\};\ -1 \leq \tfrac{1}{x-2} \leq 1\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} - \{2\};\ -1 \leq \tfrac{1}{x-2} < 0\ \text{ ou }\ 0 < \tfrac{1}{x-2} \leq 1\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{2\};\ -1 \geq x - 2 > -\infty\ \text{ ou }\ +\infty > x - 2 \geq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{2\};\ 1 \geq x > -\infty\ \text{ ou }\ +\infty > x \geq 3\} \\ &= \,]-\infty, 1\,] \cup [3, +\infty\,[\,. \end{aligned}$$

Remarques 2.5.7 *:*

Soient E et F deux ensembles non vides, f une application de E vers F, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$.

• $\forall A \in \mathcal{P}(E);\ f(A) \subset F$. • $\forall D \in \mathcal{P}(F);\ f^{-1}(D) \subset E$.

• *Pour $y \in F$ on a : $y \in f(A)$ avec$f(A) \neq \phi \iff \exists x \in A;\ y = f(x)$.*

• *Par définition de $f^{-1}(D)$, on a, pour $x \in E$: $x \in f^{-1}(D) \iff f(x) \in D$.*

• *$\forall x \in E; f(\{x\}) = \{f(x)\}$. Par contre l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ avec $y \in F$, peut être un singleton, un ensemble à plusieurs éléments ou l'ensemble vide. Cela tout dépend de l'application f.*

Par exemple : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 3x^2$. On a : $f^{-1}(\{3\}) = \{-1, 1\}$, $f^{-1}(\{-2\}) = \phi$ et $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

Propriétés 2.5.8 *:*

Soient E et F deux ensembles non vides, f une application de E vers F.

1). $f(\phi) = f^{-1}(\phi) = \phi$, •$f^{-1}(F) = E$.

2). $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2, (A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B))$.

3). $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2, f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

4). $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2, f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

5). $\forall D \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(C_F D) = C_E f^{-1}(D)$.

6). $\forall (D, G) \in (\mathcal{P}(F))^2, f^{-1}(D \cup G) = f^{-1}(D) \cup f^{-1}(G)$.

7). $\forall (D, G) \in (\mathcal{P}(E))^2, f^{-1}(D \cap G) = f^{-1}(D) \cap f^{-1}(G)$.

Preuve :

Pour la démonstration de **2).**, **3).** et **4).**, on suppose A et B deux parties de E et $y \in F$.

Démonstration de la **propriété 2).** : Soient $A \subset B$ et $y \in f(A)$.

Si $f(A) = \phi$, alors $f(A) \subset f(B)$.

Sinon, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Puisque $A \subset B$, on a $x \in B$ et donc y est l'image d'un élément de B par f, s'implique que $y \in f(B)$. Ceci montre dans tous les cas que $f(A) \subset f(B)$.

Démonstration de la **propriété 3).** : Soit $y \in F$ et $f(A \cap B)$ non vide.

$$\begin{aligned}
y \in f(A \cap B) &\iff \exists x \in E;\ x \in A \cap B \text{ tel que } y = f(x)\\
&\iff \exists x \in E;\ (x \in A\ \wedge\ x \in B) \text{ tel que } y = f(x)\\
&\Longrightarrow (\exists x \in E;\ x \in A \text{ et } y = f(x))\ \wedge\ (\exists x \in E;\ x \in B \text{ et } y = f(x))\\
&\iff (\exists x \in A\ /\ y = f(x))\ \wedge\ (\exists x \in B;\ /\ y = f(x)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\iff y \in f(A) \;\wedge\; y \in f(B) \\ &\iff y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

Dans le cas ou $f(A \cap B) = \phi$. Alors, elle est inclue dans n'importe quelle ensemble. Donc elle est inclue dans $f(A) \cap f(B)$.

Ceci montre que : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Démonstration de la **propriété** **4).** : Soit $y \in F$ et $f(A \cup B)$ non vide.

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\iff \exists x \in E;\; x \in A \cup B \textit{ tel que } y = f(x) \\ &\iff \exists x \in E;\; (x \in A \;\vee\; x \in B) \textit{ tel que } y = f(x) \\ &\iff (\exists x \in E;\; x \in A \textit{ et } y = f(x)) \;\vee\; (\exists x \in E;\; x \in B \textit{ et } y = f(x)) \\ &\iff (\exists x \in A \;/\; y = f(x)) \;\vee\; (\exists x \in B \;/\; y = f(x)) \\ &\iff y \in f(A) \;\vee\; y \in f(B) \\ &\iff y \in f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$

Dans le cas ou $f(A \cup B) = \phi$. On a :

$$\begin{aligned} f(A \cup B) = \phi &\iff A \cup B = \phi. \;\; (\textit{Car } f \textit{ est une application}) \\ &\iff A = \phi \wedge B = \phi \\ &\iff f(A) = \phi \wedge f(B) = \phi \\ &\iff f(A) \cup f(B) = \phi. \end{aligned}$$

Donc, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, pour tout $A,\, B \in \mathcal{P}(E)$.

Pour la démonstration de **5).**, **6).** et **7).**, on suppose D et G deux parties de F et $x \in E$.

Démonstration de la **propriété** **5).** : Soit $x \in E$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C_F D) &\iff f(x) \in C_F D \\ &\iff f(x) \notin D \\ &\iff x \notin f^{-1}(D) \\ &\iff x \in C_E f^{-1}(D) \end{aligned}$$

Démonstration de la **propriété** **6).** : Soit $x \in E$ et $f^{-1}(D \cup G)$ non vide.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(D \cup G) &\iff f(x) \in D \cup G \iff f(x) \in D \;\vee\; f(x) \in G \\ &\iff x \in f^{-1}(D) \vee x \in f^{-1}(G) \iff x \in f^{-1}(D) \cup f^{-1}(G). \end{aligned}$$

La preuve de **propriété 7).** est laissée comme exercice. ■

Remarque 2.5.9 *:*

Ces deux ensembles $f(C_F D)$, $C_E f(D)$ ne sont pas toujours comparables.

Exemple 2.5.10 *:*

Soient f l'application définie par :

$$\begin{array}{llll} f: & E=\{-2,-1,0,1,2\} & \longrightarrow & F=\{0,1,2,3,4\} \\ & x & \longmapsto & x^2. \end{array}$$

On considère l'ensemble $A=\{-2,1\}$, alors

$f(A)=\{1,4\}$, $C_E A=\{-1,0,2\}$, $f(C_E A)=\{0,1,4\}$, $C_F f(A)=\{0,2,3\}$.

Donc, $f(C_E A) \nsubseteq C_F f(A)$ et $C_F f(A) \nsubseteq f(C_E A)$

2.5.2 Composition d'applications

Définition 2.5.11 *:*

Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On appelle application composée de f puis g l'application $g \circ f : E \longrightarrow G$ définie par :

$\forall x \in E; (g \circ f)(x) = g(f(x))$ et on note de façon symbolique : $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ et $E \xrightarrow{g\circ f} G$.

Exemple 2.5.12 *:*

Soit f et g deux applications définie par :

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x+1}. \end{array} \qquad \begin{array}{llll} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & \frac{x^2}{x^2+1}. \end{array}$$

Alors, l'application composée de f pius g est l'application $g \circ f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tel que :

$\forall \in \mathbb{R}_+; (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{(f(x))^2}{(f(x))^2+1} = \frac{x+1}{x+2}$.

Ainssi, l'application composée de g pius f est l'application $f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$\forall \in \mathbb{R}; (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)+1} = \sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2+1}}$.

On remarque qu'il existe deux applications f et g tel que $g \circ f \neq f \circ g$.

Donc en général, $\boxed{g \circ f \neq f \circ g,}$ c'est-à-dire la loi de composition n'est pas commutative.

Propriétés 2.5.13 *:*

Soient E, F, G et H des ensembles non vides. Pour toutes applications

$f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$, on a :

$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. (c'est-à-dire la loi de composition est associative).

$Id_F \circ f = f$ et $f \circ Id_E = f$.

Preuve :

Soient E, F, G et H des ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$ sont des applications. pour tout $x \in E$ fixé, on a

$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)\,(h(x)) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x)$. ■

Notation. L'application composée de $f : E \longrightarrow E$ avec lui même n fois, avec $n \in \mathbb{N}^*$ est une application de E dans E, on la note $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \ \text{fois}}$,

et par convention on a $f^0 = Id_E$.

Ainsi : $*$ Si $f : E \longrightarrow E$ une application, alors $\forall (n,p) \in {\mathbb{N}^*}^2 ; f^n \circ f^p = f^{n+p}$ et $(f^n)^p = f^{np}$.

$*$ Si f et g deux applications de E dans E, et $f \circ g = g \circ f$ alors, $(f \circ g)^n = f^n \circ g^n$.

2.5.3 Injections, surjections, bijections

Soient E et F deux ensembles non vide et f une application de E vers F. On dit que :

Définition 2.5.14 *:*

f injective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a au plus un antécédent dans E par f. Autrement dit :

$(L'application\ f\ est\ injective) \iff \Big(\forall (x_1, x_2) \in E^2;\ \ (f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2)\Big)$.

Par la contrapposée de l'implication, On a aussi :

$(L'application\ f\ est\ injective) \iff \Big(\forall (x_1, x_2) \in E^2;\ \ (x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2))\Big)$.

Définition 2.5.15 *:*

f surjective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a au moins un antécédent dans E par f. Autrement dit :

$(L'application\ f\ est\ surjective) \iff (\forall y \in F;\ \exists x \in E\ /\ y = f(x))$.

Il est immédiat que : f est surjective $\iff f(E) = F$.

Définition 2.5.16 *:*

f est bijective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a un et un seul antécédent dans E par f. C'est-à-dire : f est surjective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective. Autrement dit : $(f$ est bijective$) \iff (\ \forall y \in F; \exists! x \in E\ /\ y = f(x)\ )$.

Remarque 2.5.17 *:*

Par négation, $f : E \longrightarrow F$ non injective, si $\exists x_1, x_2 \in E; f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$.

Exemples 2.5.18 *:*

- *L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 3e^{x-1} + 2$ est injective.*

Car, pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\iff 3e^{x_1-1} + 2 = 3e^{x_2-1} + 2 \iff e^{x_1-1} = e^{x_2-1} \\ &\iff \ln e^{x_1-1} = \ln e^{x_2-1} \iff x_1 = x_2. \end{aligned}$$

- *L'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = 3e^{x^2-1} + 2$ n'est pas injective.*

Car, pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\iff 3e^{x_1^2-1} + 2 = 3e^{x_2^2-1} + 2 \iff e^{x_1^2-1} = e^{x_2^2-1} \\ &\iff x_1^2 = x_2^2 \iff |x_1| = |x_2| \iff (x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2). \end{aligned}$$

C'est-à-dire $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ /\ g(x_1) = g(x_2) \wedge x_1 \neq x_2$. Comme par exemple 1 et -1.

- *L'application $h : \mathbb{Q}^* \longrightarrow \mathbb{Q} - \{-1\}$ définie par : $h(n) = \dfrac{1-n}{n}$ est surjective.*

Car, pour tout $y \in \mathbb{Q} - \{-1\}$ on a :

$$y = h(n) \iff y = \frac{1-n}{n} \iff y + 1 = \frac{1}{n} \iff n = \frac{1}{y+1} \in \mathbb{Q}^*.$$

Ce entraine que pour tout $y \in \mathbb{Q} - \{-1\}$ fixé, l'equiation $y = h(n)$ a ou moins une solution dans $\mathbb{Q}^*$, ce qui montre que h est surjective.

- *L'application $k : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $k(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3$ n'est pas surjective.*

Puisque, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que l'équation $k(x, y) = \alpha$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^2$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a : $k(x, y) = \alpha \iff (x-2)^2 + (y+1)^2 = \alpha + 2$.

On remarque que pour tout $\alpha < -2$, α n'a pas d'antécédent par k.

- *L'application $l : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [1, +\infty[$ définie par : $l(x) = x^2 + 1$ est bejective.*

Car, pour tout $y \geq 1$ l'équation $l(x) = y$ possède une unique solution $x = \sqrt{y-1} \in \mathbb{R}_+$.

Ce qui montre que l est surjective.

- *L'application $t : \mathbb{R} \longrightarrow [1, +\infty[$ définie par : $t(x) = x^2 + 1$ n'est pas bejective.*

Car, elle n'est pas injective. Puisqu'il exsiste deux réelles x_1 et x_2 telle que $t(x_1) = t(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$, comme par exemple $t(-1) = t(1)$.

Proposition 2.5.19 *:*

Soient E, F, G trois ensembles non vides, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On a les propriétés suivantes :

1) *Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ l'est aussi.*

2) *Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ l'est aussi.*

3) *Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ l'est aussi.*

4) *Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.*

5) *Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.*

Preuve :

On suppose que E, F, G trois ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1) Supposons que f et g injectives, et montrons que l'application $g \circ f : E \longrightarrow G$ est injective.

Autrement dit, montrons que $\forall (x', x'') \in E^2;\ (g \circ f)(x') = (g \circ f)(x'') \Longrightarrow x' = x''$.

Soit $(x', x'') \in E^2$,

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x') = (g \circ f)(x'') &\Longleftrightarrow g(f(x')) = g(f(x'')) \\
&\Longrightarrow f(x') = f(x'') \quad (car \quad g \quad injective) \\
&\Longrightarrow x' = x'' \quad (car \quad f \quad injective).
\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du propriété **1)**.

2) Supposons maintenant que f et g surjectives, et montrons que l'application $g \circ f : E \longrightarrow G$ est surjective.

En d'autres termes, montrons que $\forall y \in G; \exists x \in E\ /\ (g \circ f)(x) = y$.

Soit $y \in G$,

on montre que l'equation $(g \circ f)(x) = y$ admet au moins une solution dans E, pour tout $y \in G$ fixé.

Puisque g est surjective, il existe au moins un élément z de F tel que $g(z) = y$. De même de la surjectivité de f assure qu'il existe au moins un élément x de E tel que $f(x) = z$. Donc, il existe au moins un élément x de E tel que $(g \circ f)(x) = y$, pour tout $y \in G$ fixé.

Ce qui montre que $g \circ f$ est surjective.

3) D'apès **1)** et **2)**, on deduit que Si f et g sont à la fois injectives et surjectives, alors l'application $g \circ f$ est à la fois injective et surjective.

4) Supposons que $g \circ f : E \longrightarrow G$ injective, et montrons que l'application f est injective.

On montre que $\forall (x_1, x_2) \in E^2;\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$, on a :

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \ \ (car\ \ g\ \ est\ une\ application) \\ &\Longleftrightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \ \ (car\ \ f \circ g\ \ injective). \end{aligned}$$

Ce qui montre que f est injective.

5) Supposons que $g \circ f : E \longrightarrow G$ surjective, et montrons que l'application g est surjective.

On montre que $\forall y \in G;\ \exists x \in F\ /\ g(x) = y$.

Soit $y \in F$, on a :

Puisque $g \circ f$ est surjective, alors il existe un élément z de E tel que $(g \circ f)(z) = y$, posons que $f(z) = x$, puisque est une application de E vers F, alors $f(z) \in F$. Donc il existe un élément x de F tel que $g(x) = y$. Ce qui termine la démonstration. ■

2.5.4 Réciproque d'une bijection

Définition 2.5.20 *:*

Soient E et F deux ensembles non vides et f une application bijective de E sur F.

On appelle application réciproque de f (ou bijection réciproque de f) l'application notée f^{-1} définie par : $f^{-1} : F \longrightarrow E$ tel que pour tout $(x, y) \in E \times F$; $f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$.

Exemples 2.5.21 *:*

• *L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que $f(x) = e^{x+1}$ est une bejection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, sa réciproque est l'application bejective $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x) = lnx - 1$.*

• *L'application $h : \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $f(x) = x^2$ est une bejection de $\mathbb{R}_-$ sur $\mathbb{R}_+$, sa réciproque est l'application bejective $h^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_-$ telle que $h^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.*

Proposition 2.5.22 *:*

Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E vers F.

1• *Si f bijective alors son application réciproque f^{-1} est bejective de F sur E et elle verifie $(f^{-1})^{-1} = f$, $f^{-1} \circ f = Id_E$ et $f \circ f^{-1} = Id_F$.*

2• *f bijective si et seulement s'il existe une et une seul application bejective g de F sur E telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$. Cela signifie que $g = f^{-1}$.*

Preuve :

1• Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bejective. Alors, tout élément dans F a un et un seul antécédent dans E par f. Ce qui montre que la relation réciproque f^{-1} est une application de F vers E. Et comme f est une application alors, tout élément dans E a un et un seul antécédent dans F par f^{-1}. Donc f^{-1} est bejective.

Pour la démonstration de $(f^{-1})^{-1} = f$, on note $f^{-1} = g : F \longrightarrow E$.

On a alors $g^{-1} : E \longrightarrow F$ une application bejective, pour tout $x \in E$ fixé, on a $(f^{-1})^{-1}(x) = g^{-1}(x) = y = f(x)$.

Montrons maintenant $f^{-1} \circ f = Id_E$ pius $f \circ f^{-1} = Id_F$.

Soient $x \in E$ et $y = f(x)$. On a $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}(y) = Id_E(x)$.

Ainsi $\forall x \in E; \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$, donc $f^{-1} \circ f = Id_E$.

Soient $y \in F$ et $x = f^{-1}(y)$. On a $\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = f\left(f^{-1}(y)\right) = f(x) = Id_F(y)$.

Ainsi $\forall y \in F; \left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y$, donc $f \circ f^{-1} = Id_F$.

2• " $\Longrightarrow$ " : Supposons f bijective, et montrons qu'il existe une application bejective $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.

Comme f est bejective alors, d'après 1•, l'appliquation réciproque de f est $f^{-1} : F \longrightarrow E$ donc il existe une application $g = f^{-1}$ telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.

" $\Longleftarrow$ " : Supposons qu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$ et montrons que f est bijective.

Pour l'**injectivité de** f **:** Soient $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. On compose à gauche avec g on obtient $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, on a alors $Id_E(x_1) = Id_E(x_2)$. Donc f est injective.

Pour la **surjectivité de** f **:** Puisque $f \circ g = Id_F$ et que Id_F est bejective, alors d'après la cinquième propriété dans la **proposition 2.5.19** f est surjective. Ce qui montre que f est bijective.

Pour la **bejectivité de** g **:** Puisque $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$ et que Id_E et Id_F sont bejectives, alors d'après la cinquième propriété dans la **proposition 2.5.19** g est bejective.

Pour l'**unicité de** g **:** On suppose que $h : F \longrightarrow E$ une autre application telle que $h \circ f = Id_E$ et $f \circ h = Id_F$, en particulier $f \circ h = Id_F = f \circ g$, donc pour tout $y \in F;\ f\left(h(y)\right) = f\left(g(y)\right)$ or f est bejective alors elle est injective donc pour tout $y \in F;\ h(y) = g(y)$, ceci montre que $h = g$.

Même si en particulier $h \circ f = Id_E = g \circ f$, on a pour tout $x \in E;\ h\left(f(x)\right) = g\left(f(x)\right)$, comme f est bejective alors pour tout $y \in F;\ h(y) = g(y)$.

Pour $g = f^{-1}$: Sela s'obtient comme suit :

- $Id_E = g \circ f \iff Id_E \circ f^{-1} = (g \circ f) \circ f^{-1}$
$\iff f^{-1} = g \circ \left(f \circ f^{-1}\right)$
$\iff f^{-1} = g \circ Id_F = g.$

- $f \circ g = Id_F \iff f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ Id_F$
$\iff \left(f^{-1} \circ f\right) \circ g = f^{-1}$
$\iff g = Id_E \circ g = f^{-1}.$

■

Commentaire : On ne peut pas passer de l'une des deux égalités $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$ sans l'autre pour deduire que f est bejective. Considérons par exemple les deux applications suivantes :

$$f : \begin{array}{rcl} E = \{-1, 0, 1, 2, 3\} & \longrightarrow & F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ x & \longmapsto & x + 2. \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} & \longrightarrow & E = \{-1, 0, 1, 2, 3\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & si\ x < 1 \\ x - 2 & si\ x \geq 1. \end{cases} \end{array}$$

On remarque que l'élément 0 de F n'a pas d'antécédent par f dans E, ce qui montre que f n'est pas bijective.
Pourtant, pour tout élément de E on a :
$g(f(x)) = f(x) - 2 = Id_E(x)$ car pour tout $x \in E;\ f(x) \geq 1$.
Ainsi, pour tout élément de $F - \{0\}$ on a :
$f(g(x)) = g(x) + 2 = Id_{F-\{0\}}(x) \neq Id_F(x)$, car $f(g(0)) = f(0) = 2$.

Conclusion 2.5.23 *:*
On dit que $g : F \longrightarrow E$ est l'application réciproque de l'application bejective $f : E \longrightarrow F$ si et seulement si $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.

Proposition 2.5.24 *:*
Soient E, F et G trois ensembles non vides, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications bijectives.
L'application $g \circ f$ est bijective et sa bijection réciproque est $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Preuve :
Supposons que $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications bijectives et montrons que $g \circ f$ est bijective.
Puisque f et g sont à la fois injectives et surjectives on a alors, d'après les deux premières propriétés de la proposition **2.5.19**, $g \circ f$ est elle aussi. Donc elle est bejective.
Puisque f, g et $g \circ f$ sont bijectives, on est assuré de l'existence des f^{-1}, g^{-1} et $(g \circ f)^{-1}$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
(g\circ f)\circ(g\circ f)^{-1}=Id_G &\iff g^{-1}\circ\left((g\circ f)\circ(g\circ f)^{-1}\right)=g^{-1}\circ Id_G\\
&\iff (g^{-1}\circ(g\circ f))\circ(g\circ f)^{-1}=g^{-1}\ (\text{car }''\circ''\ \text{associative})\\
&\iff ((g^{-1}\circ g)\circ f)\circ(g\circ f)^{-1}=g^{-1}\\
&\iff (Id_F\circ f)\circ(g\circ f)^{-1}=g^{-1}\ (\text{car } g^{-1}\circ g=Id_F)\\
&\iff f\circ(g\circ f)^{-1}=g^{-1}\\
&\iff f^{-1}\circ\left(f\circ(g\circ f)^{-1}\right)=f^{-1}\circ g^{-1}\\
&\iff (f^{-1}\circ f)\circ(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}\\
&\iff Id_E\circ(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}\\
&\iff (g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}.
\end{aligned}$$

■

Définition 2.5.25 :

*Soit E un ensemble non vide. On appelle **involution de E** toute application f de E dans lui-même vérifiant $f\circ f=Id_E$.*

Propriétés 2.5.26 :

Toute involution f de E est une bijection de E sur E et $f^{-1}=f$.

Preuve :

On applique la deuxième propriété de la **proposition 2.5.22** dans le cas particulier où $g=f$. ■

2.6 Exercices

Exercice 2.6.1 :

Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}_+\\ x&\longmapsto&\dfrac{x^2}{|x|+1}.\end{array}\qquad g:\begin{array}{ccc}\mathbb{C}-\{2i\}&\longrightarrow&\mathbb{C}\\ z&\longmapsto&\dfrac{z}{z-2i}.\end{array}\qquad h:\begin{array}{ccc}]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ x&\longmapsto&tan(\pi x).\end{array}$$

$$k:\begin{array}{ccc}\mathbb{Z}&\longrightarrow&\mathbb{N}\\ n&\longmapsto&k(n)=\begin{cases}2n, & si\ \ n\geq 0\\ -2n-1, & si\ \ n\leq -1.\end{cases}\end{array}\qquad l:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ x&\longmapsto&\frac{e^x+1}{e^x-1}\end{array}$$

Exercice 2.6.2 :

Soit f l'application de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ dans l'intervalle $[0,1]$ définie par : $f(x)=sin^2(x)$.

1. Cette application est-elle injective ? est-elle surjective ? est-elle bijective ?

2. Déterminer l'ensemble A telle que la restriction de f à A est une bijection de A sur $[0,1]$.

Exercice 2.6.3 *:*

Démontrer que pour $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ et $x \in E$ on a :

1. $I_A(x) = I_B(x) \Longleftrightarrow A = B$.

2. $I_{C_E A}(x) = 1 - I_A(x)$.

3. $I_{A\cap B}(x) = I_A(x) I_B(x)$.

4. $I_{A\cup B}(x) = I_A(x) + I_B(x) - I_A(x) I_B(x)$.

5. $I_{A-B}(x) = I_A(x)(1 - I_B(x))$.

6. $I_{A\Delta B}(x) = I_A(x) + I_B(x) - 2I_A(x).I_B(x)$.

Exercice 2.6.4 *:*

Soient $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ et $f : P(E) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par : $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$.

1) Montrer que f est injective si et seulemnt si $A \cup B = E$.

2) Montrer que f est surjectif si et seulement si $A \cap B = \phi$.

3) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective. Donner f^{-1}.

Exercice 2.6.5 *:*

Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer qu'il existe un couple unique d'entiers (a,b) vérifiant $b = n - \frac{a(a+1)}{2}$ et $b \leq a$.

1. Montrer que l'application soivante :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & (a,b) & \longmapsto & \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b. \end{array}$$

est une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.

Exercice 2.6.6 *:*

On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$

Montrer que :

***1.** $(g \circ f)$ injective implique que f est injective.*

***2.** Si $(g \circ f)$ est injective et f surjective alors g est injective.*

***3.** $(g \circ f)$ surjective implique que g est surjective.*

***4.** Si $(g \circ f)$ est surjective et f injective alors f est surjective.*

***5.** $((g \circ f)$ et $(h \circ g)$ bijectives $)$ équivalent que $(f, g$ et h sont bijectives $)$.*

Exercice 2.6.7 *:*

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ (n,p) & \longmapsto & 2^n(2p+1). \end{array}$$

1) *Démontrer que* f *est une bijection.*

2) *En déduire une bijection de* $\mathbb{N}^2$ *sur* $\mathbb{N}$.

Exercice 2.6.8 *:*

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (p,q) & \longmapsto & p+\frac{1}{q}. \end{array}$$

a. *Montrer que* f *est injective.*

b. *Montrer que* f *n'est pas surjective.*

Exercice 2.6.9 *:*

Soient E *et* F *deux ensembles,* A, B *deux sous-ensembles de* E, C, D *deux sous-ensembles de* F *et* $f : E \longrightarrow F$ *une application donnée. Montrer ce qui suit :*

1. $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$. *La réciproque est-elle vraie ?.*

2. $f(A\cup B) = f(A)\cup f(B)$.

3. $f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$. *Quelle est la condition sur* f *pour l'égalité ?.*

4. $C \subset D \Longrightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.

5. $f^{-1}(C\cup D) = f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$.

6. $f^{-1}(C\cap D) \subset f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$.

Exercice 2.6.10 *:*

Soit f *une fonction réelle d'une variable réelle définie par* $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$.

1.) *Montrer que* f *est ni injective, ni surjective.*

2.) *Donner les plus grands sous-ensembles* E *et* F *de* $\mathbb{R}$ *tels que la fonction* $g : E \longrightarrow F$ *définie par* $g(x) = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ *soit bijective.*

3.) *Écrire l'expression algébrique de* $g^{-1}(x)$ *où* g^{-1} *est la fonction réciproque de* g.

Exercice 2.6.11 *:*

Soit f *une fonction réelle d'une variable réelle définie par* $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}+1}$.

a.) *Calculer l'image directe de* $]-1,2[$ *par la fonction* f.

b.) *Calculer l'image réciproque de* $]e^2,+\infty[$ *par la fonction* f.

c.) *Montrer que* f *est ni injective, ni surjective.*

d.) *Donner les plus grands sous-ensembles* A *et* B *de* $\mathbb{R}$ *tels que la fonction* $h : A \longrightarrow B$ *définie par* $h(x) = e^{\frac{1}{x^2}+1}$ *soit bijective.*

e.) *Écrire l'expression algébrique de* $h^{-1}(x)$ *où* h^{-1} *est la fonction réciproque de* h.

Chapitre 3

Les fonctions réelles à une variable réelle

3.1 Fonctions réelles, définitions et propriétés

Définition 3.1.1 *:*

Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une relation, notée f de $I \subseteq \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, telle que pour tout antécédent x de I donné, est en relation au plus un et un seul image y dans $\mathbb{R}$ par f. On note :

$$\begin{array}{rccc} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

et $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I vers $\mathbb{R}$.

Exemples 3.1.2 *:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \frac{1}{x} cos(\frac{1}{x}) \end{array}$$

f est une fonction réelle d'une variable réelle.

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & z & \longmapsto & g(z) = \frac{|z|}{Re(z)-1} \end{array}$$

g est une fonction réelle d'une variable complexe.

Domaine de définition d'une fonction

Définition 3.1.3 *:*

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle. On appelle l'ensemble de définition (ou domaine de définition) de f, on note D_f l'ensemble des antécédents qui ont des images par la fonction f.

C'est-à-dire : si $f: \ I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow I' \subseteq \mathbb{R}$. on a, alors

$$D_f = \{x \in I \text{ tels que } \exists y = f(x) \in I'\}.$$

Exemples 3.1.4 *:*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}ln(\frac{x-1}{x}), \end{array}$$
$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x\in\mathbb{R} \text{ tels que } \frac{1}{\sqrt{x}}ln(\frac{x-1}{x})\in\mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R} \text{ tels que } x>0 \ \wedge \ \frac{x-1}{x}>0\right\} \\ &= \left]1,+\infty\right[. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & g(n)=\frac{|n|}{\sqrt{4-n^2}}, \end{array}$$
$$\begin{aligned} D_g &= \left\{x\in\mathbb{Z} \text{ tels que } \frac{|n|}{\sqrt{4-n^2}}\in\mathbb{R}\right\} \\ &= \{x\in\mathbb{Z} \text{ tels que } 4-n^2>0\} \\ &= \{-1,\ 0,\ 1\}. \end{aligned}$$

Représentation graphique d'une fonction

Définition 3.1.5 *:*

Le graphe (ou courbe représentative) d'une fonction $f : E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow F \subseteq \mathbb{R}$, est le sous-ensemble G_f (resp. ou C_f) de $E\times F$ tel que :

$$G_f = \{M(x, f(x)) \ / \ x \in D_f \wedge f(x) \in F\}.$$

Opérations sur les fonctions

Définition 3.1.6 *:*

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g.

Domaine de définition de $f+g$, $f-g$ et $f\times g$ est l'ensemble $D_f \cap D_g$, c'est-à-dire :

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f\times g} = D_f \cap D_g.$$

Pour tout $x \in D_f \cap D_g$,

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x),(f-g)(x) = f(x)-g(x) \quad \text{et} \quad (f\times g)(x) = f(x)\times g(x).$$

Domaine de définition de $\dfrac{f}{g}$ est l'ensemble

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x \in D_g \text{ tels que } g(x) = 0\},$$

et pour tout $x \in D_{\frac{f}{g}}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

3.1.1 Monotonicité d'une fonction

Définition 3.1.7 *:*

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. On dit que :

- *f est **croissante** sur I si :*

$$\forall (x_1,\ x_2) \in I^2;\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

- *f est **strictement croissante** si :*

$$\forall (x_1,\ x_2) \in I^2 : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- *f est **décroissante** sur I si :*

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2 : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

- *f est **strictement décroissante** sur I si*

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2 : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

- *f est **constante** sur I si :*

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2;\ f(x_1) = f(x_2).$$

Ou bien,

$$\forall x \in I;\ f(x) = C,\ \text{où } C \text{ une constante réelle.}$$

- *f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur I si f est ou bien croissante sur I ou bien décroissante sur I. (resp. f est strictement croissante ou bien strictement décroissante sur I).*

Exemples 3.1.8 :

- *Soit n un entier positif. La fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^{2n+1}$, est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc elle est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.*
- *La fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = E(x) + 2$, est croissante sur $\mathbb{R}$. Mais elle n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Car elle est constante sur chaque intervalle $[k, k+1]$ axec $k \in \mathbb{Z}$.*

Sens de variation de $f+g$ et $f-g$

Soit $I \subseteq D_f \cap D_g$ un intervalle :

- Si f et g sont croissantes (resp. décroissantes) sur I, alors $f+g$ est croissante (resp. décroissantes) sur I.
- Si f et g n'ont pas le même sens de variation sur I, on ne peut rien déduire pour le sens de variation de $f+g$ sur I.
- Le sens de variation de $f-g$ sur I, est le sens de variation de $f+(-g)$ sur I.

Composition de fonctions

Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(D) \subseteq D'$.

On appelle composée de f par g et on note $g \circ f$, la fonction définie par :

$$\textit{pour tout } x \in D_{g\circ f};\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) \ \text{ où } D_{g\circ f} = \{x \in D \ \textit{ tels que } x \in D_f \ \text{ et } f(x) \in D_g\}.$$

Exemple 3.1.9 *:*

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = lnx$.

Déterminons les ensembles de définitions $D_{g\circ f}$ et $D_{f\circ g}$ et les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$.

- $D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \in D_f \ \text{ et } f(x) \in D_g\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \in \mathbb{R}_+ \ \text{ et } \sqrt{x} \in \mathbb{R}_+^*\}$
$= \mathbb{R}_+^*.$

- *Pour tout* $x \in D_{g\circ f} = \mathbb{R}_+^*$, *on a :*
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$= ln(\sqrt{x}).$

- $D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \in D_g \ \text{ et } g(x) \in D_f\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \in \mathbb{R}_+^* \ \text{ et } lnx \geq 0\}$
$= [\,1, +\infty\,[\,.$

- *Pour tout* $x \in D_{f\circ g} = [\,1, +\infty\,[\,$, *on a :*
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$= \sqrt{lnx}.$

Proposition 3.1.10 *:*

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur D et D' respectivement avec $f(D) \subseteq D'$.

1• *Si f croissante (resp. décroissante) et g croissante (resp. décroissante) alors $g \circ f$ est croissante.*

2• *Si f croissante (resp. décroissante) et g décroissante (resp. croissante) alors $g \circ f$ est décroissante.*

Preuve :

Suposons f et g croissantes sur D et D' respectivement et montrons que $g \circ f$ est croissante.

Pour tous x_1 et x_2 de D avec $x_1 < x_2$ on a :

$f(x_1) \leq f(x_2)$ car la fonction f est croissante sur D. Puisque g croissante sur D' et $f(D) \subseteq D'$ alors, $g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$. Donc, $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Ce qui montre que $g \circ f$ est croissante.

De même pour les autre cas. ∎

3.1.2 Parité et périodicité de fonctions

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle de domaine de définition D_f.

Définition 3.1.11 *:*

· *On dit que f est une fonction* ***paire*** *sur D_f si*

$$\forall x \in D_f;\ (-x) \in D_f \ \wedge \ f(-x) = f(x).$$

· *On dit que f est une fonction **impaire** sur D_f si*

$$\forall x \in D_f;\ (-x) \in D_f \ \wedge\ f(-x) = -f(x).$$

· *On dit que f est une fonction **périodique** de période $T \in \mathbb{R}^*$ sur D_f si*

$$\forall x \in D_f;\ ((x+T) \in D_f \ \wedge\ f(x+T) = f(x)) \ \wedge\ ((x-T) \in D_f \ \wedge\ f(x-T) = f(x)).$$

Interprétation graphique

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle.

• f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $(Y'Y)$.

• f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine.

• f est périodique et de période T si et seulement si son graphe sur un interval de longueur $|T|$ est invariant par les translations de vecteurs $kT\vec{i}$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $\vec{i}$ le vecteur unitaire par rapport à l'axe des abscisses $(X'X)$.

Exemples 3.1.12 *:*

• *Les fonctions définies par $x \longmapsto x^{2n}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $x \longmapsto cos(\frac{1}{x})$, sont paire sur $\mathbb{R}^*$.*

• *Les fonctions définies par $x \longmapsto x^{2n+1}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $x \longmapsto sin(\frac{1}{x})$, sont impaire sur $\mathbb{R}^*$.*

• *Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto sin(x)$, $x \longmapsto cos(x)$ et $x \longmapsto sin(x) + cos(x)$ sont périodique et de période 2π.*

• *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto x - E(x)$ est périodique et de période 1.*

Proposition 3.1.13 *:*

Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$.

Si f est périodique de période T alors,

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R};\ f(x+kT) = f(x).$$

Preuve :

Soit f une fonction réelle T périodique sur $\mathbb{R}$.

• Par récurrence sur $\mathbb{N}$, Soit $P(n)$ la propriété de périodicité : $\forall x \in \mathbb{R};\ f(x+nT) = f(x)$.

Il est clair que $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

Suposons $P(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, est vraie, et on montre que $P(n+1)$ l'est aussi.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x+(n+1)T) = f((x+nT)+T) = f(x+nT) = f(x) \text{ (d'après l'hypothèse).}$$

Alors, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• Pour tout $k \in \mathbb{Z}_-$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $k = -n$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x+kT) = f(x-nT) = f((x-nT)+nT) \text{ (d'après le résultat qui précède).}$$

Donc $f(x+kT) = f(x)$. Ce qui termine la preuve. ∎

Proposition 3.1.14 *:*

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur D et D' respectivement avec $f(D) \subseteq D'$.

a • Si f est paire sur D alors $g \circ f$ l'est aussi.

b • Si f est impaire sur D et g paire sur D' alors $g \circ f$ est paire sur D.

c • Si f est impaire sur D et g impaire sur D' alors $g \circ f$ est impaire sur D.

d • Si f est T périodique sur D alors la fonction $g \circ f$ est périodique de période T sur D.

Preuve :

a • Soit f une fonction paire sur D, alors pour tout $x \in D$, on a :

$$(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x),$$

donc, $g \circ f$ est paire.

De même pour b • et c •.

d • Soit f une fonction T périodique sur D, alors pour tout $x \in D$, on a :

$$(g \circ f)(x+T) = g(f(x+T)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x),$$

donc, $g \circ f$ est T périodique sur D.

∎

3.1.3 Majorants, minorant et bornes d'une fonction

Définition 3.1.15 *:*

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. On dit que :

- *f est **majorée** sur I s'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I;\ f(x) \leq M$.*
- *f est **minorée** sur I s'il existe une constante $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I;\ f(x) \geq m$.*
- *f est **bornée** sur I si f est à la fois majorée et minorée sur I. On peut également écrire*

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I;\ |f(x)| \leq M.$$

Exemples 3.1.16 :

- *Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto sin(x)$, $x \longmapsto cos(x)$ et $x \longmapsto sin(x) \times cos(x)$, sont majorées par 1 et minorées par -1. Donc sont des fonctions bornées.*
- *La fonction définie par $x \longmapsto \frac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$, est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$.*

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}(|x|-1)^2 \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad |x| \leq \tfrac{1}{2}(x^2+1)\\ &\Longleftrightarrow \quad |f(x)| \leq \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

Borne supérieure, borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition 3.1.17 :

*On appelle **borne supérieure** (resp. **borne inférieure**) d'une partie E de $\mathbb{R}$ si elle existe, le **plus petit des majorants** (resp. le **plus grand des minorants**) de E, on la note $supE$ (resp. $infE$).*

Exemple 3.1.18 :

- *Pour $I =]-2, 1]$, on a $supI = 1$ et $infI = -2$.*

3.1.4 Borne supérieure, borne inférieure d'une fonction

Définition 3.1.19 :

*Soit I une partie de $\mathbb{R}$ non vide. On appelle **borne supérieure** (resp. **borne inférieure**) d'une fonction définie sur I si elle existe, le **plus petit des majorants** ou **la borne supérieure** (resp. le **plus grand des minorants** ou **la borne inférieure**) de $f(I)$, et on note $\sup\limits_{x\in I} f(x)$ (resp. $\inf\limits_{x\in I} f(x)$). On a donc $\sup\limits_{x\in I} f(x) = sup\{f(x)\ /\ x \in I\}$ (resp. $\inf\limits_{x\in I} f(x) = inf\{f(x)\ /\ x \in I\}$).*

Exemples 3.1.20 :

- *Soit $f : x \longmapsto 2e^x - 1$, alors, $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}}(2e^x - 1) = -1$. Car $f(\mathbb{R}) =]-1, +\infty]$.*
- *Soit $g : x \longmapsto lnx - x$, alors, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+^*}(lnx - x) = -1$. Car $g(\mathbb{R}_+^*) =]-\infty, -1]$.*

3.1.5 Limites de fonctions réelles de variable réelle

Limite d'une fonction en un réel x_0 fini

Définition 3.1.21 *:*

Soient f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

• *On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0 (ou $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0) si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0;\ \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$.

• *On dit que f tend vers $+\infty$ en x_0 si*

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \delta > 0;\ \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \geq A.$$

On note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

• *On dit que f tend vers $-\infty$ en x_0 si*

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \delta > 0;\ \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \leq -A.$$

On note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Exemples 3.1.22 *:*

1)• *Soit* $f : x \in \,]-1, 2[\, \longmapsto \dfrac{2x+2}{2x+3}$.

Montrons que $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} f(x) = \dfrac{4}{5}$.

Pour $x \in \,]-1, 2[$ *on a :*

$$1 < 2x + 3 < 7 \Longrightarrow |2x+3| < 7 \Longrightarrow \frac{1}{|2x+3|} < \frac{1}{7} \Longrightarrow \left| f(x) - \frac{4}{5} \right| \leq \frac{2}{35} |x - 1| < 2 |x - 1|.$$

donc pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $\delta > 0$ (par exemple $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$) tel que

$$\forall x \in I, |x - 1| \leq \delta = \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow \left| f(x) - \frac{4}{5} \right| \leq \varepsilon.$$

2)• *Soit* $g : x \in \,]-1, +\infty[\, \longmapsto \dfrac{2}{|x+3|}$.

Montrons que $\lim\limits_{x \longrightarrow -3} g(x) = +\infty$.

Pour tout $A > 0$ *on peut trouver* $\delta > 0$ *(par exemple* $\delta = \dfrac{2}{A}$ *) tel que*

$$\forall x \in I, |x - (-3)| \leq \delta = \frac{2}{A} \Longrightarrow |g(x)| \geq A.$$

Limite d'une fonction en infini

Définition 3.1.23 *:*

$\otimes$ *Soient* f *une fonction réelle définie sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *n'est pas majorée (c'est-à-dire elle est définie au voisinage de* $+\infty$ *).*

- *On dit que* f *tend vers* $\ell \in \mathbb{R}$ *en* $+\infty$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R}_+^*;\ \forall x \in I, x \geq B \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell.$

- *On dit que* f *tend vers* $+\infty$ *en* $+\infty$ *si*

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists B \in \mathbb{R}_+^*;\ \forall x \in I, x \geq B \Longrightarrow f(x) \geq A.$$

On note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$

- *On dit que* f *tend vers* $-\infty$ *en* $+\infty$ *si*

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists B \in \mathbb{R}_+^*;\ \forall x \in I, x \geq B \Longrightarrow f(x) \leq -A.$$

On note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$

$\otimes$ *Soient* f *une fonction réelle définie sur un intervalle* I' *de* $\mathbb{R}$ *n'est pas minorée (c'est-à-dire elle est définie au voisinage de* $-\infty$ *).*

- *On dit que* f *tend vers* $\ell \in \mathbb{R}$ *en* $-\infty$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R}_+^*;\ \forall x \in I', x \leq -B \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell.$

- *On dit que* f *tend vers* $+\infty$ *en* $-\infty$ *si*

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists B \in \mathbb{R}_+^*;\ \forall x \in I', x \leq -B \Longrightarrow f(x) \geq A.$$

On note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

• *On dit que* f *tend vers* $-\infty$ *en* $-\infty$ *si*

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists B \in \mathbb{R}_+^*;\ \forall x \in I', x \leq -B \Longrightarrow f(x) \leq -A.$$

On note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Exemple 3.1.24 *:*

• *Soit* $h : x \in \,]-\infty, 2[\, \longmapsto \dfrac{2x}{x-3}$.

Montrons que $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 2$.

Pour tout $B > 0$ *on peut trouver* $B > 0$ *(par exemple* $B = \dfrac{6}{\varepsilon} - 3$ *) tel que*

$$\forall x \in I, x \leq -B = -\frac{6}{\varepsilon} + 3 \Longrightarrow |h(x) - 2| \leq \varepsilon.$$

Limite à droite, limite à gauche en un point

Soient f une fonction définie sur D, $\alpha > 0$ et $]\,x_0 - \alpha, x_0\,[\, \cup \,]\,x_0, x_0 + \alpha\,[\, \subset D$.

$*$ On appelle limite à droite de f en x_0 si la restriction de f à $]\,x_0, x_0 + \alpha\,[$ admet une limite ℓ (finie ou infinie) en x_0. On note alors : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ (ou $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow x_0 \\ >}} f(x)$). Précisement

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow x_0 \\ >}} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in D, x_0 < x < x_0 + \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

$*$ On appelle limite à gauche de f en x_0 si la restriction de f à $]\,x_0 - \alpha, x_0\,[$ admet une limite ℓ' (finie ou infinie) en x_0. On note alors : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ (ou $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow x_0 \\ <}} f(x)$).

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow x_0 \\ <}} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in D, x_0 - \delta < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Remarque 3.1.25 *:*

Si f *admet* ℓ *comme une limite à gauche et à droite en* x_0 *et* $f(x_0) = \ell$ *alors* ℓ *est la limite de* f *en* x_0 *.*

Exemples 3.1.26 *:*

1)• *La fonction* $E : x \in \mathbb{R} \longmapsto E(x)$ *(la fonction partie entière),*

n'admet pas de limite en n *où* $n \in \mathbb{Z}$*. Car pour tout* $x \in \,]\,n, n+1\,[$ *on a* $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow n \\ >}} E(x) = n$ *et pour tout* $x \in \,]\,n-1, n\,[$ *on a* $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow n \\ <}} E(x) = n - 1$.

2)• *La fonction* $f : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \dfrac{1}{|x|}$
a une limite à gauche et une limite à droite en 0 *et* $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ <}} f(x) = +\infty.$

3)• *La fonction* $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x^2 + 1 & si\ x > 1 \\ -2 & si\ x = 1 \\ 3 - x^3 & si\ x < 1. \end{cases}$
n'a pas de limite en 1*. Car* $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 1 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 1 \\ >}} (x^2 + 1) = \lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 1 \\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 1 \\ >}} (3 - x^3) = 2$ *et* $g(1) = -2$*.*

Proposition 3.1.27 *:*

La limite d'une fonction en un point si elle existe, elle est unique.

Preuve :

Supposons que ℓ et ℓ' deux limite distinctes de f en x_0. D'après la définition de la limite on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_1 > 0;\ \forall x \in D_f, |x - x_0| \leq \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon,$$

et

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_2 > 0;\ \forall x \in D_f, |x - x_0| \leq \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - \ell'| \leq \varepsilon.$$

On choisit $\varepsilon < \dfrac{|\ell - \ell'|}{2}$ et prenons $\delta_\varepsilon = min\{\delta_1, \delta_2\}$, alors pour tout $0 < \varepsilon < \dfrac{|\ell - \ell'|}{2}$

$$\forall x \in D_f, x \in \,]\, x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon \,[\, \Longrightarrow f(x) \in \,]\, \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon \,[\, \cap \,]\, \ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon \,[\, .$$

ce qui est absurde, car :

dans le cas $\ell < \ell'$ on a $\varepsilon < \frac{\ell' - \ell}{2} \Longrightarrow \ell + \varepsilon < \ell' - \varepsilon$,

et dans le cas $\ell' < \ell$ on a $\varepsilon < \frac{\ell - \ell'}{2} \Longrightarrow \ell' + \varepsilon < \ell - \varepsilon$.

On en déduit que la limite est unique. ■

3.1.6 Convergence et divergence d'une fonction

Définition 3.1.28 *:*

On dit que f *converge en* x_0 *s'il existe un réel* ℓ *fini tel que* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$*.*

Sinon, on dit que f *diverge en* x_0*.*

Théorème 3.1.29 *:*

Si f *converge en* x_0 *alors* f *est bornée au voisinage de* x_0*.*

Preuve :

Supposons $\underset{x \longrightarrow x_0}{lim} f(x) = \ell$. Pour $\varepsilon < 1$, il existe $\delta > 0$; $\forall x \in \,]\, x_0 - \delta, x_0 - \delta\, [\,$, $|f(x) - \ell| < 1$, et pour tout $x \in \,]\, x_0 - \delta, x_0 - \delta\, [$, on a $|f(x)| = |f(x) - \ell + \ell| \leq |f(x) - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|$. Ainsi f est bornée au voisinage de x_0. ∎

Attention : La réciproque fausse, la fonction $x \longmapsto cos(\frac{1}{x^2})$ est bornée au voisinage de 0, mais cette fonction est diverge en 0.

3.1.7 Opérations sur les limites

Théorème 3.1.30 *:*

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur $D \subseteq \mathbb{R}$ ayant pour limites respectives ℓ et ℓ' (finies ou infinies) lorsque $x \longrightarrow x_0$ où x_0 un point de D ou une extrémité de D et $\ell + \ell'$, $\ell \times \ell'$ et $\frac{\ell}{\ell'}$ sont définies (existes) dans $\overline{\mathbb{R}}$.

$$1 \bullet \quad \underset{x \longrightarrow x_0}{lim} (f(x) + g(x)) = \underset{x \longrightarrow x_0}{lim} f(x) + \underset{x \longrightarrow x_0}{lim} g(x) = \ell + \ell'.$$

$$2 \bullet \quad \underset{x \longrightarrow x_0}{lim} (f(x) \times g(x)) = \left(\underset{x \longrightarrow x_0}{lim} f(x) \right) \times \left(\underset{x \longrightarrow x_0}{lim} g(x) \right) = \ell \times \ell'.$$

$$3 \bullet \quad \underset{x \longrightarrow x_0}{lim} \left(\frac{1}{f(x)} \right) = \frac{1}{\underset{x \longrightarrow x_0}{lim} f(x)} = \frac{1}{\ell}.$$

Preuve :

Ecrivons les définitions des limites :

$$\underset{x \longrightarrow x_0}{lim} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0; \forall x \in D, \ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

$$\underset{x \longrightarrow x_0}{lim} g(x) = \ell' \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta' > 0; \forall x \in D, \ |x - x_0| < \delta' \Longrightarrow |g(x) - \ell'| < \varepsilon.$$

1• Pour tout $x \in D$ on a :

$$|(f+g)(x) - (\ell + \ell')| = |(f(x) - \ell) + (g(x) - \ell')| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - \ell'|.$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta'' = min \{\delta, \delta'\} > 0; \ |x - x_0| < \delta'' \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \ \ et \ \ |g(x) - \ell'| < \varepsilon.$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta'' > 0; \ |x - x_0| < \delta'' \Longrightarrow |f(x) - \ell| + |g(x) - \ell'| < 2\varepsilon.$$

Si on choisit $0 < \varepsilon < \dfrac{\varepsilon'}{2}$, alors on trouve

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists \delta'' > 0;\ |x - x_0| < \delta'' \Longrightarrow \left|(f+g)(x) - (\ell + \ell')\right| < \varepsilon'.$$

Donc, par dťefinition, on a bien : $\underset{x \longrightarrow x_0}{lim} (f+g)(x) = \ell + \ell'$.

2• Pour tout $x \in D$ on a :

$$\begin{aligned}
|(f \times g)(x) - (\ell \times \ell')| &= |f(x) \times g(x) - \ell g(x) + \ell g(x) - \ell\ell'| \\
&= |g(x)(f(x) - \ell) + \ell(g(x) - \ell')| \\
&\leq |g(x)|\,|(f(x) - \ell)| + |\ell|\,|(g(x) - \ell')| \\
&\leq \varepsilon(|g(x)| + |\ell|).
\end{aligned}$$

Comme $\ell \in \mathbb{R}$ on a $\ell' - \varepsilon < g(x) < \ell' + \varepsilon$, c'est-à-dire, pour tout $x \in \left]\, x_0 - \delta', x_0 + \delta' \,\right[$;

$|g(x)| < max\left\{|\ell' - \varepsilon|, |\ell' + \varepsilon|\right\} = M$.

On deduit que si

$$|x - x_0| < \delta'' \ \ alors\ \left|(f \times g)(x) - (\ell \times \ell')\right| < \varepsilon(M + |\ell|).$$

Si on choisit $0 < \varepsilon < \dfrac{\varepsilon'}{M + |\ell|}$, on obtient

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists \delta'' > 0;\ |x - x_0| < \delta'' \Longrightarrow \left|(f \times g)(x) - (\ell \times \ell')\right| < \varepsilon'.$$

Donc, on a : $\underset{x \longrightarrow x_0}{lim} (f \times g)(x) = \ell \times \ell'$.

3• Pour tout $x \in D$ on a :

$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{1}{f}\right)(x) - \frac{1}{\ell}\right| &= \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| \\
&= \left|\frac{\ell - f(x)}{\ell.f(x)}\right| \\
&= \frac{|\ell - f(x)|}{|\ell.f(x)|}.
\end{aligned}$$

Comme $\ell \in \mathbb{R}$ on a $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$, c'est-à-dire, pour tout $x \in \left]\, x_0 - \delta, x_0 + \delta \,\right[$;

$|f(x)| > min\left\{|\ell - \varepsilon|, |\ell + \varepsilon|\right\} = m$.

On deduit que si

$$|x - x_0| < \delta \ \ alors\ \left|\left(\frac{1}{f}\right)(x) - \frac{1}{\ell}\right| < \frac{\varepsilon}{m\,|\ell|}.$$

Si on choisit $0 < \varepsilon < \dfrac{\varepsilon''}{m.\,|\ell|}$, on obtient

$$\forall \varepsilon'' > 0,\ \exists \delta > 0;\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow \left|\left(\frac{1}{f}\right)(x) - \frac{1}{\ell}\right| < \varepsilon''.$$

Donc, on a : $\underset{x \longrightarrow x_0}{lim} \left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = \dfrac{1}{\ell}$. ■

3.1.8 Limites de fonctions et limites de suites

Proposition 3.1.31 *:*

Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On a $\underset{x \longrightarrow x_0}{lim} f(x) = \ell$ si et seulement si pour toute suite (u_n) de D convergeant vers x_0, $\underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} f(u_n) = \ell$.

Preuve :

Supposons $\underset{x \longrightarrow x_0}{lim} f(x) = \ell$, et (u_n) une suite de D tel que $\underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} u_n = x_0$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f de limite ℓ en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in D, \ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Puisque u_n convergeant vers x_0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, \ |x - x_0| < \delta$. On a alors

$$\forall n \geq N, \ |f(u_n) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Ainsi $f(u_n)$ convergeant vers ℓ.

Reciproquement : raisonnons par l'absurde.

Suposons que pour toute suite (u_n) de D telle que $\underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} u_n = x_0$, $\underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} f(u_n) = \ell$ et que f n'admet pas ℓ comme limite en x_0.

Nous avons que (f n'admet pas ℓ comme limite en x_0) s'écrit

$$\exists \varepsilon > 0, \ \forall \delta > 0, \ \exists x \in D; \ |x - x_0| < \delta \ et \ |f(x) - \ell| \geq \varepsilon.$$

Prenons $\delta = \dfrac{1}{n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$, on obtient un élément u_n de D tel que

$$\forall n \geq N, \ \exists u_n \in D; \ |u_n - x_0| < \frac{1}{n+1} \ et \ |f(u_n) - \ell| \geq \varepsilon.$$

Cela signifie que la suite $u_n \in D$ converge vers x_0, mais pour laquelle la suite de terme général $f(u_n)$ ne converge pas vers ℓ. Cela contredit notre hypothèse. ■

Remarque 3.1.32 *:*

Pour montrer qu'une fonction f n'a pas de limite en x_0, soit en exhiband deux suites (u_n) et (v_n) tel que :

$$\underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} u_n = \underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} v_n = x_0 \ \ mais \ \underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} f(u_n) \neq \underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} f(v_n).$$

Ou on trouve une suite (u_n) converge vers x_0 et pour laquelle la suite de terme général $f(u_n)$ diverge.

Exemples 3.1.33 *:*

1) La fonction $f : x \longmapsto sin\frac{2}{x}$ n'a pas de limite en 0. Car la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{4}{n\pi}$ converge vers 0, mais la suite de terme général $f(u_n) = (-1)^n$ diverge.*

2) La fonction $g : x \longmapsto cos(2x)$ n'a pas de limite en $+\infty$. Considérons la suite (v_n) de terme général $v_n = n\pi$ tend vers $+\infty$ et la suite (w_n) de terme général $w_n = \frac{(2n+1)\,\pi}{2}$ tend vers $+\infty$ mais la suite de terme général $g(v_n) = cos(2n\pi)$ converge vers 1 et la suite de terme général $g(w_n) = cos((2n+1)\,\pi)$ converge vers -1.*

3.1.9 Limite d'une fonction composée

Soient D et D' deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ non vides, x_0 un point de D ou une extrémité de D, ℓ un réel fini ou infini, f une fonction de D dans $\mathbb{R}$, g une fonction de D' dans $\mathbb{R}$ tel que $f(D) \subset D'$.
Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow b} g(x) = \ell$ où b est un point ou une extrémité de D' alors, $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (gof)\,(x) = \ell$.

3.1.10 Théorèmes de comparaison

On donne maintenant une proposition très importante qui signifie qu'on peut passer à la limite dans une inégalité large.

Proposition 3.1.34 *:*

Soient f, g et h trois fonctions de D dans $\mathbb{R}$, x_0 un point de D ou une extrémité de D et ℓ et ℓ' deux réels finis ou infinis.

$\otimes$ *Si* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = \ell'$ *et pour tout* $x \in D$; $f(x) \leq g(x)$ *alors* $\ell \leq \ell'$.

$\otimes$ *Si* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$ *et pour tout* $x \in D$; $f(x) \leq g(x)$ *alors* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = +\infty$.

$\otimes$ *Si* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = -\infty$ *et pour tout* $x \in D$; $f(x) \leq g(x)$ *alors* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

$\otimes$ *Si* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} h(x) = \ell'$ *et pour tout* $x \in D$; $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *alors* $\ell \leq \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) \leq \ell'$.

Proposition 3.1.35 *:*

Si f est une fonction bornée au voisinage de x_0 et si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) \times g(x) = 0$. C'est-à-dire, f est négligeable devant g au voisinage de x_0.
On peut écrire aussi,

$$\forall x \in D_f \cap D_g \cap \left]\, x_0 - \alpha, x_0 + \alpha \,\right[\,,\ \forall \varepsilon > 0;\ |f(x)| \leq \varepsilon\,|g(x)|\,.$$

Exemple 3.1.36 *:*

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0} x^2 \cos\frac{1}{x} = 0$ *car* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} x^2 = 0$ *et la fonction* $x \longmapsto \cos\dfrac{1}{x}$ *est bornée au voisinage de* 0.

Remarque 3.1.37 *:*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ *on a :*

Quand $x \longrightarrow +\infty$,

$$e^{-x} << \frac{1}{x^n} << \frac{1}{lnx} << lnx << \sqrt{x} << x^n << e^x.$$

Quand $x \longrightarrow 0^+$,

$$x^n << \sqrt{x} << \frac{1}{lnx} << lnx << \frac{1}{\sqrt{x}} << \frac{1}{x^n}.$$

3.2 Continuité des fonctions réelles d'une variable réelle

Définition 3.2.1 *:*

Soient f *une fonction de* I *dans* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in I$.

- *On dit que* f *est continue en* x_0 *si elle est définie en* x_0 *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Autrement dit si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0;\ \forall x \in D_f,\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

- *On dit que* f *est continue sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *si* f *est continue en tout point de* I.

On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ *ou* $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions définies et continues sur* I *à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

Exemples 3.2.2 *:*

1) *La fonction*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases} \end{array}$$

continue en 0, *car* $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0 \\ x\neq 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0 \\ x\neq 0}} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$.

2) *Par contre, la fonction partie entière* E *n'est pas continue aux points* $x_0 \in \mathbb{Z}$, *puisqu'elle n'admet pas de limite en ces points. Mais elle est continue sur* $[\, n, n+1\, [$ *où* $n \in \mathbb{Z}$.

3) La fonction $f : x \longmapsto \sin x$ *continue en tout point* $x_0 \in \mathbb{R}$. *En effet,*

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= 2\left|\sin \frac{x-x_0}{2}\right| \left|\cos \frac{x+x_0}{2}\right| \\ &\leq 2\left|\sin \frac{x-x_0}{2}\right|, \quad car\ (\forall x \in \mathbb{R};\ |cosx| \leq 1) \\ &\leq |x - x_0|, \quad car\ (sinx \approx x \ \ au\ voisinage\ de\ 0). \end{aligned}$$

On a alors pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta = \varepsilon$ *tel que*

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |\sin x - \sin x_0| \leq \varepsilon.$$

3.2.1 La continuitée à droite et à gauche

Définition 3.2.3 *:*

Soient f *une fonction définie sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in I$.

• *On dit que* f *est continue à droite en* x_0 *si* $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} x_0} f(x) = f(x_0)$.

Autrement dit si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0;\ \forall x \in I;\ 0 < x - x_0 \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

• *On dit que* f *est continue à gauche en* x_0 *si* $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} x_0} f(x) = f(x_0)$.

Autrement dit si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0;\ \forall x \in I;\ 0 < x_0 - x \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Remarque 3.2.4 *:*

La fonction f *est continue à droite et à gauche en* x_0 *si et seulement, si* f *est continue en* x_0.

Exemples 3.2.5 *:*

1) La fonction partie entière E *continue à droite aux points* $x_0 \in \mathbb{Z}$, *et discontinue à gauche aux points* $x_0 \in \mathbb{Z}$. *Car* $\lim\limits_{\substack{x \overset{>}{\longrightarrow} x_0 \\ x_0 \in \mathbb{Z}}} E(x) = x_0 = E(x_0)$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \overset{<}{\longrightarrow} x_0 \\ x_0 \in \mathbb{Z}}} E(x) = x_0 - 1 \neq E(x_0)$.

2) La fonction g *définie sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *par*

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{tanx}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

elle est continue en 0, *puisque* $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} x_0} \dfrac{tanx}{x} = \lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} x_0} \dfrac{tanx}{x} = 1 = g(0)$.

3.2.2 Les opétation sur les fonctions continues

Théorème 3.2.6 *:*

$\otimes$ *Soient f et g deux fonctions réels définies sur D et continues en un point $x_0 \in D$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

$*$ *λf, $f+g$ et $f \times g$ sont continues en x_0.*

$*$ *Si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.*

$\otimes$ *Soient f et g deux fonctions réels définies sur I et J respectivement telles que $f(I) \subset J$.*

Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Preuve : La preuve est une résultat des propriétés des limites. ∎

Théorème 3.2.7 *:(**Théorème de Weierstrass**)*

Toute fonction réelle f continue sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes, autrement dit admet un minimum et un maximum. C'est-à-dire

$\exists c, d \in [a,b]\,;\ \forall x \in [a,b]\,, f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ *ou* $f(d) \leq f(x) \leq f(c)$.

3.2.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3.2.8 *:*

Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

Preuve : :

Montrons le théorème dans le cas où $f(a) < f(b)$. Suposons que k un réel tel que $f(a) \leq k \leq f(b)$.

1. l'ensemble $F = \{x \in [a,b]\ /\ f(x) \geq k\}$ est non vide (car $b \in F$) et il est minoré (par a) : il admet donc une borne inférieure c telle que $c > a$. Montrons que $f(c) = k$.

2. Montrons tout d'abord que $f(c) \geq k$. Comme $c = infF$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in F;\ c \leq x_\varepsilon < c + \varepsilon, \tag{3.1}$$

d'après (3.1), pour $n \in \mathbb{N}^*$ en prenant $\varepsilon = \frac{1}{n}$ on a,

$$\exists x_n \in F;\ c \leq x_n < c + \frac{1}{n}.$$

On en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers c. Comme f est continue en c, donc la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $f(c)$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f(x_n) \geq k$ car $x_n \in F$. Donc, par passage à lalimite, on trouve $f(c) \geq k$.

3. Montrons à présent que $f(c) \leq k$. Considérons la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $y_n = c - \frac{c-a}{n}$. Ce suite elle est strictement croissante et converge vers c, car $c > a$. Comme f est continue en c, donc la suite $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $f(c)$. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f(y_n) \leq k$ car ($c = infF$ cela implique $y_n \notin F$). Donc, par passage à lalimite, on trouve $f(c) \leq k$.

Finalement, on a $f(c) \geq k$ et $f(c) \leq k$. Cela implique $f(c) = k$. ∎

Exemple 3.2.9 *:*

La fonction $f : x \longmapsto tanx + x - 1$ admet au moins un zéro sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Car la fonction f est continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $f(0) = -1$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ et 0 compris entre $f(0)$ et $f(\frac{\pi}{4})$. D'apres le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un $c \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ tel que $f(c) = 0$.

3.2.4 Fonction continue strictement monotone

Théorème 3.2.10 *:*

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I de bornes a et b (finies ou infinies) alors,

1) *$f(I)$ est un intervalle de même type de I et dont les extrémités sont les limites de f aux extrémités de I.*

2) *Pour tout réel k strictement compris entre les limites de f en a et en b, il existe un unique c de I tel que $f(c) = k$.*

3) *f réalise une bijection de I vers $f(I)$.*

4) *De plus, son application réciproque $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ est continue, de même monotonie que f.*

Preuve :

1) • Soient $y_1, y_2 \in f(I)$, $y_1 \leq y_2$. Montrons que si $y \in [y_1, y_2]$, alors $y \in f(I)$. Par hypothèse, il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ et donc y est compris entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue, il existe donc $x \in I$ tel que $y = f(x)$, et ainsi $y \in f(I)$.

• On supose que $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$ et f est strictement croissante sur I.

Puisque f continue strictement monotone sur I alors les limites de f en a et b existent dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) = \inf\limits_{x\in]a,b[} f(x)$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow b} f(x) = \sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$.

On a alors pour tout $x \in]a, b[$; $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) < f(x) < \lim\limits_{x\longrightarrow b} f(x)$ car f est strictement croissante. Ainsi

$$f(]a, b[) \subset]\lim_{x\longrightarrow a} f(x), \lim_{x\longrightarrow b} f(x)[.$$

Inversement :

Soit $y \in]\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x), \lim\limits_{x\longrightarrow b} f(x)[$. Il existe $x_1, x_2 \in]a, b[$ tel que $f(x_1) < y < f(x_2)$.

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[x_1, x_2]$ on trouve $x \in [x_1, x_2] \subset]a, b[$ tel que $y = f(x)$. Ainsi

$$]\lim_{x \longrightarrow a} f(x), \lim_{x \longrightarrow b} f(x)[\subset f\left(]a, b[\right).$$

Finalement

$$f\left(]a, b[\right) =]\lim_{x \longrightarrow a} f(x), \lim_{x \longrightarrow b} f(x)[.$$

Dans le cas ou $I = [a, b[\subset \mathbb{R}$.

La continuité à droite de f en a impose $\lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow a}} f(x) = f(a)$. Et comme

$$f\left([a\ , b\ [\right) = f\left(\{a\} \cup]a, b[\right) = \{f(a)\} \cup f\left(]a, b[\right) = \{f(a)\} \cup \left]\ \lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow a}} f(x), \lim_{x \longrightarrow b} f(x)\right[\ = \left[f(a)\ , \lim_{x \longrightarrow b} f(x)\right[$$

3) Suposons pour fixer les idées que f est strictement croissante sur un intervalle I. Dans le cas f est strictement décroissante sur I se montre de la même manière.

Soient $(x_1, x_2) \in I^2$ tels que $x_1 \neq x_2$ alors on a $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$. Puisque f est strictement croissante sur I, cela implique que $f(x_1) < f(x_2)$ ou $f(x_1) > f(x_2)$, dans tout les cas on a $f(x_1) \neq f(x_2)$. Donc, par conséquent f est injective.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent par f, c'est-à-dire que la fonction f est surjective.

Ceci montre bien que f est bijective.

4) • Montrons que si f est strictement croissante sur un intervalle I alors f^{-1} est strictement croissante sur $f(I)$.

Soient $(y_1, y_2) \in f(I)^2$ tels que $y_1 < y_2$ et soient $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$, alors on a $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Si $f(x_1) < f(x_2)$, comme f est strictement croissante sur I, alors on a $x_1 < x_2$. Cela montre que f^{-1} est strictement croissante sur $f(I)$.

• Montrons que f^{-1} est continue en $y_0 \in f(I)$.

Il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in f(I)$;

$$|y - y_0| < \delta \Longrightarrow \left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right| \leq \varepsilon.$$

Soit $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ comme f est continue et strictement croissante sur I on a

$f(x_0 - \varepsilon) < f(x) < f(x_0 + \varepsilon)$ [en prenant ε assez petit pour que l'on ait $x_0 - \varepsilon$ et $x_0 + \varepsilon$ restent dans I].

Considérons $\alpha = y_0 - f(x_0 - \varepsilon)$ et $\beta = f(x_0 + \varepsilon) - y_0$. On a $f^{-1}(y_0 - \alpha) = x_0 - \varepsilon$ et $f^{-1}(y_0 + \beta) = x_0 + \varepsilon$.

Pour $y \in [y_0 - \eta, y_0 + \eta]$ où $\delta = min\{\alpha, \beta\}$, on a $y_0 - \alpha < y < y_0 + \beta$. Puisque f^{-1} est strictement croissante

$$\begin{aligned} f^{-1}(y_0 - \alpha) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 + \beta) &\iff x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon \\ &\iff f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui montre que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = min\{\alpha, \beta\} > 0, \forall y \in f(I); |y - y_0| < \delta \Longrightarrow \left| f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) \right| \leq \varepsilon.$$

■

3.2.5 Prolongement par continuité

Définition 3.2.11 *:*

Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I - \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

⊗ *On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0. Notons alors $\ell = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$.*

⊗ *On définit alors la fonction $\widetilde{f}$*

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{f}: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \widetilde{f}(x) & = f(x) \quad \text{si } x \in I - \{x_0\} \\ \widetilde{f}(x) & = \ell \qquad\ \ \text{si } x = x_0. \end{cases} \end{array}$$

Alors $\widetilde{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

Exemples 3.2.12 *:*

1. *Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = xcos\frac{1}{x}$. Voyons si f admet un prolongement par continuité en 0 ?*

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $|f(x)| \leq |x|$, on en déduit que f tend vers 0 en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \tilde{f}(x) & = xcos\frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \\ \tilde{f}(x) & = 0 \qquad\quad \text{si } x = 0. \end{cases}$

2. *La fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $g(x) = (x-1)\, ln\,|x-1|$, prolongeable par continuité en 1 et son prolongement est la fonction $\tilde{g}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :* $\begin{cases} \tilde{g}(x) & = (x-1)\, ln\,|x-1| \quad \text{si } x \in \mathbb{R} - \{1\} \\ \tilde{g}(x) & = 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{si } x = 1. \end{cases}$

3.3 Dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle

3.3.1 Dérivées d'une fonction réelle

Définition 3.3.1 *:*

Soient f une fonction réelle définie sur un intervale ouvert I et x_0 un point de I.

I) *On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si cette limite $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie. Cette limite notée $f'(x_0)$ est appelée nombre dérivée de f en x_0.*

II) *On dit que f est dérivable sur un intervale ouvert $J\subset I$ si elle est dérivable en tout point $x\in J$.*

Exemples 3.3.2 *:*

1) *La fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x-1}$ est dérivable en tout point $x_0\in]1,+\infty[$.*

En effet, pour tout $x_0\in]1,+\infty[$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x_0-1}}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x_0-1}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x_0-1}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x_0-1}\right)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x_0-1}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2) *La fonction g définie sur $I=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par $g(x)=tanx$ est dérivable en tout point $x_0\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.*
En effet, pour tout $x_0\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$,

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\longrightarrow x_0\\ x_0\in I}}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{\substack{x\longrightarrow x_0\\ x_0\in I}}\frac{tanx-tanx_0}{x-x_0}\\
&= \lim_{\substack{x\longrightarrow x_0\\ x_0\in I}}\frac{sinx.cosx_0-sinx_0.cosx}{(x-x_0)(cosx.cosx_0)}\\
&= \lim_{\substack{x\longrightarrow x_0\\ x_0\in I}}\frac{sin(x-x_0)}{(x-x_0)(cosx.cosx_0)}\\
&= \frac{1}{(cosx_0)^2}\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

3) *La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par* $h:x\longmapsto\begin{cases} h(x) = xcos\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x\neq 0\\ h(x)=0 & si\ x=0,\end{cases}$

n'est pas dérivable en 0*. Car*

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{h(x)-h(0)}{x} &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad (\text{ n'a pas de limite. })\end{aligned}$$

4. La fonction k *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $k(x)=x^n$ *où* $n\in\mathbb{N}^*$ *est dérivable en tout point* $x_0\in\mathbb{R}$*, et que* $f'(x_0)=n.x_0^{n-1}$*. Car*

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{k(x)-k(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{\substack{x\longrightarrow x_0\\ x\neq x_0}}\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}\\ &= \lim_{\substack{x\longrightarrow x_0\\ x\neq x_0}}\left(x^{n-1}+x^{n-2}.x_0+\cdots+x_0^{n-2}.x+x_0^{n-1}\right)\\ &= n.x_0^{n-1}.\end{aligned}$$

Remarque 3.3.3 *:*
La dérivé de la fonction f *en* x_0 *est parfois notée* $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ *et par le changement de variable* $x-x_0=h$*, on a :*

$$f'(x_0)=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

.

3.3.2 Interprétation géométrique du nombre dérivé

Le nombre dérivé $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse x_0. Et l'équation de la tangente dans ce point est : $y=f'(x_0)\,(x-x_0)+f(x_0)$.

Proposition 3.3.4 *:*
Soient $f:]a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$ *et* $x_0\in]a,b[$*. Il y a équivalence entre les trois énoncés suivants :*

(i) f *est dérivable en* x_0*.*

(ii) *Il existe un réel* ℓ *qui sera* $f'(x_0)$ *et une fonction* ε *définie sur* $]a,b[$ *tels que*

$$f(x)=f(x_0)+\ell.(x-x_0)+(x-x_0)\varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x\longrightarrow x_0}\varepsilon(x)=0.$$

(iii) *Il existe un réel* ℓ *tel que* $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-\ell.(x-x_0)}{x-x_0}=0,$ *et* $\ell=f'(x_0)$*.*

Preuve : :

(i) $\Longrightarrow$ **(ii)**. Il suffit de poser $\begin{cases}\varepsilon(x) &= \dfrac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0).(x-x_0)}{x?x_0} & \text{si } x\neq x_0\\ \varepsilon(x) &= 0 & \text{si } x=x_0.\end{cases}$

(ii) $\Longrightarrow$ **(iii)** et **(iii)** $\Longrightarrow$**(i)**. Sont évident. ∎

3.3.3 Dérivabilité et continuité

Théorème 3.3.5 *:*

(1) Toute fonction f dérivable en un point x_0, alors elle est continue en ce point.

(2) Si une fonction f n'est pas continue en un point x_0, alors elle n'est pas dérivable en ce point.

Preuve : :

(1) Supposons f dérivable en x_0 et montrons qu'elle est aussi continue en ce point.

Pour $x \neq x_0$, nous avons $f(x) - f(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$. En passant à la limite dans cette identité, on trouve

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \longrightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)(x - x_0) = f'(x_0).0 = 0.$$

C'est-à-dire $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Ainsi f est continue en x_0. ∎

3.3.4 Dérivée à droite et à gauche

Définition 3.3.6 *:*

Soient f une fonction réelle définie sur un intervale ouvert I et x_0 un point de I.
On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0 si $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$
(resp. $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$) existe et est finie.

Exemples 3.3.7 *:*

•) La fonction $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{x^2(1 - |x|)}$ est dérivable à droite et à gauche en 0 et $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$

•) La fonction $g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = |1 - x^2|\sqrt{x}$ est dérivable à droite et à gauche en 1 et $g'_d(1) = 2$ et $g'_g(1) = -2$.

Propriété 3.3.8 *:*

f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

3.3.5 Fonction dérivée

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

La **fonction dérivée** de f, est la fonction notée f' qui, à chaque $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x

$(\ f'(x))$, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{rccc} f': & I\subset\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x). \end{array}$$

Exemples 3.3.9 *:*

a) *La fonction tan dérivable sur* $I_k =]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi[$ *avec* $k\in\mathbb{Z}$ *et sa fonction dérivée est* $\tan'$ *définie sur* I_k *par :*

$$tan^{'}(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x.$$

b) *La fonction cot dérivable sur* $j_k =]k\pi, (k+1)\pi[$ *avec* $k\in\mathbb{Z}$ *et sa fonction dérivée est*cot' *définie sur* j_k *par :*

$$cot^{'}(x) = -\frac{1}{sin^2 x} = -1-cot^2 x.$$

3.3.6 Opérations sur les fonction dérivables

Théorème 3.3.10 *:*

Soient f *et* g *deux fonctions dérivables en un point* x_0 *d'un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$, *alors, les fonctions* $\lambda.f$, $f+g$ *et* $f.g$ *sont aussi dérivables en* x_0 *et* $(\alpha.f)^{'}(x_0) = \alpha.f^{'}(x_0)$,

$(f+g)^{'}(x_0) = f^{'}(x_0)+g^{'}(x_0)$ *et*

$(f.g)^{'}(x_0) = f^{'}(x_0)\,g(x_0)+g^{'}(x_0)\,f(x_0)$.

- *Si* $g(x_0)\neq 0$, *alors la fonction* $\dfrac{f}{g}$ *dérivable en* x_0 *et* $\left(\dfrac{f}{g}\right)^{'}(x_0) = \dfrac{f^{'}(x_0)\,g(x_0)-g^{'}(x_0)\,f(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

Preuve : :

Prouvons premièrement $(f\times g)' = f'\times g+f\times g'$.

Soit $x_0\in I$,

$$\bullet \lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x)\,g(x)-f(x_0)\,g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x).g(x)-f(x_0)\,g(x)+f(x_0)\,g(x)-f(x_0)\,g(x_0)}{x-x_0}$$
$$= \lim_{x\longrightarrow x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]$$
$$= f^{'}(x_0)\,g(x_0)+g^{'}(x_0)\,f(x_0).$$

Ceci implique que la fonction $f\times g$ est dérivable sur I de dérivée $f'\times g+f\times g'$.

Deuxièment, montrons $\left(\dfrac{f}{g}\right)^{'} = \dfrac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$.

Soit $x_0\in I$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{\frac{f}{g}(x)-\frac{f}{g}(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{1}{x-x_0}\times\frac{f(x)\times g(x_0)-f(x_0)\times g(x)}{g(x)\times g(x_0)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x)\times g(x_0)-f(x_0)\times g(x_0)+f(x_0)\times g(x_0)-f(x_0)\times g(x)}{(x-x_0)\,g(x)\times g(x_0)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{1}{x-x_0}\times\frac{g(x_0)\left[f(x)-f(x_0)\right]-f(x_0)\left[g(x)-g(x_0)\right]}{g(x)\times g(x_0)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow x_0}\left[\frac{1}{g(x)}\times\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\frac{f(x_0)}{g(x)\times g(x_0)}\times\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]\\
&= \frac{1}{g(x_0)}\times f'(x_0)-\frac{f(x_0)}{(g(x_0))^2}\times g'(x_0)\quad \textit{car } \frac{1}{g} \textit{ est continue en } x_0\\
&= \frac{f'(x_0)\times g(x_0)-f(x_0)\times g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.
\end{aligned}$$

Ceci implique que la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en tout point x_0 de I de dérivée $\frac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$. ∎

3.3.7 Dérivée d'une fonction composée

Théorème 3.3.11 *:*

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction d éfinie sur un intervalle J contenant $f(I)$, et x_0 un point de I.

Si f est dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$, alors $g\circ f$ est dérivable en x_0 et $(g\circ f)'(x_0)=f'(x_0)\,g'(f(x_0))$

Preuve : Soient $y_0=f(x_0)$. D'après nos hypothèses f est dérivable en x_0 et g est dérivable en y_0. Soit G la fonction définie sur J par :

$$\begin{cases} G(y) &= \dfrac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} \quad \textit{si } y\neq y_0\\ G(y) &= g'(y_0) \quad\quad\quad \textit{si } y=y_0.\end{cases}$$

Comme la fonction g est darivable en y_0, la fonction G est continue en y_0. La fonction f est continue en x_0, donc la fonction $G\circ f$ est continue en x_0, donc sa limite en x_0 vaut $g'(y_0)$. Pour tout $x\in I-\{x_0\}$ nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0} &= \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}\\
&= G(f(x))\,\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\quad \textit{par la définition de } G.
\end{aligned}$$

En passant à la limite, quand x tend vers x_0, nous avons donc $g\circ f$ est dérivable en x_0 de nombre dérivée $(g\circ f)'(x_0)=f'(x_0)\,g'(f(x_0))$. ∎

Exemples 3.3.12 *:*

1). Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}$. Soit h la fonction définie sur I par $h(x) = (f(x))^n$.

Si f est dérivable en x_0, alors la fonction h l'est aussi et $h'(x_0) = n.f'(x_0) \times (f(x_0))^{n-1}$.

En effet, $h = g \circ f$ avec $g(y) = y^n$.

2). Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et g est une fonction définie sur I a valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Si g est dérivable en $x_0 \in I$, alors la fonction k définie sur I par $k(x) = ln(g(x))$ est dérivable en x_0 et $(ln \circ g)'(x_0) = \dfrac{g'(x_0)}{g(x_0)}$.

3.3.8 Dérivée d'une fonction réciproque

Fonctions monotones et bijections

Voici un théorème très utilisé dans la pratique pour montrer qu'une fonction est bijective.

Théorème 3.3.13 *(Théorème de la bijection).*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I , alors f est une bijection de I dans $J = f(I)$ et admet une bijection réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ dans I. De plus, la fonction réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.

Preuve : :

Supposons pour fixer les idées que f est strictement croissante sur I.

1)$*$ Rappelons que l'image d'un intervalle par une fonction continue sur cet intervalle est un intervalle. Donc J est un intervalle.

Pour montrer que f est injective, on suppose que $x_1, x_2 \in I$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et montrons que $x_1 = x_2$.

$\otimes$ Si $x_1 < x_2$, puisque f est strictement croissante sur I, alors $f(x_1) < f(x_2)$ c'est impossible, car $f(x_1) = f(x_2)$, on en déduit que $x_1 \geq x_2$.

$\otimes$ De même, si $x_1 > x_2$ on montre que $x_1 \leq x_2$.

On en conclut que $x_1 = x_2$. Donc, f est injective.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, on a $\forall y \in J = f(I),\ \exists x \in I;\ f(x) = y$. On en conclut que f est surjective.

L'application f réalise donc bejection de I danc J.

2)$*$ Montrons que f^{-1} est strictement croissante sur J.

Soient $y_1, y_2 \in J$ tels que $y_1 > y_2$ et on note $x_1 = f^{-1}(y_1) \in I$ et $x_2 = f^{-1}(y_2) \in I$. On a alors $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$ et comme $y_1 > y_2$ alors, $f(x_1) > f(x_2)$. Cela implique que $x_1 > x_2$ (car f est strictement croissante sur I) c'est-à-dire $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$. Cela montre que f^{-1} est strictement croissante sur J.

Montrons que f^{-1} est continue sur J.

Soient $y_0 \in J$ tel que $x_0 = f^{-1}(y_0) \in I$ et y_0 n'est pas une extrémitée de J .

Pour montrer que f^{-1} est continue en y_0, il faut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0;\ \forall y \in J, |y - y_0| < \delta \Longrightarrow \left| f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) \right| \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$, comme f est strictement croissante et continue, on a donc $f(x) \in [f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)]$. On note $\alpha = y_0 - f(x_0 - \varepsilon) > 0$ et $\beta = f(x_0 + \varepsilon) - y_0 > 0$. on a d'une part $f(x_0 - \varepsilon) = y_0 - \alpha$ d'où $x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_0 - \alpha)$,

et d'autre part $f(x_0 + \varepsilon) = \beta + y_0$ d'où $x_0 + \varepsilon = f^{-1}(y_0 + \beta)$.

Pour $y \in [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ où $\delta = min\{\alpha, \beta\}$ on a $y \in [y_0 - \alpha, y_0 + \beta]$. Puisque f^{-1} est strictement croissante, alors $f^{-1}(y) \in [f^{-1}(y_0 - \alpha), f^{-1}(y_0 + \beta)]$ et on a alors $f^{-1}(y) \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ c'est-à-dire $f^{-1}(y) \in [f^{-1}(y_0) - \varepsilon, f^{-1}(y_0) + \varepsilon]$. Ce qui montre que la fonction f^{-1} est continue sur J. ■

Théorème 3.3.14 *:*

Soit $f : I \longrightarrow J$ une application bijective continue et dérivable en un point $x_0 \in I$ et si $f(x_0) \neq 0$. Alors la fonction $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$\begin{aligned} \left(f^{-1}\right)'(y_0) &= \frac{1}{f'(x_0)} \\ &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}. \end{aligned}$$

Preuve : :

Soit $y_0 \in J$ et $x_0 \in I$ tel que $y_0 = f(x_0)$. Le taux d'accroissement de f^{-1} en y_0 est :

$$\begin{aligned} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \\ &= \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}. \end{aligned}$$

Quand $y \longrightarrow y_0$ (avec $y \neq y_0$), $x = f^{-1}(y) \longrightarrow f^{-1}(y_0) = x_0$ car f^{-1} est continue en y_0 et par composition de limite on a : $\dfrac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \longrightarrow \dfrac{1}{f'(x_0)}$. ■

Exemple 3.3.15 *:*

La fonction f de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $]1, +\infty[$ définie par $f(x) = x^2 + 1$ est une application bijective continue et dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}_+^\star$ et sa fonction réciproque est $f^{-1} :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+^\star$ définie par $f(y) = \sqrt{y - 1}$ est dérivable en tout point $y_0 = f(x_0) \in]1, +\infty[$ et $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)} = \dfrac{1}{2f^{-1}(y_0)} = \dfrac{1}{2\sqrt{y_0 - 1}}$.

3.3.9 Dérivées successives

Définition 3.3.16 :

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. et f' sa dérivée.

Si la fonction $f' : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f. Plus généralement on note : $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ et $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$

Si la dérivée n-ième $f^{(n)}$ existe on dit que f est n fois dérivable.

Exemples 3.3.17 :

Par un raisonnement par récurrence on peut vérifier que les dérivées n-iéme sur $\mathbb{R}$ de ces fonctions $f : x \longmapsto cos(ax+b)$, $g : x \longmapsto sin(ax+b)$ et $h : x \longmapsto (ax+b)^p$ sont

$f^{(n)}(x) = a^n cos(ax+b+n\frac{\pi}{2})$, $g^{(n)}(x) = a^n sin(ax+b+n\frac{\pi}{2})$

$$\text{et } h^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & si \quad n > p \\ a^n n! & si \quad n = p \\ a^n p.(p-1)\cdots(p-n+1)(ax+b)^{p-n} & si \quad n < p \end{cases}.$$

Et la dérivée n-iéme sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{b}{a}\right\}$ de la fonction $J : x \longmapsto \dfrac{1}{ax+b}$ est $J^{(n)}(x) = (-1)^n n!.a^n\,(ax+b)^{-n-1}$.

De même on vérifie que la dérivée n-iéme sur $]-\frac{b}{a}, +\infty[$ de la fonction $k : x \longmapsto ln(ax+b)$ est $k^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!.a^{n-1}\,(ax+b)^{-n}$.

3.3.10 Classe d'une fonction

Définition 3.3.18 :

• *On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^n (avec $n \in \mathbb{N}$) si elle est continue et sa dérivée d'ordre n existe et est continue.*

On note $C^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur I et n fois continûement dérivable.

• *On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ si elle est indéfiniment dérivable sur I.*

On note $C^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles indéfiniment dérivable sur I.

Ainsi $C^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C^n(I, \mathbb{R})$.

Exemples 3.3.19 :

(1) La fonction f définie par :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & = x^2 cos(\frac{2}{x}) & si\ x \neq 0 \\ f(x) & = 0 & si\ x = 0 \end{cases} \end{array}$$

n'est pas de classe C^1. *Car la fonction* f *dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *de dérivée* $f' : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto 2x.cos(\frac{2}{x}) + 2sin(\frac{2}{x})$.
Puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} x.cos(\frac{2}{x}) = 0 = f'(0)$, *alors* f *est dérivable en* 0, *par contre la fonction* f' *n'a pas de limite en* 0, *donc la fonction* f' *n'est pas continue en* 0.

(2) *La fonction* g *définie par :*

$$g: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} g(x) & = x^3 sin(\frac{1}{x}) \quad si\ x \neq 0 \\ f(x) & = 0 \quad\quad\quad\quad\ \ si\ x = 0 \end{cases} \end{array}$$

est de classe C^1. *Car la fonction* g *dérivable sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée* $g' : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto 3x.sin(\frac{1}{x}) - x.cos(\frac{1}{x})$, *et* $g'(0) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} x^2.cos(\frac{2}{x}) = 0$, *et comme* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} g'(x) = 0 = g(0)$, *alors* g' *est continue en* 0.

(3) *Les fonctions sin, cos, exp et les polynomes sont de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$. *Les fonctions ln et* $x \longmapsto \sqrt{x}$ *sont de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 3.3.20 *:*

Soient $n \in \mathbb{N}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont* n *fois dérivables sur* I *alors,* $\lambda \times f$, $f + g$ *et* $f \times g$ *sont* n *fois dérivables sur* I *et pour tout* $x \in I$, *on a :*

$$(\lambda \times f)^{(n)}(x) = \lambda \times f^{(n)}(x), \qquad (f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$$

et

$$(f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x) \times g^{(k)}(x) \quad (\textbf{\textit{Formule de Leibniz}}).$$

Où

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

De plus, si g *ne s'annule pas sur* I, *alors* $\frac{f}{g}$ *est* n *fois dérivables sur* I.

Preuve :

Ces propriétés se démontrent par récurrence. Montrons par exemple la formule de Leibniz.
Soit $P(n)$ la propriété $(f \times g)^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x) \times g^{(k)}(x)$.
Pour $n = 1$ la propriété $P(1)$ est vraie, car

$$(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{1} C_1^k f^{(1-k)}(x) \times g^{(k)}(x) &= C_1^0 f^{(1-0)}(x) \times g^{(0)}(x) + C_1^1 f^{(1-1)}(x) \times g^{(1)}(x) \\
&= f^{(1)}(x) \times g^{(0)}(x) + f^{(0)}(x) \times g^{(1)}(x) \\
&= f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x).
\end{aligned}$$

Supposons que la propriété $P(n)$ soit vraie pour $n \in \mathbb{N}$. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie. Nous avons

$$\begin{aligned}
(f \times g)^{(n+1)}(x) &= \left((f \times g)^{(n)}\right)'(x) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x) \times g^{(k)}(x)\right)' \quad \textit{car } P(n) \textit{ est vérifiée} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(n-k)}(x) \times g^{(k)}(x)\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(n+1-k)}(x) \times g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x) \times g^{(k+1)}(x)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n+1-k)}(x) \times g^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n+1-(k+1))}(x) \times g^{(k+1)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n+1-k)}(x) \times g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f^{(n+1-k)}(x) \times g^{(k)}(x) \\
&= C_n^{n+1} f^{(0)}(x) \times g^{(n+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n+1-k)}(x) \times g^{(k)}(x) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f^{(n+1-k)}(x) \times g^{(k)}(x) + C_n^{-1} f^{(n+1)}(x) \times g^{(0)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k f^{(n+1-k)}(x) \times g^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{n+1} C_n^{k-1} f^{(n+1-k)}(x) \times g^{(k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left[C_n^{k-1} + C_n^k\right] f^{(n+1-k)}(x) \times g^{(k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(n+1-k)}(x) \times g^{(k)}(x) \quad (\text{car } C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k).
\end{aligned}$$

Cela implique que la propriété est héréditaire, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ∎

Exemple 3.3.21 *:*

Calculons la dérivée n-ème de La fonction $f : x \longmapsto (x^2 + 3x)e^{2x}$.

Puisque f est le produit de deux fonctions indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, donc l'est aussi. Par la formule de Leibniz, on a :

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2 + 3x)^{(k)} \left(e^{2x}\right)^{n-k}.$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}^* - \{1, 2\}$, $(x^2 + 3x)^{(k)} = 0$. Donc

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= C_n^0(x^2+3x)^{(0)}\left(e^{2x}\right)^{(n)} + C_n^1(x^2+3x)^{(1)}\left(e^{2x}\right)^{(n-1)} + C_n^2(x^2+3x)^{(2)}\left(e^{2x}\right)^{(n-2)} \\ &= (x^2+3x)2^n e^{2x} + n(2x+3)2^{n-1}e^{2x} + n(n-1)2^{n-2}e^{2x} \\ &= 2^{n-2}\left(4x^2+(4n+12)x\right)+n(n+5))\, e^{2x}. \end{aligned}$$

3.3.11 Théorème des accroissements finis

Extremum local

Définition 3.3.22 *:*

Soit f une fonction réelle définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$.

• *On dit que $x_0 \in D$ est un* ***point critique*** *de f si $f'(x_0) = 0$.*

• *On dit que f admet un* ***maximum local*** *(resp. un* ***minimum local*** *) en $x_0 \in D$ s'il existe un intervalle ouvert $I \subset D$ contenant x_0 tel que pour tout $x \in I$; $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).*

• *On dit que f admet un* ***extremum local*** *en x_0 si f admet un maximum local ou un minimum local en ce point.*

• *On dit que f admet un* ***maximum global*** *(resp. un* ***minimum global*** *) en $x_0 \in D$ si pour tout $x \in D$; $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).*

Proposition 3.3.23 *:*

Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle ouvert I contenant x_0.

1• *Si f admet un maximum local (ou un minimum local) en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.*

2• *Si $f'(x_0) = 0$ et la fonction f' change de signe en x_0, alors f admet un extremum local en x_0.*

Preuve :

1• Suposons que soit f admet un maximum local en x_0, il existe donc un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que pour tout $x \in I$; $f(x) \leq f(x_0)$. On en deduit que, pour $x \in I$;
$\otimes$ si $x < x_0$ alors $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ et $\otimes$ si $x > x_0$ alors $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$.
Par passage a la linite et comme f est une fonction dérivable en x_0, on a
$\otimes$ $f'_g(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \longrightarrow x_0 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ et $\otimes$ $f'_d(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \longrightarrow x_0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$.
Donc la seule possibilité est que $f'(x_0) = 0$.

2• Suposons que $f'(x_0) = 0$ et il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0-\alpha; x_0];\ f'(x) \leq 0 \ \wedge\ \forall x \in [x_0; x_0+\alpha[;\ f'(x) \geq 0.$$

Cela implique, $\forall x \in]x_0-\alpha; x_0]$; $f(x) \geq f(x_0)$ $\wedge$ $\forall x \in [x_0; x_0+\alpha[$; $f(x) \geq f(x_0)$, autrement dit, pour tout $x \in]x_0-\alpha; x_0+\alpha[$, $f(x) \geq f(x_0)$. Donc la fonction f un extremum local en x_0. ■

3.3.12 Théorème de Rolle

Théorème 3.3.24 *:*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve :

• Premièrement, Si f est constante sur $[a,b]$, alors pour tout $c \in]a,b[$; $f'(c) = 0$.

• Si f n'est pas constante sur $[a,b]$, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$. Supposons par exemple $f(x_0) > f(a)$. Puisque f est une fonction continue sur intervalle fermé et borné donc elle admet un maximum en un point $c \in [a,b]$. Puisque $\underset{x\in[a,b]}{max} f(x) = f(c)$ alors $f(c) \geq f(x_0) > f(a)$ donc $c \neq a$. De même comme $f(a) = f(b)$ alors $c \neq b$. Ainsi $c \in]a,b[$. f est donc dérivable et admet un maximum (local) en c donc, d'après la proposition **3.3.23** on a $f'(c) = 0$. ■

Interprétation graphique du théorème de Rolle.

Au point $M_0(x_0, f(x_0))$ la représentation graphique de f admet une tangente horizontale.

Théorème des accroissements finis

Théorème 3.3.25 *:*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Preuve :

Considérons la fonction auxiliaire φ définie sur $[a,b]$ par : $\varphi(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

Par les opérations sur les fonctions continues et les fonctions dérivables sur un interval, la fonction φ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $\varphi(a) = f(a) = \varphi(b)$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle à la fonction φ sur $[a,b]$ et donc il existe $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or $\varphi'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ sur $]a,b[$. Ce qui donne $f'(x) - \dfrac{f(b)=f(a)}{b-a}$. ■

Exemple 3.3.26 *:*

Montrons que pour tout $x > 0$, $\dfrac{x}{x+1} < ln(1+x) < x$. Considérons la fonction $t \longmapsto ln(1+t)$ sur l'interval

$[0, x]$ *avec* $x > 0$. *Cette fonction de classe* C^∞ *sur* $]-1; +\infty[$. *Par le théorème des accroissements finis, il existe* $c \in]0, x[$ *tel que* $ln(1+x) - ln(1) = \dfrac{x}{1+c}$. *Puisque* $0 < c < x$, *on a* $\dfrac{1}{1+x} < \dfrac{1}{1+c} < 1$ *puis* $\dfrac{x}{1+x} < ln(1+x) < x$.

Inégalités des accroissements finis

Proposition 3.3.27 *:*

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction dérivable sur un intervalle* I *ouvert. S'il existe une constante* M *telle que pour tout* $x \in I$; $|f'(x)| \leq M$ *alors* $\forall x, y \in I$; $|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|$.

Preuve :

Fixons $x, y \in I$ avec $x < y$, alors f continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$, par le théorème des accroissements finis, il existe alors $c \in]x, y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$ et comme $|f'(x)| \leq M$ alors $|f(x) - f(y)| = |f'(c)|\,|x - y| \leq M.\,|x - y|$.

Cette inégalité vaut aussi pour $y < x$. ∎

Proposition 3.3.28 *:*

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *dérivable. S'il existe* $m, M \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall x \in I$; $m \leq f'(x) \leq M$, *alors pour tout* $a, b \in I$ *tels que* $a < b$, *on a*

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

Preuve :

Cas $a = b$. C'est immédiat.

Cas $a < b$. Puisque f dérivable sur I alors la fonction f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Par le théorème des accroissements finis, il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ et comme $m \leq f'(x) \leq M$ et $b - a > 0$, on en déduit $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$. ∎

Exemples 3.3.29 *:*

Puisque les dérivées de sin et cos sont bornées par 1 *sur* $\mathbb{R}$. *Alors,*

$$\forall x, y \in \mathbb{R};\ |sinx - siny| \leq |x - y| \quad et \quad \forall x, y \in \mathbb{R};\ |cosx - cosy| \leq |x - y|\,.$$

En particulier si l'on fixe $y = 0$ *alors on obtient* $|sinx| \leq |x|$.

Règle de l'Hospital

(Guillaume de l'Hospital 1661-1704, élève de Johann Bernoulli)

Corollaire 3.3.30 *Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I contenant x_0 telles que $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Si $\forall x \in I - \{x_0\}$; $g'(x) \neq 0$, alors la limite de $\dfrac{f}{g}$ existe en x_0 et*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Preuve :

Suposons que f et g deux fonctions dérivables sur I, $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et $\forall x \in I - \{x_0\}$; $g'(x_0) \neq 0$.

On considère la fonction $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(x) = g(t)f(x) - f(t)g(x)$ avec $t \in I - \{x_0\}$ fixé tel que $t < x_0$. Puisque la fonction ψ continue sur $[t, x_0]$, dérivable sur $]t, x_0[$ et $\psi(x_0) = 0 = \psi(t)$ alors, par le théorème de Rolle il existe $c_t \in]t, x_0[$ tel que $\psi'(c_t) = 0$. Or $\forall x \in I$; $\psi'(x) = g(t)f'(x) - f(t)g'(x)$ donc $g(t)f'(c_t) - f(t)g'(c_t) = 0$. Comme g' ne s'annule pas sur $I - \{x_0\}$ cela conduit à $\dfrac{f(t)}{g(t)} = \dfrac{f'(c_t)}{g'(c_t)}$. Comme $t < c_t < x_0$ lorsque l'on fait tendre t vers x_0 on obtient $c_t \longrightarrow x_0$. Cela implique

$$\lim_{t \longrightarrow x_0} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{c_t \longrightarrow x_0} \frac{f'(c_t)}{g'(c_t)}.$$

■

Exemple 3.3.31 *:*

Calculons la limite en 1 de $\dfrac{e^{x^2+2x} - e^{3x}}{cos(\frac{\pi}{2}x)}$.

Soient $f(x) = e^{x^2+2x} - e^{3x}$ *et* $g(x) = cos(\frac{\pi}{2}x)$, *alors* $f(1) = 0 = g(1)$ *et pour tout* $\forall x \in \mathbb{R}$ *on a :*

$$f'(x) = (2x+2)\,e^{x^2+2x} - 3e^{3x} \quad \text{et} \quad g'(x) = -\frac{\pi}{2}.sin(\frac{\pi}{2}x).$$

Prenons $I =]0, 1]$, $x_0 = 1$ *alors* g' *ne s'annule pas sur* I. *Donc*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{e^{x^2+2x} - e^{3x}}{cos(\frac{\pi}{2}x)} &= \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{(2x+2)\,e^{x^2+2x} - 3e^{3x}}{-\frac{\pi}{2}.sin(\frac{\pi}{2}x)} \\
&= \frac{-2e^3}{\pi}.
\end{aligned}$$

3.4 Exercices

Exercice 3.4.1 *:*

Déterminer dans chacun des deux cas suivants la dérivée n-ème de la fonction proposée :

$$a)x \longmapsto \frac{x^2+2}{(x-2)^2} \qquad b)x \longmapsto sin(2x+1).cos^2x.$$

Exercice 3.4.2 *:*

Par le théorème des accroissements finis, Montrer que :

$$\forall x > 0;\ \frac{1}{x+1} < ln\frac{x+1}{x} < \frac{1}{x}.$$

En déduire que pour tout réel strictement positif x, on a :

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

Exercice 3.4.3 *:*

(1) Montrer que :

$$\forall x \geq 0;\ x-\frac{x^2}{2} \leq log(1+x) \leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3},$$

(on ne calculera qu'une seule dérivée pour chaque inégalité).

(2) En déduire que :

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{log(1+x)}{x} = 1.$$

Exercice 3.4.4 *:*

a) Etudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left|x-2E\left(\frac{x+1}{2}\right)\right|.$$

b) Montrer que la fonction f est périodique de période 2 et paire.

c) Représenter graphiquement f sur l'intervalle $[-2,2]$.

Exercice 3.4.5 *:*

1) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'équation $tanx = x$ possède une solution unique notée u_n dans l'intervalle $]n\pi-\frac{\pi}{2}, n\pi+\frac{\pi}{2}[$.

2) On pose $v_n = u_n - n\pi$. Calculer $f(u_{n+1}-\pi)$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante, puis qu'elle converge et trouver sa limite.

Exercice 3.4.6 *:*

1. *Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur* $\mathbb{R}$ *?*

$$a)\ x \longmapsto cosx.cos\frac{1}{x-\dfrac{\pi}{2}} \qquad b)\ x \longmapsto \frac{1}{x-1}ln\frac{e^{2x-2}+e^{2-2x}}{2}$$

2. *On considère la fonction* f *définie par*

$$f : x \longmapsto \left(\alpha x^2 + \pi x - \pi^2\right) tan(2x).$$

a. Déterminer son domaine de définition.

b. Pour quelle valeur de α *peut-on prolonger* f *par continuité en* $x = \dfrac{\pi}{4}$ *?*

Exercice 3.4.7 *:*

Soient f, g *deux fonctions continues sur* $[a, b]$ *dérivables sur* $]a, b[$ *ne s'annulant pas, et telles que* $f(a)g(b) = f(b)g(a)$ *Montrer qu'il existe un* $c \in]a, b[$ *tel que* $\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{g'(c)}{g(c)}$

Exercice 3.4.8 *:*

Soient f *et* g *deux applications de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *définies par :*

$$f(x) = 2x \text{ et } g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ est pair} \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

1. Les applications f *et* g *sont-elles injectives ? surjectives ?*

2. Les applications $(f \circ g)$ *et* $(g \circ f)$ *sont-elles injectives ? surjectives ?.*

Exercice 3.4.9 *:*

Soit l'application f *définie comme suit :*

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & f(n) = n + (-1)^n \end{array}$$

1. f *est-elle injective ?.*

2. f *est-elle surjective ?.*

3. Calculer $(f \circ f)(n)$.

Exercice 3.4.10 *:*

Soit les deux applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & f(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \end{array} \quad et \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x^2, x^2) \end{array}$$

1. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?.

2. g est-elle injective ? g est-elle surjective ?.

3. Calculer $(f \circ g)(x)$.

4. $(f \circ g)(x)$ est-elle injective ? $(f \circ g)(x)$ est-elle surjective ?.

Exercice 3.4.11 *:*

Pour quelle(s) valeur(s) du réel λ la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{sin(\lambda x)}{x} & si \quad x < 0 \\ g(x) = \dfrac{ln(1+2x)}{x} & si \quad x > 0, \end{cases}$$

est-elle prolongeable par continuité en 0 ?. On précisera alors ce prolongement.

Exercice 3.4.12 *:*

Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[a,b]$, telle que $f(a) = f(b) = 0$ et pour tout $x \in]a,b[$ on a $f''(x) \leq 0$. Montrer que $\forall x \in [a,b];\ f(x) \geq 0$

Exercice 3.4.13 *:*

1. Pour quelle(s) valeur(s) du réel α la fonction f définie par :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{x-\alpha}{4x^2+4} & si \quad x > 0 \\ h(x) = \beta x - 4 & si \quad x < 0, \end{cases}$$

est-elle prolongeable par continuité en 0 ?. On précisera alors ce prolongement que l'on notera par $\widetilde{h}$.

2. Pour quelle valeur de β, la fonction $\widetilde{h}$ est-elle dérivable en 0 ?.

Exercice 3.4.14 *:*

Par le théorème des accroissement finis, montrer que :

1) $\forall x > 0;\ x - \dfrac{x^3}{6} \leq sinx \leq x.$

2) $\forall x > 0;\ x + \dfrac{x^3}{3} \leq tanx.$

3) $\forall x > 0;\ x - \dfrac{x^2}{2} \leq ln\,(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}.$

4) $\forall x \in \mathbb{R}^*;\ e^x \geq 1 + x.$

Chapitre 4

Application aux fonctions élémentaires

4.1 Fonctions trigonométriques réciproques

4.1.1 Formules de trigonométrie

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

$$\begin{aligned} cos(\alpha+\beta) &= cos\alpha.cos\beta - sin\alpha.sin\beta. \\ sin(\alpha+\beta) &= sin\alpha.cos\beta + sin\beta.cos\alpha. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Remarque 4.1.1 *:*

1). Pour $cos(\alpha-\beta)$ et $sin(\alpha-\beta)$ en remplaçant β par $-\beta$ dans les formules (4.1).

2). En prenant $\alpha=\beta$ dans (4.1)*, et en utilisant*

$$\forall x \in \mathbb{R};\ cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1, \tag{4.2}$$

on obtient

$$cos(2.\alpha) = 2cos^2\alpha - 1 = 1 - 2.sin^2\alpha \quad et \quad sin2\alpha = 2sin\alpha.cos\alpha. \tag{4.3}$$

En posant $a=\alpha+\beta$ et $b=\alpha-\beta$ on obtient pour tous $a,b \in \mathbb{R}$,

$$cosa + cosb = 2.cos\frac{a+b}{2}.cos\frac{a-b}{2}. \tag{4.4}$$

$$sina + sinb = 2.sin\frac{a+b}{2}.cos\frac{a-b}{2}. \tag{4.5}$$

Remarque 4.1.2 *:*

1). Pour $cosa - cosb$ en remplaçant β par $\pi - \beta$ dans la formule (4.4).

2). Pour $sina - sinb$ en remplaçant β par $-\beta$ dans la formule (4.5).

Formules de l'angle moitié

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ et pour $t = tan\dfrac{x}{2}$ on a

$$cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad sinx = \frac{2t}{1+t^2},$$

et quand $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}$ on a

$$tanx = \frac{2t}{1-t^2}$$

4.1.2 Fonction arc-sinus

La restriction de sin à $I = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ vers l'intervalle $[-1, 1]$, est une fonction continue et strictement croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, elle réalise donc une bijection et par suite

$$\forall x \in [-1,1], \exists! t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];\ sint = x. \tag{4.6}$$

Définition 4.1.3 *:*
Pour tout $x \in [-1,1]$, on note $arcsinx$ ou $sin^{-1}x$ l'unique angle de l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut x. Ceci définit une application $arcsin : [-1,1] \longrightarrow \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ qui est la bijection réciproque de la restriction $sin_{|_I} : I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$

Propriétés 4.1.4 *:*

- *Pour tout $x \in [-1,1]$, on a les simplifications*

$$sin(arcsinx) = x, \qquad cos(arcsinx) = \sqrt{1-x^2}.$$

et quand $x \in]-1,1[$

$$tan(arcsinx) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- *Pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a :*

$$arcsin(sinx) = x. \tag{4.7}$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \forall y \in [-1,1];\ sinx = y \Longleftrightarrow x = arcsiny. \tag{4.8}$$

Proposition 4.1.5 *:*

La fonction arcsin est impaire, strictement croissante, continue sur $[-1,1]$*, de classe* C^{∞} *sur* $]-1,1[$ *et* $\forall x \in]-1,1[;\ (arcsin)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Preuve :

La fonction arcsin est impaire, car $\forall y \in [-1,1], \exists -y \in [-1,1]$ et

$$\begin{aligned}\forall y \in [-1,1], \exists ! x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];\ arcsin\,(-y) &= arcsin\,(sin(-x)) \quad (\ d\text{'après } (4.6))\\ &= -x \quad (\ d\text{'après } (4.7))\\ &= -arcsin\,(y) \quad (\ d\text{'après } (4.8)).\end{aligned}$$

D'après les théorèmes (3.3.13) et (3.3.14) la fonction arcsin est strictement croissante, continue sur $[-1,1]$, de classe C^{∞} sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$ on a

$$\begin{aligned}arcsin'\,(x) &= \frac{1}{sin'(arcsin\,(x))}\\ &= \frac{1}{cos(arcsin\,(x))}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-sin^2(arcsin\,(x))}}\\ &(\ car\ cos^2(arcsinx) + sin^2(arcsinx) = 1\ puisque\ arcsinx \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[,\ alors\ cos(arcsinx) > 0).\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

■

4.1.3 Fonction arc-cosinus

La restriction $cos_{|_J} : J = [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$, est une fonction continue et strictement croissante sur $[0,\pi]$, elle réalise donc une bijection et par suite

$$\forall x \in [-1,1], \exists ! t \in [0,\pi]\,;\ cost = x. \tag{4.9}$$

Définition 4.1.6 *:*

Pour tout $x \in [-1,1]$*, on note arccosx ou* $cos^{-1}x$ *l'unique angle de l'intervalle* $[0,\pi]$ *dont le cosinus vaut* x*. Ceci définit une application arccos* $: [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ *qui est la bijection réciproque de la restriction* $cos_{|_J} : J = [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$.

On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\forall x \in [-1,1]\,;\ cos(arccos(x)) = x.$$
$$\forall x \in [0,\pi]\,;\ arccos(cos(x)) = x.$$

$$\forall x \in [0,\pi]\,,\ \forall y \in [-1,1];\ cosx = y \Longleftrightarrow x = arccosy. \tag{4.10}$$

Proposition 4.1.7 *:*

La fonction arccos est strictement croissante, continue sur $[-1,1]$, de classe C^{∞} sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[;\ (arccos)'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Proposition 4.1.8 *:*

$$\forall x \in [-1,1];\ arcsinx + arccosx = \frac{\pi}{2}.$$

Preuve :

Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = arcsinx + arccosx$.

La fonction f est continue sur $[-1,1]$ et déeivable sur $]-1,1[$ de dérivée $f'(x) = 0$. Ce qui montre bien que f est une fonction constante sur $[-1,1]$. puisque $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$, on en deduit que $\forall x \in [-1,1];\ f(x) = \dfrac{\pi}{2}$. ∎

4.1.4 Fonction arc-tangente

La restriction $tan_{|_{I'}}$: $I' =]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arctangente

$$\begin{array}{rccl} arctan: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[\\ & x & \longmapsto & arctanx\ (\ est\ l'unique\ angle\ de\ l'intervalle\ ]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[\ dont\ la\ tangente\ vaut\ x). \end{array}$$

Et comme la restriction $tan_{|_{I'}}$ est bijective, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[;\ tant = x. \tag{4.11}$$

Propriétés 4.1.9 *:*

- *Par définition de la bijection réciproque on a*

$$\forall x \in \mathbb{R};\ tan(arctanx) = x.$$

$$x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[; \; arctan(tanx) = x. \tag{4.12}$$

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \; \forall y \in \mathbb{R}; \; tanx = y \Longleftrightarrow x = arctany. \tag{4.13}$$

Proposition 4.1.10 *:*

La fonction arctan est impaire, strictement croissante, continue, de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$; $(arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Preuve :

La fonction arctan est impaire, car pour tout $y \in \mathbb{R}$ il existe un unique $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que :

$$\begin{aligned} arctan\,(-y) &= arctan\,(tan(-x)) \quad (\text{ d'après } (4.11)) \\ &= -x \quad (\text{ d'après } (4.12)) \\ &= -arctan\,(y) \quad (\text{ d'après } (4.13)). \end{aligned}$$

D'après les théorèmes (3.3.13) et (3.3.14) la fonction *arctan* est strictement croissante, continue, de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} arctan'\,(x) &= \frac{1}{tan'(arctan\,(x))} \\ &= \frac{1}{1+tan^2(arctan\,(x))} \quad (\text{ car } \forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[; \; tan'(t) = 1 + tan^2(t)) \\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

■

Proposition 4.1.11 *:*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$a) \quad cos(arctanx) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad b) \quad sin(arctanx) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Preuve :

Soient $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\theta = arctanx$

$$\begin{aligned} a)\ \ cos^2\theta &= \frac{cos^2\theta}{cos^2\theta + sin^2\theta} \\ &= \frac{cos^2\theta}{cos^2\theta\left(1+\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta}\right)} \\ &= \frac{1}{1+tan^2\theta} \quad (\text{car } \forall\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[;\ cos^2\theta > 0). \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R};\ cos^2\left(arctanx\right) = \frac{1}{1+x^2}$. Cela implique que

$$\forall x \in \mathbb{R};\ cos\left(arctanx\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\begin{aligned} b)\ \ sin\theta &= \sqrt{1-cos^2\theta} \\ &= \sqrt{1-\frac{cos^2\theta}{cos^2\theta+sin^2\theta}} \\ &= \sqrt{1-\frac{cos^2\theta}{cos^2\theta\left(1+\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta}\right)}} \\ &= \sqrt{1-\frac{1}{1+tan^2\theta}} \\ &= \sqrt{\frac{tan^2\theta}{1+tan^2\theta}}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\forall x \in \mathbb{R};\ sin\left(arctanx\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. ■

Exercice 4.1.12 *:*

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*;\ arctanx + arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \quad et \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*;\ arctanx + arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Solution d'exercice 4.1.12 :

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = arctanx + arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*;\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$.

Donc la fonction f est constante sur chaque intervalle de $\mathbb{R}^*$.

Puisque $f(1) = 2arctan1 = 2.\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*;\ arctanx + arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Et puisque f est impaire et $f(-1) = 2arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$ on a alors $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$; $arctanx + arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

4.2 Fonctions hyperboliques

4.2.1 Fonction sinus hyperbolique

Définition 4.2.1 *:*

La fonction ***sinus hyperbolique*** *est la fonction notée sinh ou sh qui définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Propriétés 4.2.2 *:*

La fonction sh est impaire, de classe C^∞ *sur* $\mathbb{R}$ *et* $sh'(x) = chx$. *Son image est* $\mathbb{R}$.

Preuve :

Ces propriété se démontrent en utilisant les propriété de la fonction *exp*. ■

4.2.2 Fonction cosinus hyperbolique

Définition 4.2.3 *:*

La fonction ***cosinus hyperbolique*** *est la fonction notée cosh ou ch qui définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Propriétés 4.2.4 *:*

- *La fonction ch est paire, de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$ *et* $ch'(x) = shx$. *Son image est* $[1, +\infty[$.
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$; $ch^2x - sh^2x = 1$.

Preuve :

Ces propriété se démontrent en utilisant les propriété de la fonction *exp*. ■

4.2.3 Fonction tangente hyperbolique

Définition 4.2.5 *:*

La fonction ***tangente hyperbolique*** *est la fonction notée tanh ou th qui définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Propriétés 4.2.6 *:*
La fonction th est impaire, de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$ et $th'(x) = 1 - th^2 x = \dfrac{1}{ch^2 x}$. Son image est $]-1, 1[$.

Preuve :

• Puisque la fonction exp de classe C^{∞} et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, alors la fonction th l'est aussi. Elle est impaire, car pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$th(-x) = \frac{sh(-x)}{ch(-x)} = \frac{-sh(x)}{ch(x)} = -thx.$$

• D'après le **théorème** (3.3.10), la fonction th dérivable sue $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$th'(x) = \left(\frac{sh}{ch}\right)'(x) = \left(\frac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x}\right)'(x) = 1 - th^2 x = \frac{1}{ch^2 x}.$$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$th(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{e^{2x} - 1}{1 + e^{2x}}.$$

Et d'une part on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$-\infty < 1 - e^{-2x} < 1 \quad et \quad 0 < \frac{1}{1 + e^{2x}} < 1.$$

Cela implique que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $th(x) < 1$.

Et d'autre part on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$-1 < e^{2x} - 1 < +\infty \quad et \quad 0 < \frac{1}{1 + e^{2x}} < 1.$$

Cela implique que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $th(x) > -1$. ∎

4.2.4 Trigonométrie hyperbolique

Pour tous $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
&ch(\alpha + \beta) = ch\alpha.ch\beta + sh\alpha.sh\beta\\
&ch(2\alpha) = ch^2\alpha + sh^2\alpha = 2ch^2\alpha - 1 = 1 + 2sh^2\alpha\\
&sh(\alpha + \beta) = sh\alpha.ch\beta + sh\beta.ch\alpha\\
&sh(2\alpha) = 2sh\alpha.ch\alpha\\
&th(\alpha + \beta) = \tfrac{th\alpha + th\beta}{1 + th\alpha.th\beta}
\end{aligned}$$

Preuve :

Ces relations se démontrent par simple calcul à partir de l'éxpression des fonctions hyperboliques.

Montrons par exemple $sh(\alpha+\beta) = sh\alpha.ch\beta + sh\beta.ch\alpha$.

$$\begin{aligned}
sh\alpha.ch\beta + sh\beta.ch\alpha &= \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}.\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2} + \frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}.\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2} \\
&= \frac{e^{\alpha+\beta}+e^{\alpha-\beta}-e^{-\alpha+\beta}-e^{-\alpha-\beta}}{4} + \frac{e^{\alpha+\beta}+e^{\beta-\alpha}-e^{\alpha-\beta}-e^{-\alpha-\beta}}{4} \\
&= \frac{2e^{\alpha+\beta}-2e^{-\alpha-\beta}}{4} \\
&= sh(\alpha+\beta).
\end{aligned}$$

■

4.3 Fonctions hyperboliques réciproques

4.3.1 Fonction réciproque du sinus hyperbolique

L'application $sh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement croissante admet une fonction réciproque. notée $argsh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition 4.3.1 *:*
*La fonction réciproque de la fonction sinus hyperbolique est appelée **argument sinus hyperbolique** et est notée argsinh (ou argsh). Pour tout réel x, $argshx$ l'unique réel y tel que $shy = x$, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! t \in \mathbb{R};\ sht = x. \tag{4.14}$$

On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R};\ shx = y \Longleftrightarrow x = argshy. \tag{4.15}$$

Et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$sh(argshx) = x, \qquad argsh(shx) = x.$$

Propriétés 4.3.2 *:*

- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$ch(argshx) = \sqrt{1+x^2}, \qquad th(argshx) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad argsh(x) = ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

- *La fonction argument sinus hyperbolique est dérivable, de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :*

$$argsh'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Preuve :

• $\otimes$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$; $chx = \sqrt{1 + sh^2 x}$, on a donc

$$ch(argshx) = \sqrt{1 + sh^2\left(argshx\right)} = \sqrt{1 + x^2}.$$

$\otimes$ D'après la définition du th on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$th(argshx) = \frac{sh(argshx)}{ch(argshx)} = \frac{x}{\sqrt{1 + sh^2\left(argshx\right)}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

$\otimes$ D'après (4.15) on a :

$$y = shx \Longleftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Longleftrightarrow e^x = y + \sqrt{1 + y^2} \Longleftrightarrow x = ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right) \Longleftrightarrow x = argshy.$$

Finalement

$$\forall y \in \mathbb{R};\ argshy = ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right).$$

• $\otimes$ La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $sh'(t) = cht \geq 1$ donc d'après le théorème 3.3.14 la fonction $argsh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a ,

$$argsh'(x) = \frac{1}{ch(argshx)} = \frac{1}{\sqrt{1 + sh^2(argshx)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

$\otimes$ Enfin, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ étant indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $argsh$ l'est aussi. ∎

4.3.2 Fonction réciproque du cosinus hyperbolique

Puisque la restriction de ch à $\mathbb{R}_+$ vers l'intervalle $[1, +\infty[$, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle réalise donc une bijection réciproque, notée $argch : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$.

Définition 4.3.3 *:*

*La fonction réciproque de la fonction $ch_{|_{\mathbb{R}_+}}$ est appelée **argument cosinus hyperbolique** et est notée argcosh (ou argch). Pour tout réel positif x, $argchx$ l'unique réel $y \geq 1$ tel que $chy = x$, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in [1, +\infty[,\ \exists! t \in \mathbb{R}_+;\ cht = x. \tag{4.16}$$

On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall y \in [1, +\infty[;\ chx = y \Longleftrightarrow x = argchy. \tag{4.17}$$

Et pour tout $x \in \mathbb{R}_+,\ argsh(shx) = x.$

Et pour tout $x \in [1, +\infty[,\ sh(argshx) = x.$

Propriétés 4.3.4 *:*

• *Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a :*

$$sh(argchx) = \sqrt{x^2 - 1}, \qquad th(argchx) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \quad et \quad argch(x) = ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

• *La fonction argument cosinus hyperbolique est dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour tout réel $x > 1$ on a :*

$$argch'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Preuve :

• ⊗ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $ch^2x \geq 1$ et $|shx| = \sqrt{ch^2x - 1}$, on a donc pour tout $x \in [1, +\infty[$

$$sh(argchx) = \sqrt{ch^2\left(argchx\right) - 1} = \sqrt{x^2-1}.$$

⊗ D'après la définition du th et ce qui précède, on a pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$th(argchx) = \frac{sh(argchx)}{ch(argchx)} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.$$

⊗ D'après (4.17), pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in [1, +\infty[$ on a,

$$y = chx \Longleftrightarrow y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Longleftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2-1} \Longleftrightarrow x = ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) \Longleftrightarrow x = argchy.$$

Finalement

$$\forall y \in [1, +\infty[;\ argchy = ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right).$$

• ⊗ La fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*;\ ch'(t) = sht > 0$ donc d'après le théorème 3.3.14 la fonction $argch$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et par dérivation de l'égalité $ch(argchx) = x$ pour tout $x \in]1, +\infty[$ on a ,

$$argch'x.sh\left(argchx\right) = 1 \Longleftrightarrow argch'x.\sqrt{x^2-1} = 1 \Longleftrightarrow argch'x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

⊗ Enfin, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ étant indéfiniment dérivable sur $]1, +\infty[$, la fonction $argch$ l'est aussi. ∎

4.3.3 Fonction réciproque du tangente hyperbolique

Puisque l'application $th : \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$ continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise donc une bijection réciproque. notée $argth :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition 4.3.5 *:*

La fonction réciproque de la fonction tangente hyperbolique est appelée ***argument tangente hyperbolique*** *et est notée argtanh (ou argth). Pour tout réel x strictement compris entre -1 et 1, $argthx$ l'unique réel $y \in \mathbb{R}$ tel que $thy = x$, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in]-1,1[, \ \exists! y \in \mathbb{R}_+; \ thy = x. \tag{4.18}$$

On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in]-1,1[; \ thx = y \Longleftrightarrow x = argthy. \tag{4.19}$$

Et pour tout $x \in \mathbb{R}, \ argsh(thx) = x.$

Et pour tout $x \in]-1,1[, \ th(argshx) = x.$

Propriétés 4.3.6 *:*

• *Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :*

$$argth(x) = \frac{1}{2} ln \frac{1+x}{1-x}.$$

• *La fonction argument tangente hyperbolique est dérivable, de classe C^∞ sur $]-1,1[$ et pour tout réel $|x| < 1$ on a :*

$$argth'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Preuve :

• D'après (4.19), pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1,1[$ on a,

$$y = thx \Longleftrightarrow y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \Longleftrightarrow e^{2x} = \frac{y+1}{1-y} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2} ln \frac{y+1}{1-y} \Longleftrightarrow x = argthy.$$

On en déduit

$$\forall y \in]-1,1[; \ argthy = ln \frac{y+1}{1-y}.$$

• La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}; \ th'(x) = \dfrac{1}{ch^2 x} = 1 - th^2 x > 0$ donc d'après le théorème 3.3.14 la fonction $argth$ est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$ on a,

$$argth'x = \frac{1}{th'(argthx)} = \frac{1}{1 - th^2(argthx)} = \frac{1}{1-x^2}.$$

$\otimes$ Enfin, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ étant indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$, c'est donc la fonction $argth$ de classe C^∞ sur $]-1,1[$. ■

4.4 Exercices

Exercice 4.4.1 *:*

Montrer que pour tout $\alpha,\ \beta\ \in \mathbb{R}$

$$sh(\alpha-\beta) = sh(\alpha)ch(\beta) - sh(\beta)ch(\alpha), \qquad th(\alpha+\beta) = \frac{th(\alpha)+th(\beta)}{1+th(\alpha)\times th(\beta)}.$$

Exercice 4.4.2 *:*

Montrer par deux méthodes différentes que

$$\forall x \in [-1,1]\,;\ sin^2\left(\frac{1}{2}arcsinx\right) = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right).$$

Exercice 4.4.3 *:*

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = 3ch - 4$.

1$*$ *Montrer que :*

$$\forall x \in [ln3, ln3];\ -1 \leq f(x) \leq 1.$$

Soit g *une fonction réelle d'une variable réelle définie par* $g(x) = arcsin(f(x))$.

2$*$ *Déterminer* D *l'ensemble de définition de* g .

3$*$ *Étudier la continuitée de* g *sur* D.

4$*$ *Déterminer* D' *l'ensemble de définition de* g'.

5$*$ *Montrer que pour tout* $x \in D'$ *:*

$$g'(x) = \frac{3shx}{\sqrt{3(chx-1)(5-3chx)}}.$$

6$*$ *Tracer le tableau de variation de* g.

Exercice 4.4.4 *:*

Simplifier les expressions suivantes :

$a)$ $ch(argshx)$ $b)$ $th(argshx)$, $c)$ $sh(2argshx)$, $d)$ $argch(2x^2-1)$,

$e)$ $sh(argchx)$, $f)$ $th(argchx)$, $g)$ $ch(argthx)$, $h)$ $argsh(2x\sqrt{1+x^2})$

$j)$ $argth\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$, $k)$ $argsh\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)$, $l)$ $argch\left(\sqrt{\dfrac{1+chx}{2}}\right)$.

Exercice 4.4.5 *:*

1. *Calculer :* $arccos(cos\frac{13\pi}{3})$, $arcsin(sin\frac{13\pi}{3})$ *et* $arctan(tan\frac{13\pi}{3})$.

2. *Écrire les éxprissions suivantes en fonction de x (c'est-à-dire sans les fonctions trigonomitrique)*

$$cos(arctanx), \qquad cos(arcsinx), \qquad sin(3arctanx). \qquad et \qquad tan(arcsinx).$$

Exercice 4.4.6 *:*

1. Calculer la dérivée de $f(x) = arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$; $f(x) = arcsinx$.

2. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$; $arccosx + arcsinx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4.4.7 *:*

Soit f une fonction réelle d'une variable réel définie par :

$$f(x) = \frac{1+tanx}{1-tanx}$$

1). Déterminer D_f *et* $D_{\frac{1}{f}}$ *les ensembles de définition de f et* $\frac{1}{f}$ *respectivement.*

2). Montrer que pour tout entier n et pour tout $x \in D_{\frac{1}{f}}$ *on a* $(f(x))^n = f(nx)$.

Exercice 4.4.8 *:*

Soient f et g deux fonctions réelles d'une variable réel définies par :

$$f(x) = cos^2\left(\frac{1}{2}arcsin(x)\right) \qquad et \qquad g(x) = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)$$

1). Déterminer D_f *et* D_g *les ensembles de définition de f et g respectivement.*

2). Étudier la continuité et la dérivabilité de f et g sur leurs domaines de définitions.

3). Trouver les éxpressionx de $f'(x)$ *et* $g'(x)$ *pour tout* $x \in]-1,1[$.

4). En déduire que pour tout $x \in [-1,1]$ *on a* $f(x) = g(x)$.

Exercice 4.4.9 *:*

1°) *Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie par :* $f(x) = arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

Tracer le tableau de variation de f sur leur domaine de définition.

2°) *Montrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R};\ -1 < \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1.$$

3°) *Soit g une fonction réelle d'une variable réelle définie par :* $g(x) = arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Étudier la fonction g sur leur domaine de définition.

Exercice 4.4.10 *:*

1° *Montrer que*

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[;\ sinx = \frac{tanx}{1+tan^2x} \quad et \quad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[;\ cosx = \frac{1}{\sqrt{1+tan^2x}}.$$

2° *Montrer que*

$$0 < arctan\left(\frac{3}{4}\right) + arctan\left(\frac{5}{12}\right) < \frac{\pi}{2}.$$

3° *Résoudre dans* $[-1, 1]$ *l'équation*

$$arcsin\,(x) = arctan\left(\frac{3}{4}\right) + arctan\left(\frac{5}{12}\right).$$

Exercice 4.4.11 *:*

Résoudre les équation suivantes :

$$arcsinx = arcsin\left(\frac{2}{5}\right) - arcsin\left(\frac{3}{5}\right), \qquad arccosx = 2.arccos\left(\frac{3}{4}\right) \quad et \quad arctanx = 2.arctan\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$arctan(2x) + arctan(3x) = \frac{\pi}{4}, \qquad et \qquad arctan\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + arctan\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 4.4.12 *:*

Etudier les fonctions suivantes :

$f : x \longmapsto x + arcsin\left(\dfrac{x+1}{x}\right).$

$g : x \longmapsto arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) - 2arctanx.$

Chapitre 5

Développement limité

5.1 Développements limités au voisinage d'un point

Définition 5.1.1 *:*
Soit f une fonction définie sur $V = V_{x_0}$ un voisinage de x_0 ou sur $V = V_{x_0} - \{x_0\}$. On dit que f admet un ***développement limité d'ordre*** n ***au voisinage de*** x_0 *(on note de façon abrégée $DL_n(x_0)$), s'il existe des nombres réels $a_0, a_1, \cdots, a_n$ et une fonction ε tels que pour tout $x \in V$,*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0),$$

où ε est une fonction définie sur V, telle que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$.
on peut écrire aussi

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + O(x - x_0).$$

La fonction polynomiale $x \longmapsto a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$ est appelée ***partie régulière*** *du $DL_n(x_0)$ de f, et la fonction $x \longmapsto (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$ est appelée le* ***reste*** *du $DL_n(x_0)$ de f.*

Exemple 5.1.2 *:*
1. DL de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ en 0 à l'ordre n.
Pour tout $x \in V_0$ on a,

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + ... + x^n &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \\ &= \frac{1}{1 - x} - x^n \frac{x}{1 - x} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+...+x^n+x^n\frac{x}{1-x} \\ &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+x^n\varepsilon(x) \qquad \text{où } \varepsilon(x)=\frac{x}{1-x}\underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Ce qui est le développement limité de $\frac{1}{1-x}$ *d'ordre* n *en* 0.

Toute fonction polynomiale admet un développement limité à tout ordre en 0.
Si $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$ et $n\geq m$, alors f admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière est la fonction elle même et le reste est la fonction nulle.
Si $n\leq m$, la partie régulière du DL de f en 0 est $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ et le reste est $R(x)=a_{n+1}x^{n+1}+\cdots+a_mx^m=x^n\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x)=a_{n+1}x+\cdots+a_mx^{m-n}$.
Comme par **exemple :** La fonction $f:x\longmapsto 3x^5-2x^3+x^2-x+4$ admet un développement limité d'ordre 4 en 0 dont la partie régulière est $4-x+x^2-2x^3$ et de reste est $x^4\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x)=3x$.
La fonction f admet aussi un développement limité d'ordre 6 en 0 dont la partie régulière est $4-x+x^2-2x^3+3x^5$ et de reste est la fonction nulle.

Proposition 5.1.3 *Si* $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ *admet un développement limité à l'ordre* n *en* x_0 *de la forme :*

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+O(x-x_0).$$

alors, pour tout $m\leq n$, *la fonction* f *admet un* $DL_m(x_0)$ *s'obtenant par troncature :*

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_m(x-x_0)^m+O((x-x_0)^m).$$

Preuve :

Via $a_{m+1}(x-x_0)^{m+1}+\cdots+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)=o((x-x_0)^m)$. ■

Unicité

Théorème 5.1.4 *:*

Si une fonction f *admet un développement limité à l'ordre* n *en* x_0 *alors celui-ci est unique.*

Preuve :

Par l'absurde, supposons que f admette deux développements limités à l'ordre n en x_0 distincts.

Il existe deux polynômes de degré au plus égal à n, deux voisinages V_1, V_2 de x_0 et deux fonctions $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ définies sur $V_1 - \{x_0\}, V_2 - \{x_0\}$ respectivement, tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon_1(x) \qquad \text{et } \lim_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon_1(x) = 0 \quad (5.1)$$

et

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \cdots + b_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon_2(x) \quad \text{et } \lim_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon_2(x) = 0. \quad (5.2)$$

Notons $V = V_1 \cap V_2$, par différence des deux égalités (5.1) et (5.2), on obtient, pour tout $x \in V - \{x_0\}$,

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)(x - x_0) + (a_2 - b_2)(x - x_0)^2 + \cdots + (a_n - b_n)(x - x_0)^n + (x - x_0)^n [\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)]. \quad (5.3)$$

En calculant la limite de cette égalité quand $x \longrightarrow x_0$, on trouve $a_0 = b_0$.
Donc l'églité (5.3) devient, pour tout $x \in V - \{x_0\}$

$$(a_1 - b_1)(x - x_0) + (a_2 - b_2)(x - x_0)^2 + \cdots + (a_n - b_n)(x - x_0)^n + (x - x_0)^n [\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)]. \quad (5.4)$$

Ensuite on peut diviser cette égalité par $x - x_0$ puis en calculant la limite quand $x \longrightarrow x_0$, on trouve $a_1 = b_1$. etc. A la fin on trouve $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \cdots, a_n = b_n$. Les parties régulières sont égales et donc les restes aussi. ■

Corollaire 5.1.5 *:*
Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0.
Si f est une fonction paire (resp. impaire) alors la partie régulière de f ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).

Preuve :
Puisque f admet un développement limité à l'ordre n en 0 alors, il existe un polynôme de degré au plus égal à n, un voisinage V de 0 et une fonction ε_1 définie sur $V - \{0\}$, tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x) + a_2(x)^2 + \cdots + a_n(x)^n + (x)^n \varepsilon_1(x) \qquad \text{et } \lim_{x \longrightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0.$$

Puisque V un voisinage de 0, donc $\exists\delta > 0;\ ]-\delta,\delta[\subseteq V$.

Pour tout $x \in V - \{0\}$ on a $-x \in V - \{0\}$ et

$$\begin{aligned} f(-x) &= a_0 + a_1(-x) + a_2(-x)^2 + \cdots + (-1)^n a_n (x)^n + (-1)^n (x)^n \varepsilon_1(-x) \\ &= a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + (-1)^n a_n x^n + x^n \varepsilon_2(x). \end{aligned}$$

où $\varepsilon_2 = (-1)^n \varepsilon_1$ et verifie $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$.

Cas f paire : on a $\forall x \in V;\ f(x) = f(-x)$. Par unicité du développement limité à l'ordre n de f en 0, on obtient

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\};\ a_k = (-1)^k a_k$$

En on déduit que pour tout indice k impaire, on a $a_k = 0$. Cela montre que la partie régulière de f ne contient que des monômes de degrés pairs.

Cas f impaire : on a $\forall x \in V;\ f(-x) = -f(x)$. Par unicité du développement limité à l'ordre n de f en 0, on obtient

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\};\ -a_k = (-1)^k a_k$$

En on déduit que pour tout indice k paire, on a $a_k = 0$. Cela montre que la partie régulière de f ne contient que des monômes de degrés impairs. ■

5.1.1 Formule de Taylor-Lagrange

Soient f de classe C^{n+1} sur un intervalle I avec $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, x \in I$. alors il existe une valeur c entre x_0 et x telle que :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Cette relation appeléé **formule de Taylor-Lagrange** et le terme $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ est appelé **reste de Lagrange**.

5.1.2 Formule de Taylor-Young

Soit f définie sur un intervalle I, admettant en un point $x_0 \in I$ des dérivées jusqu'à l'ordre n avec $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe un voisinage V de x_0 et une fonction $\varepsilon : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{aligned}\forall x \in V;\ f(x) &= f(x_0) + \tfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x)\\ &\text{et} \lim_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.\end{aligned}$$

C'est la formule de Taylor avec un reste de Young $((x-x_0)^n\varepsilon(x))$.

5.1.3 Formule de Maclaurin

C'est la formule de Taylor-Lagrange avec $a = 0$ et $c = \theta x$ avec $0 < \theta < 1$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\forall x \in I,\ \exists \theta \in]0,1[;\ f(x) &= f(x_0) + \tfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\\ &+ \tfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.\end{aligned}$$

5.1.4 Existence du développement limité

Corollaire 5.1.6 :

Si une fonction f de classe C^n sur un intervalle I alors f admet un développement limité à l'ordre n en $x_0 \in I$ de la forme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

C'est-à-dire, si

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \lim_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0,$$

alors

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = a_k \text{ pour tout } k \in \{0,1,2,\cdots,n\}$$

Remarque 5.1.7 :

1. *Si f admet un DL en un point x_0 à l'ordre $n > 0$ de partie régulière $a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$, alors f est continue en x_0 ou est prolongeable par continuité en x_0 et $f(x_0) = a_0$.*

2. *Si f admet un DL en un point x_0 à l'ordre $n \geq 1$, alors f est dérivable en x_0 et on a $f(x_0) = a_0$ et $f'(x_0) = a_1$ et l'équation de la tangente au graphe de f en ce point est $y = a_0 + a_1(x-x_0)$.*

5.1.5 Développements limités des fonctions usuelles

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir le développement limité d'ordre n en 0 de plusieurs fonctions usuelles.

1• Considérons la fonction $exp : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x$. La fonction exp est indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{R}$; $exp^{(k)}(0) = 1$.

On en déduit que le développement limité d'ordre n en 0 de la fonction exp est,

$$\boxed{e^x = 1 + \tfrac{x}{1!} + \tfrac{x^2}{2!} + \cdots + \tfrac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.}$$

2• Les fonctions sin et cos sont indéfiniment dérivables dans $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\sin^{(n)} x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \textit{et} \quad \cos^{(n)} x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

On en déduit que le DL d'ordre $2n+1$ en 0 de sin et le DL d'ordre $2n$ en 0 de cos sont,

$$\boxed{\begin{array}{c} \sin x = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0. \\ \cos x = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \tfrac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0. \end{array}}$$

3• La fonctions $g : x \in]-1, +\infty[\longmapsto (1+x)^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé) est indéfiniment dérivable dans $]-1, +\infty[$ et pour tout $x \in]-1, +\infty[$ on a : $((1+x)^\alpha)^{(n)} = [\alpha \times (\alpha - 1) \times \cdots \times (\alpha - n + 1)]\,(1+x)^{\alpha - n}$.

On en déduit que le DL d'ordre n en 0 de g est,

$$\boxed{\begin{array}{c} (1+x)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha}{1!}x + \dfrac{\alpha \times (\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha \times (\alpha - 1) \times \cdots \times (\alpha - n + 1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x) \\ \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0. \end{array}} \tag{5.5}$$

4• La fonctions $h : x \in]-1, +\infty[\longmapsto ln(1+x)$ est indéfiniment dérivable dans $]-1, +\infty[$ et pour tout $x \in]-1, +\infty[$ on a : $ln^{(n)}(1+x) = \left((1+x)^{-1}\right)^{(n+1)}$.

On en déduit que le DL d'ordre n en 0 de h est,

$$\boxed{ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.} \tag{5.6}$$

Remarque 5.1.8 *:*

• *En remplaçant x par $-x$ dans les DL de $x \longmapsto ln(1+x)$ et $x \longmapsto (1+x)^\alpha$, on en deduit les DL de $x \longmapsto ln(1-x)$ et de $x \longmapsto (1-x)^\alpha$ d'ordre n en 0.*

• *Soient f une fonction admette des DL au voisinage 0 et au voisinage de x_0.*

Pour déterminer un développement limité de f en x_0, on détermine le développement limité en 0 de la fonction $g \longmapsto f(x_0 + h)$ en faisant le changement de variable $x = x_0 + h$.

Exemples 5.1.9 *:*

1). *DL de* $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ *d'ordre* n *en* 0.

Pour $\alpha = -1$, *d'après* (5.5) *on a :*

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + (-1)^n x^n \varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0. \tag{5.7}$$

En remplaçant x *par* $-x$ *dans* (5.7) *on obtient*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

2). *DL de* $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ *d'ordre* 3 *en* 0.

Pour $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, *d'après* (5.5) *on a :*

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{8}x^3 + x^3 \varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0. \tag{5.8}$$

En remplaçant x *par* $-x$ *dans* (5.8) *on obtient*

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{8}x^3 + x^3 \varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

3). *DL de* $x \longmapsto e^x$ *d'ordre* n *en* 2.

On pose $h = x - 2 \underset{x \longrightarrow 2}{\longrightarrow} 0$.

$$\begin{aligned} e^x &= e^2 e^{x-2} \\ &= e^2 e^h \quad \text{avec } h = x-2 \\ &= e^2 \left(1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \ldots + \frac{h^n}{n!} + h^n \varepsilon(h)\right) \quad \text{avec } \varepsilon(h) \underset{h \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \\ &= e^2 \left(1 + \frac{x-2}{1!} + \frac{(x-2)^2}{2!} + \ldots + \frac{(x-2)^n}{n!} + (x-2)^n \varepsilon(x-2)\right) \quad \text{avec } \varepsilon(x-2) \underset{x \longrightarrow 2}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

4). *DL de* $x \longmapsto lnx$ *d'ordre* 4 *en* 1.

On pose $h = x - 1 \underset{x \longrightarrow 1}{\longrightarrow} 0$.

$$\begin{aligned} lnx &= ln(h+1) \quad \text{avec } h = x-1 \\ &= h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 - \frac{1}{4}h^4 + h^4 \varepsilon(h) \quad \text{avec } \ h = x-1 \ et\ \varepsilon(h) \underset{h \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \\ &= -1 + x - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + (x-1)^4 \varepsilon((x-1)) \quad \text{avec } \ \varepsilon(x-1) \underset{x \longrightarrow 1}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

5). *DL de* $x \longmapsto \sqrt{2+x}$ *d'ordre* 3 *en* 1.

On pose $h = x - 1 \underset{x \longrightarrow 1}{\longrightarrow} 0$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{2+x} &= \sqrt{3+h} \quad \text{avec } h = x-1 \\
&= \sqrt{3}\sqrt{1+\frac{h}{3}} \\
&= \sqrt{3}\left(1+\frac{h}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{3}\left(1-\frac{1}{2}\frac{h}{3}+\frac{3}{8}\left(\frac{h}{3}\right)^2-\frac{5}{8}\left(\frac{h}{3}\right)^3+\left(\frac{h}{3}\right)^3\varepsilon\left(\frac{h}{3}\right)\right) \quad \text{avec } \varepsilon\left(\frac{h}{3}\right) \underset{h \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \\
&= \sqrt{3}\left(1-\frac{1}{6}h+\frac{1}{24}h^2-\frac{5}{216}h^3+h^3\varepsilon(h)\right) \quad \text{avec } \varepsilon(h) \underset{h \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \\
&= \sqrt{3}\left(1-\frac{1}{6}(x-1)+\frac{1}{24}(x-1)^2-\frac{5}{216}(x-1)^3+(x-1)^3\varepsilon((x-1))\right) \quad \text{avec } \varepsilon(x-1) \underset{x \longrightarrow 1}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

5.1.6 Opérations sur les développements limités

Dans ce paragraphe, on suppose que f et g sont deux fonctions qui admettent des DL en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \longrightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0,$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + x^n\varepsilon_2(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \longrightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0,$$

Développement limité d'une somme et d'un produit de fonctions

- $f + g$ admet un D.L. à l'ordre n au voisinage de 0 qui est

$$f(x) + g(x) = a_0 + b_0 + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \cdots + (a_n+b_n)x^n + x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \longrightarrow 0} \varepsilon(x) = 0,$$

- $f \times g$ admet un D.L. à l'ordre n au voisinage de 0 qui est

$$f(x) \times g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots a_nb_0)x^n + x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \longrightarrow 0} \varepsilon(x) = 0,$$

Exemple 5.1.10 *:*

Calculons le DL de $e^x ln(1+x)$ *en 0 à l'ordre 3. On sait que*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

$$ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

On note $a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{6},\ b_0 = 0,\ b_1 = 1,\ b_2 = -\frac{1}{2}$ *et* $b_3 = \frac{1}{3}$. *Donc*

$$\begin{aligned} e^x ln\,(1+x) &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)\,x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)\,x^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)\,x^3 + x^3\varepsilon\,(x) \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon\,(x)\,. \end{aligned}$$

Développement limité d'une composée

Soient I et J deux intervalles ouverts contenants 0, g une fonction de I dans J et f une fonction définie sur J.

Si $g(0) = 0$ (c'est-à-dire $b_0 = 0$) alors la fonction $f \circ g$ admet un D.L. à l'ordre n au voisinage de 0 dont la partie régulière est le polynôme tronqué à l'ordre n de $P(x) = a_0 + a_1g(x) + a_2g^2(x) + \cdots + a_ng^n(x)$.

Exemples 5.1.11 *:*

1$*$ *Calculons le DL de* $ln\,(1 + x + x^2)$ *en* 0 *à l'ordre 3.*

On pose ici $u(x) = x + x^2 \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$. *On sait que*

$$ln\,(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + u^3\varepsilon\,(u) \quad \text{avec } \varepsilon\,(u) \underset{u\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

On aura besoin de calculer un DL à l'ordre 3 *en* 0 *de* u^2 *et* u^3.

$$u^2(x) = a_0.a_0 + (a_0.a_1 + a_1.a_0)\,x + (a_0.a_2 + a_1.a_1 + a_2.a_0)\,x^2 + (a_0.a_3 + a_1.a_2 + a_2.a_1 + a_3.a_0)\,x^3,$$

où $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 0$.

Donc, le DL à l'ordre 3 *en* 0 *de* u^2 *est*

$$u^2(x) = x^2 + 2x^3 + x^3\varepsilon\,(x)\,.$$

$$\begin{aligned} u^3(x) &= u(x).u^2(x) \\ &= a_0.b_0 + (a_0.b_1 + b_1.a_0)\,x + (a_0.b_2 + a_1.b_1 + a_2.b_0)\,x^2 + (a_0.b_3 + a_1.b_2 + a_2.b_1 + a_3.b_0)\,x^3 + x^3\varepsilon\,(x)\,, \end{aligned}$$

où $b_0 = 0,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 2$.

Donc, le DL à l'ordre 3 *en* 0 *de* u^3 *est*

$$u^3(x) = x^3 + x^3\varepsilon\,(x)\,.$$

En on deduit,

$$\begin{aligned} ln\left(1+x+x^2\right) &= x+x^2-\frac{1}{2}\left(x^2+2x^3\right)+\frac{1}{3}x^3+x^3\varepsilon\left(x+x^2\right) \quad \text{avec } \varepsilon\left(x+x^2\right) \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \\ &= x+\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

2$*$ *Calculons le DL de* $\sqrt{1+2e^x}$ *en* 0 *à l'ordre 3.*

On connaît le DL de e^x *en* 0 *à l'ordre* 3 *:*

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+x^3\varepsilon'(x) \quad \text{avec } \varepsilon'(x) \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \sqrt{1+2e^x} &= \sqrt{1+2\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+x^3\varepsilon'(x)\right)} \\ &= \sqrt{3+2x+x^2+\frac{1}{3}x^3+x^3\varepsilon'(x)} \\ &= \sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{9}x^3+\frac{x^3}{3}\varepsilon'(x)\right)} \\ &= \sqrt{3}\sqrt{1+u(x)} \quad \text{avec } u(x) = \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{9}x^3+\frac{x^3}{3}\varepsilon'(x) \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

On connaît le DL de $\sqrt{1+u(x)}$ *en* 0 *à l'ordre* 3 *:*

$$\sqrt{1+u} = 1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\frac{1}{16}u^3+u^3\varepsilon_0(u) \quad \text{avec } \varepsilon_0(u) \underset{u\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

Nous aurons besoin de calculer seulement les monômes de degré p *tel que* $p \leq n$ *de* u^2 *et* u^3*.*

$$\begin{aligned} u^2(x) &= a_0.a_0+(a_0.a_1+a_1.a_0)\,x+(a_0.a_2+a_1.a_1+a_2.a_0)\,x^2+(a_0.a_3+a_1.a_2+a_2.a_1+a_3.a_0)\,x^3+x^3\varepsilon_1(x) \\ &= \frac{4}{9}x^2+\frac{4}{9}x^3+x^3\varepsilon_1(x) \quad \text{avec } \varepsilon_1(x) \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

où $a_0 = 0,\ a_1 = \frac{2}{3},\ a_2 = \frac{1}{3},\ a_3 = \frac{1}{9}$.

$$\begin{aligned} u^3(x) &= u(x).u^2(x) \\ &= a_0.b_0+(a_0.b_1+b_1.a_0)\,x+(a_0.b_2+a_1.b_1+a_2.b_0)\,x^2+(a_0.b_3+a_1.b_2+a_2.b_1+a_3.b_0)\,x^3+x^3\varepsilon_2(x) \\ &= \frac{8}{27}x^3+x^3\varepsilon_2(x) \quad \text{avec } \varepsilon_2(x) \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

où $b_0 = 0,\ b_1 = 0,\ b_2 = \frac{4}{9},\ b_3 = \frac{4}{9}$.

On a alors,

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+2e^x} &= \sqrt{3}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{9}x^3+\frac{x^3}{3}\varepsilon'(x)\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{4}{9}x^2+\frac{4}{9}x^3+x^3\varepsilon_1(x)\right)\right.\\
&\left.+\frac{1}{16}\left(\frac{8}{27}x^3+x^3\varepsilon_2(x)\right)+x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x)\underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.\right)\\
&= \sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{9}x^2+\frac{\sqrt{3}}{54}x^3+x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x)\underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Développement limité d'un inverse

Voici comment calculer le DL d'un inverse $\frac{1}{f}$.

$$\text{On a } f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+x^n\varepsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\longrightarrow 0}\varepsilon_1(x)=0,$$

• Si $a_0 \neq 0$ on pose $u(x)=\frac{a_1}{a_0}x+\frac{a_2}{a_0}x^2+\cdots+\frac{a_n}{a_0}x^n+\frac{x^n}{a_0}\varepsilon_1(x)$. Alors, $\frac{1}{f}$ s'écrit $\frac{1}{f}=\frac{1}{a_0}\frac{1}{1+u}$.

• Si $a_k \neq 0$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k < n$ et $\forall p \in \{0,1,2,\cdots,k-1\}$; $a_p = 0$, la fonction $\frac{1}{f}$ n'admette pas un DL au voisinage de 0. Mais la fonction $x \longmapsto \frac{x^m}{f(x)}$ avec $m \geq k$ admet un DL d'ordre $n-k$ au voisinage de 0, car pour tout $x \in D_{\frac{1}{f}}-\{0\}$

$$\begin{aligned}
\frac{x^m}{f(x)} &= \frac{x^{m-k}}{a_k+a_{k+1}x^1+\cdots+a_nx^{n-k}+x^{n-k}\varepsilon_1(x)}\\
&= \frac{x^{m-k}}{a_k}.\frac{1}{1+v(x)},
\end{aligned}$$

où $v(x)=\frac{a_{k+1}}{a_k}x+\cdots+\frac{a_n}{a_k}x^{n-k}+\frac{x^{n-k}}{a_k}\varepsilon_1(x)$.

Exemples 5.1.12 *:*

1)$*$ *Calculons le DL de* $x \longmapsto \frac{1}{2-x}$ *en* 0 *à l'ordre* 4.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2-x} &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^3+\left(\frac{x}{2}\right)^4+O\left(\left(\frac{x}{2}\right)^4\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\frac{x^4}{32}+O\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

2)$*$ *Calculons le DL de* $x \longmapsto \dfrac{1}{cosx}$ *en* 0 *à l'ordre* 5.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{cosx} &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+O\left(x^5\right)} \\
&= \frac{1}{1-u} \quad avec \quad u=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4-O\left(x^5\right) \\
&= 1+u+u^2+O\left(u^2\right) \quad avec \quad u^2=\frac{1}{4}x^4+O\left(x^5\right) \;\; et\; O\left(u^2\right)=O\left(x^5\right) \\
&= 1+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4-O\left(x^5\right)\right)+\left(\frac{1}{4}x^4+O\left(x^5\right)\right)+O\left(x^5\right) \\
&= 1+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{24}x^4+O\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

3)$*$ *Calculons le DL de* $x \longmapsto \dfrac{x}{sinx}$ *au voisinage de* 0 *à l'ordre* 4.

$$\begin{aligned}
\frac{x}{sinx} &= x.\frac{1}{sinx} \\
&= x.\frac{1}{x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+O\left(x^5\right)} \\
&= x.\frac{1}{x\left(1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+O\left(x^4\right)\right)} \\
&= \frac{1}{1+u} \quad avec\; u=-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+O\left(x^4\right) \\
&= 1-u+u^2+O\left(u^2\right) \quad avec\; u^2=\frac{1}{36}x^4+O\left(x^4\right) \\
&= 1-\left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+O\left(x^4\right)\right)+\left(\frac{1}{36}x^4+O\left(x^4\right)\right)+O\left(x^4\right) \\
&= 1+\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{360}x^4+O\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

Méthode : Si $g(0) \neq 0$, alors le dL. de $\dfrac{f}{g}$ est défini via le quotient de la division de la partie reguliaire de f par la partie reguliaire de g suivant les puissances croissantes.

Exemples 5.1.13 *:*

1)$\bullet$ *Calculons le DL de* $x \longmapsto \dfrac{2-x+2x^2-x^3}{1+x-x^2}$ *en* 0 *à l'ordre* 3.

L'algorithme de calcul du quotient de la division, suivant les puissances croissantes

2	$-x$	$+2x^2$	$-x^3$			$1+x-x^2$
$-(2$	$+2x$	$-2x^2)$				$2-3x+7x^2-11x^3$
$=$	$-3x$	$+4x^2$	$-x^3$			
	$-(-3x$	$-3x^2$	$+3x^3)$			
	$=$	$7x^2$	$-4x^3$			
		$-(7x^2$	$+7x^3$	$-7x^4)$		
		$=$	$-11x^3$	$+7x^4$		
			$-(-11x^3$	$-11x^4$	$+11x^5)$	
			$=$	$18x^4$	$-11x^5$	

2)• *Calculons le DL de* $x \longmapsto \dfrac{e^x}{x-lnx}$ *en* 1 *à l'ordre* 3.

On pose $h = x-1 \underset{x\longrightarrow 1}{\longrightarrow} 0$.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{e^x}{x-lnx} &= \frac{e^{h+1}}{h+1-ln\,(1+h)} \\
&= \frac{e.e^h}{h+1-ln\,(1+h)} \\
&= \frac{e.\left(1+h+\dfrac{h^2}{2}+\dfrac{h^3}{6}+O\left(h^3\right)\right)}{h+1-\left(h-\dfrac{1}{2}h^2+\dfrac{1}{3}h^3+O\left(h^3\right)\right)} \\
&= e.\frac{1+h+\dfrac{h^2}{2}+\dfrac{h^3}{6}+O\left(h^3\right)}{1-h+\dfrac{1}{2}h^2-\dfrac{1}{3}h^3+O\left(h^3\right)}.
\end{aligned}$$

En calculant la division de $1+h+\dfrac{h^2}{2}+\dfrac{h^3}{6}$ *par* $1-h+\dfrac{1}{2}h^2-\dfrac{1}{3}h^3$ *suivant les puissances croissantes*

1	$+h$	$+\frac{1}{2}h^2$	$+\frac{1}{6}h^3$				$1-h+\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{3}h^3$
$-(1$	$-h$	$+\frac{1}{2}h^2$	$-\frac{1}{3}h^3)$				$1+2h+2h^2+\frac{3}{2}h^3$
$=$	$2h$		$+\frac{1}{2}h^3$				
	$-(2h$	$-2h^2$	$+h^3$	$-\frac{2}{3}h^4)$			
	$=$	$2h^2$	$-\frac{1}{2}h^3$	$+\frac{2}{3}h^4$			
		$-(2h^2$	$-2h^3$	$+h^4$	$+\frac{2}{3}h^5)$		
		$=$	$\frac{3}{2}h^3$	$-\frac{1}{3}h^4$	$-\frac{2}{3}h^5$		
			$-(\frac{3}{2}h^3$	$-\frac{3}{2}h^4$	$+\frac{3}{4}h^5$	$-\frac{1}{2}h^6)$	
			$=$	$\frac{7}{6}h^4$	$-\frac{17}{12}h^5$	$+\frac{1}{2}h^6$	

5.1.7 Intégration de développements limités

Théorème 5.1.14 *:*
Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I contient x_0 et f' une fonction de classe C^n sur I dont le DL en x_0 à l'ordre n est

$$f'(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

alors f admet un développement limité à l'ordre $n + 1$ en x_0 de la forme :

$$f(x) = f(x_0) + a_0(x - x_0) + \cdots + a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + o((x - x_0)^{n+1})$$

Cela signifie que l'on intègre la partie polynomiale de DL de $f'(x)$ terme à terme pour obtenir le DL de $f(x) - f(x_0)$ en x_0.

Preuve :
Supposons que f' admet un DL d'ordre $n - 1$ on 0 de partie régulière P. Il existe alors $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus égal à $n - 1$, un voisinage V de 0 et une fonction ε défimie sur $V - \{0\}$ tels que

$$\forall x \in V - \{0\}\,;\; f'(x) = P(x) + x^{n-1}\varepsilon(x) \quad \text{ et } \quad \lim_{x \longrightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

On en déduit que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x P(t)dt + x^n\varepsilon(x).$$

Puisque l'intégrale d'un polynôme de degré au plus égal à $n - 1$ est un polynôme de degré au plus égal à n, aiors par unicité du développement limité on obtient

$$Q : x \longmapsto f(0) + \int_0^x P(t)dt \quad \text{est la prémitive de } \; P \; \text{ qui vaut } f(0) \; \text{ en } 0.$$

D'où le résultat. ∎

Exemples 5.1.15 *:*
1) On peut retrouver le développement limité de $x \longmapsto ln(1 - x)$ en 0 par cet outil.
En effet $(ln(1 - x))' = \dfrac{-1}{1 - x}$. On sait que

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + O(x^n)$$

donc par intégration de ce développement limité, on obtient

$$ln(1-x) - ln(1) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \cdots \frac{1}{n+1}x^{n+1} + O(x^{n+1})$$

2) Calculons le développement limité de $x \longmapsto arcsinx$ en 0 à l'ordre 7.
La fonction $x \longmapsto arcsinx$ est de classe C^∞ sur $I =]-1, 1[$ et $(arcsinx)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Au voisinage de 0 on a

$$\left(1-x^2\right)^{-\dfrac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + O\left(x^6\right)$$

donc par intégration, on obtient

$$arcsinx - arcsin0 = arcsinx = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{114}x^7 + O\left(x^7\right)$$

Attention : On peut intégrer mais pas dériver un développement limité. f peut admettre un DL sans que f' n'admette un DL. Á titre de l'exemple suivant :

Exemple 5.1.16 *:*

La fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 2x + x^2 + x^3 + x^3 cos(\dfrac{2}{x^2}) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}.$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$f' : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 2 + 2x + 3x^2 + 3x^2 cos(\dfrac{2}{x^2}) + 4sin(\dfrac{2}{x^2}) & si \quad x \neq 0 \\ 2 & si \quad x = 0 \end{cases}.$$

Puisque pour tout x au vvoisinage de 0 on a $f(x) = x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) = x\left(1 + cos(\dfrac{2}{x^2})\right) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$ alors f admet un DL d'ordre 2 en 0. Mais f' n'a pas de limite en 0, donc ne peut pas posséder un DL d'ordre 1 en 0 de f' a pour partie régulière $2 + 2x$

5.1.8 Développements asymptotiques

Définition 5.1.17 *:*

*Soient I un intervalle et $x_0 \in I$ ou une extrémité de I et f une fonction réelle définie sur I ou sur $I - \{x_0\}$. On appelle **développement asymptotique** de f en x_0 s'il existe des fonctions simples $g_0, g_1, \cdots, g_n$ telles* *que au voisinage de x_0 :*

$$f(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + \cdots + a_n g_n(x) + o(g_n(x)) \quad \text{et} \quad g_0 \geq g_1 \geq \cdots \geq g_n,$$

où $a_0, a_1, \cdots, a_n$ sont des constantes réelles.

Remarque 5.1.18 *:*

• *Dans un développement asymptotique une fonction en x_0 (fini ou infini), chaque terme de la somme est négligeable devant le précédent au voisinage de x_0.*

• *Un $DL_n(x_0)$ est un développement asymptotique à la précision $(x - x_0)^n$.*

• *Pour forme un développement asymptotique, on exploite les techniques calculatoires des développements limité.*

• *On peut faire un développement limité au voisinage de ∞. On introduit une variable auxiliaire $X = \dfrac{1}{x} \underset{x \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$.*

Exemples 5.1.19 *:*

1. *Calculons le développement asymptotique de $x \longmapsto ln(1-x)$ à 5 termes en $-\infty$.*

Quand x au voisinage de $-\infty$ on a

$$\begin{aligned}
ln(1-x) &= ln(-x(1-\frac{1}{x})) \\
&= ln(-x) + ln(1-\frac{1}{x}) \\
&= ln(-x) + ln(1-u(x)) \quad \text{ avec } u(x) = \frac{1}{x} \underset{x \longrightarrow -\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&= ln(-x) - u(x) - \frac{1}{2}u^2(x) - \frac{1}{3}u^3(x) - \frac{1}{4}u^4(x) - O\left(u^4(x)\right) \quad \text{ avec } u(x) = \frac{1}{x} \\
&= ln(-x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} - O\left(\frac{1}{x^4}\right).
\end{aligned}$$

2. *Calculons le développement asymptotique de $x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$ à 4 termes en $+\infty$.*

Quand x au voisinage de $+\infty$ on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x^2} &= x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \\
&= x\sqrt{1+u(x)} \quad \text{ avec } u(x) = \frac{1}{x^2} \\
&= x\left(1 + \frac{1}{2}u(x) - \frac{1}{8}u^2(x) + \frac{1}{16}u^3(x) - O\left(u^3(x)\right)\right) \quad \text{ avec } u(x) = \frac{1}{x^2} \\
&= x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + \frac{1}{16x^5} - O\left(\frac{1}{x^5}\right).
\end{aligned}$$

5.1.9 Applications des développements limités et asymptotiques

Détermination d'équivalents

Les développements limités sont un otil éfficace pour la recherche de l'équivalent d'une fonction donnée au voisinage d'un point.

★ Le premier terme non nul d'un développement limité ou d'un développement asymptotique d'une fonction en un point fournit un équivalent simple de la fonction étudiée au point considéré.

Exemples 5.1.20 *:*
I. *A partir des développements limités des fonctions usuelles, on obtient donc au voisinage de* 0 *les équivalents suivants :*

$$sinx \approx x, \quad tanx \approx x, \quad ln(1+x) \approx x, \quad e^x - 1 \approx x, \quad 1 - cosx \approx \frac{x^2}{2}, \quad (1+x)^\alpha - 1 \approx \alpha x.$$

II. *Déterminons un équivalent simple de* $ln(1-x) + arcsinx$ *au voisinage de* 0.
On a

$$ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + O(x^3) \quad et \quad arcsinx = x + \frac{1}{6}x^3 + O\left(x^3\right).$$

Donc $ln(1-x) + arcsinx = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + O(x^3)$. *Cela montre l'équivalent suivant*
$ln(1-x) + arcsinx \approx -\frac{1}{2}x^2$ *quand* $x \longrightarrow 0$.
III. *Déterminons un équivalent simple de* $\frac{sinx - x}{xsinx}$ *au voisinage de* 0.
Du DL d'ordre 4 *en* 0 *de la fonction sin, on deduit que* $sinx - x \underset{0}{\approx} -\frac{x^3}{6}$.
On en conclut que

$$\frac{sinx - x}{xsinx} \underset{0}{\approx} -\frac{\frac{x^3}{6}}{x^2} = -\frac{x}{6} \quad car \quad sinx \underset{0}{\approx} x.$$

Détermination de limite

L'obtention d'un équivalent permet d'obtenir la limite de la fonction considérée.

Exemples 5.1.21 *:*
1∗ *Calculons la limite en* 0 *de la fonction* $x \longmapsto \dfrac{2xcosx}{ln\frac{2+x}{2-x}}$.
On peut calculer cette limite de la manière suivante :

$$ln(2+x) = ln2 + ln(1+\frac{x}{2}) = ln2 + \frac{x}{2} + o(\frac{x}{2}) \quad et \quad ln(2-x) = ln2 + ln(1-\frac{x}{2}) = ln2 - \frac{x}{2} + o(\frac{x}{2}).$$

On a donc

$$\begin{aligned} ln\frac{2+x}{2-x} &= ln(2+x) - ln(2-x) \\ &= x + O(\frac{x}{2}) \underset{0}{\approx} x. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2xcosx}{ln\frac{2+x}{2-x}} &= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2xcosx}{x} \\ &= \lim_{x\longrightarrow 0} 2.cosx \\ &= 2. \end{aligned}$$

$2*$ *Calculons la limite en* 0 *de la fonction* $x \longmapsto \dfrac{x.tan^2x - x^3}{2x^2.tan^3x}$.
Du DL d'ordre 3 *en* 0 *de la fonction tan, on obtient*

$$tanx \underset{0}{\approx} x, \qquad tanx - x \underset{0}{\approx} \frac{1}{3}x^3 \quad et \quad tanx + x \underset{0}{\approx} 2x.$$

Puisque

$$\begin{aligned} \frac{x.tan^2x - x^3}{2x^2.tan^3x} &= x.\frac{tan^2x - x^2}{2x^2.tan^3x} \\ &= x.\frac{(tanx - x)(tanx + x)}{2x^2.tan^3x}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x.tan^2x - x^3}{2x^2.tan^3x} &= \lim_{x\longrightarrow 0} x.\frac{\frac{1}{3}x^3.2x}{2x^5} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Remarque 5.1.22 *:*

Les DL sont très efficaces pour calculer des limites ayant des formes indéterminées ! Il suffit juste de remarquer que si $f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \cdots$ *alors* $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = c_0$.

Prolongement d'une fonction en point

Proposition 5.1.23 *:*

Soient x_0 *un point dans un intervalle* I *ou une extrémité finie de* I *et* f *une fonction réelle définie sur* $I - \{x_0\}$. *Si au voisinage de* x_0 *la fonction* f *admet un DL de la forme* $f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + o(x - x_0)$ *alors on peut prolonger* f *par continuité en* x_0 *en posant* $f(x_0) = c_0$ *et ce prolongement est dérivable en a avec* $f'(x_0) = c_1$.

Preuve :

Puisque $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow x_0} (c_0 + c_1(x - x_0) + o(x - x_0)) = c_0$ donc on prolonge f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = c_0$. De plus $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{(c_0 + c_1(x - x_0) + o(x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = c_1$ et donc ce prolongement est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = c_1$. ■

Exemple 5.1.24 *:*

Montrons que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{tanx}{x}$ *prolongiable en* 0 *et son prolongement est une fonction de classe* C^1 *sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

La fonction f *est évidemment définie et de classe* C^1 *sur les intervalles* $]-\frac{\pi}{2}, 0[$ *et* $]0, \frac{\pi}{2}[$. *Au voisinage de* 0 *on a* $f(x) = 1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$. *Donc* f *prolongiable par continuité en 0 en posant* $f(0) = 1$. *De plus, ce prolongement est dérivable et* $f'(0) = 0$. *Etudions maintenant la continuité de* f' *en* 0.

Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[- \{0\}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{x}{cos^2x} - tanx}{x^2} \\ &= \frac{x\,(1 + tan^2x) - tanx}{x^2}. \end{aligned}$$

Au voisinade de 0 *on a*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x\,(1 + x^2 + o(x^2)) - \left(x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)}{x^2} \\ &= \frac{\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{x^2} \\ &= \frac{2}{3}x + o(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Par suite f' *est continue en* 0.

Position local d'une courbe par rapport à sa tangente

Soient f une fonction réelle définie sur un intervalle I contient x_0. Soit f admet un DL à l'ordre n en x_0 de la forme $f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_k(x - x_0)^k + \cdots c_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$ où c_k est le premier coefficient non nul après c_1 avec $1 < k \leq n$.

Comme la fonction f est définie en x_0, on a alors que $c_0 = f(x_0)$. D'après la proposition **5.1.23**, on établit aussi que $c_1 = f'(x_0)$.

L'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse x_0 est : $y = c_0 + c_1(x - x_0)$.

Etudions maintenant la position du graphe de f par rapport à T au voisinage de x_0.

Pour cela déterminons le signe de $f(x) - (c_0 + c_1(x - x_0))$ c'est-à-dire le signe de $c_k(x - x_0)^k$.

Il y a trois cas possibles.

• Si le signe de $c_k(x - x_0)^k$ est positif alors la courbe est au-dessus de la tangente T.

• Si le signe de $c_k(x-x_0)^k$ est négatif alors la courbe est en dessous de la tangente T.

• Si le signe de $c_k(x-x_0)^k$ change si l'on passe en x_0 de gauche à droite alors la courbe traverse la tangente T au point d'abscisse x_0. Ce point appelé **point d'inflexion**.

Exemples 5.1.25 *:*

a) *Déterminons la tangente (T) en 0 du (Γ) graphe de $f:\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{2x}{e^x-1}$ et précisons la position du graphe (Γ) par rapport à (T).*

Au voisinage de 0 avec $x\neq 0$ on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x.\frac{1}{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+O\left(x^4\right)}\\
&= 2.\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+O\left(x^3\right)}\\
&= 2.\frac{1}{1+u(x)} \quad \text{avec} \quad u(x)=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+O\left(x^3\right)\\
&= 2.\left(1-u+u^2-u^3+O\left(u^3\right)\right) \quad \text{avec} \quad u^2(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{6}+O\left(x^3\right) \quad \text{et} \quad u^3(x)=\frac{x^3}{8}+O\left(x^3\right)\\
&= 2.\left(1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+O\left(x^3\right)\right)+\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{6}+O\left(x^3\right)\right)-\left(\frac{x^3}{8}+O\left(x^3\right)\right)+O\left(x^3\right)\right)\\
&= 2-x+\frac{1}{12}x^2+O\left(x^2\right).
\end{aligned}$$

Alors, on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0)=2$. de plus ce prolongement est dérivable en 0 et $f'(0)=-1$.

L'équation de la tangente (T) est $y=2-x$.

Puisque $f(x)-(2-x)\underset{0}{\approx}\dfrac{1}{12}x^2\geq 0$ donc, au voisinage de 0 la courbe (Γ) au dessus de sa tangente (T).

b) *Déterminons la tangente (Δ) en 0 du (C) graphe de $g:\mathbb{R}-\{-2\}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=ln\dfrac{1}{x^2+4x+4}$ et précisons la position du graphe (C) par rapport à (Δ).*

Au voisinage de 0 on a

$$\begin{aligned}
g(x) &= ln\left((x+2)^{-2}\right)\\
&= -2ln(x+2) \quad \text{avec} \quad x>-2\\
&= -2\left(ln2+ln(1+\frac{x}{2})\right) \quad \text{avec} \quad x>-2\\
&= -2\left(ln2-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{24}+o\left(x^3\right)\right)\\
&= -2ln2+x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3+o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

L'équation de la tangente (Δ) est $y=-2ln2+x$.

Puisque $g(x)-(2-x)\underset{0}{\approx}-\dfrac{1}{4}x^2\leq 0$ donc, au voisinage de 0 la courbe (C) en dessous de sa tangente (Δ).

c) *On cherche à préciser la position du graphe $(\mathcal{C})$ de $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $h(x)=x^4-4x^3+2$ par rapport à sa tangente (D) au point d'abscisse 2.*

- *On remarque que l'équation de la tangente au point d'abscisse* 0 *est* $y = 2$. *Comme* $-4x^3$ *change de signe en* 0 *alors le point d'abscisse* 0 *est un point d'inflexion de* h. *Car le DL de* h *en* 0 *est* $h(x) = 2 - 4x^3 + x^4$.
- *Pour le DL de* $h(x)$ *en* 2, *on pose* $u = x - 2$

$$\begin{aligned}
h(x) &= h(u+2) \quad \text{avec} \quad x = u+2 \\
&= (u+2)^4 - 4\,(u+2)^3 + 2 \\
&= (u^4 + 8u^3 + 24u^2 + 32u + 16) - 4\,(u^3 + 6u^2 + 12u + 8) + 2 \\
&= -14 - 16u + 4u^3 + u^4 \\
&= -14 - 16\,(x-2) + 4\,(x-2)^3 + (x-2)^4\,.
\end{aligned}$$

L'équation de la tangente (D) *est* $y = -14 - 16\,(x-2)$.

Comme $4\,(x-2)^3$ *change de signe en* 2 *donc, le point d'abscisse* 2 *est un point d'inflexion de* h. *De plus, pour* x *assez proche de* 2 *à gauche* ($x \in]2-\varepsilon, 2[$ *avec* $\varepsilon > 0$) *le graphe* $(\mathcal{C})$ *est en dessous de sa tangente* (D) *et pour* x *assez proche de* 2 *à droite* ($x \in]2, 2+\varepsilon[$) *le graphe* $(\mathcal{C})$ *est au dessus de sa tangente* (D).

Position d'une courbe par rapport à son asymptote

Soient f une fonction définie au voisinage de ∞ et a et b deux constantes réelles.
Un développement asymptotique de f en ∞ de la forme $f(x) = ax + b + \dfrac{c_k}{x^k} \cdots \dfrac{c_n}{x^n} + o(\dfrac{1}{x^n})$ où k est le plus petit entier tel que $1 < k \leq n$ et le coefficient de $\dfrac{1}{x^k}$ soit non nul, permet de conclure que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f en ∞.
De plus, l'étude du signe du $\dfrac{c_k}{x^k}$ permet de positionner la courbe de f par rapport à cette asymptote.

Exemples 5.1.26 :

1°) Déterminons l'équation de l'asymptote (Δ) *de* (C) *graphe de* $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = e^{\frac{1}{x}}.\sqrt{x^2+2x+1}$ *et précisons la position du graphe* (C) *par rapport à* (Δ) *en* $+\infty$.
Au voisinage de $+\infty$ *on a*

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{\frac{1}{x}}.\,(x+1) \\
&= e^{u}.\left(\frac{1}{u} + 1\right) \quad \text{avec} \quad u = \frac{1}{x} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&= \left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o\left(u^3\right)\right)\left(\frac{1}{u} + 1\right) \\
&= 2 + \frac{1}{u} + \frac{3}{2}u + \frac{2}{3}u^2 + o\left(u^2\right) \\
&= 2 + x + \frac{3}{2x} + \frac{2}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).
\end{aligned}$$

Donc l'équation de (Δ) *l'asymptote de* f *en* $+\infty$ *est* $y = 2 + x$.
Puisque $f(x) - (2+x) \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{3}{2x} > 0$ *donc, au voisinage de* $+\infty$ *la courbe* (C) *reste au dessus de* (Δ).

2°) Déterminons l'équation de l'asymptote (Δ') *de* (C') *graphe de* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ *et précisons la position du graphe* (C') *par rapport à* (Δ') *en* $-\infty$.
Au voisinage de $-\infty$ *on a*

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}\\
&= -\frac{1}{x}.\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}\\
&= -\frac{1}{x}.\frac{1}{\sqrt{1+u}} \quad \text{avec} \quad u = \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} \underset{x \longrightarrow -\infty}{\longrightarrow} 0\\
&= -\frac{1}{x}.\left(1-\frac{1}{2}u+\frac{3}{8}u^2+o\left(u^2\right)\right) \quad \text{avec} \quad u^2 = \frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
&= -\frac{1}{x}.\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).\\
&= -\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{8x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)
\end{aligned}$$

Donc l'équation de (Δ') *l'asymptote de* (C') *en* $-\infty$ *est* $y = 0$.
Puisque $g(x) \underset{-\infty}{\approx} -\dfrac{1}{x} > 0$ *donc, au voisinage de* $-\infty$ *la courbe* (C') *reste au dessus de l'asymptote* (Δ').

5.2 Exercices

Exercice 5.2.1 *:*

Calculer le développement limité au voisinage de 0 *de*

a) $x \longmapsto \dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ *à l'ordre* 3.

b) $x \longmapsto ln\left(\dfrac{ln\,(1+x)}{x}\right)$ *à l'ordre* 4.

c) $x \longmapsto \dfrac{1}{1-arctanx}$ *à l'ordre* 5.

Exercice 5.2.2 *:*

1* *Déterminer le développement limité à l'ordre* 4*, au voisinage de* $\dfrac{\pi}{3}$*, de la fonction :* $x \longmapsto cosx$

2* *Calculer le développement limité à l'ordre* 3 *en* $\dfrac{\pi}{3}$ *de la fonction* $h : x \longmapsto ln(sinx)$.

3* ***a****) Donner un développement limité à l'ordre* 2 *de* $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$ *en* 0.

b*) En déduire un développement asymptotique à* 2 *termes en* $+\infty$ *de* f.

c*) Calculer un développement asymptotique à un terme en* $-\infty$.

Exercice 5.2.3 *:*

1. *Ecrire les développements limités d'ordre* 6 *en* 0 *des fonctions* $\longmapsto shx$ *et* $\longmapsto chx$.

2. *Calculer, en effectuant le produit, les développements limités d'ordre* 6 *en* 0 *des fonctions :*

$$x \longmapsto sh^2x, \quad x \longmapsto ch^2x \quad \text{et} \quad x \longmapsto shx.chx.$$

3. *Retrouver les résultats de la question précédente, en utilisant les formules :*

$$sh^2x = \frac{ch(2x)-1}{2}, \quad ch^2x = \frac{ch(2x)+1}{2} \quad \text{et} \quad shx.chx = \frac{sh(2x)}{2}.$$

Exercice 5.2.4 *:*

On suppose que le DL de la fonction argsh à l'ordre 5 *en* 0 *est*

$$argshx = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5),$$

où a, b et c sont des constantes réelles.

Trouver a, b et c, par deux méthodes différentes.

Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$argshx = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad argsh'x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad ch\,(argshx) = \sqrt{x^2+1} \quad \text{et} \quad sh\,(argshx) = x.$$

Exercice 5.2.5 *:*

($\mathit{1}$) *Calculer le développement asymptotique de* $x \longmapsto cothx$ *en* 0 *à la précision de* x^3.

($\mathit{2}$) *Calculer le développement asymptotique à* 3 *termes au voisinage de* $+\infty$ *de* $x \longmapsto x.arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)$.

Exercice 5.2.6 *:*

Dťeterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{x^a - a^x}{arctanx - arctana} \quad \text{avec} \quad a > 0, \qquad \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{arctanx - x^2}{cos\,(x^2) - 1},$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{shx - 2sh2x + sh3x}{ln\left(1 + x + 2x^2 + \sqrt{1-2x} - 1 - x^2\right)}, \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{ln(x+1)}{lnx}\right)^{xlnx}.$$

Exercice 5.2.7 *:*

1) *Préciser la position du graphe* $(\mathcal{C})$ *du fonction* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = e^x + sinx$ *par rapport à sa tangente* (T) *au point d'abscisse* 0.

2) *Préciser la position du graphe* $(-)$ *du fonction* $g :] - 1, +\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $g(x) = ln(x^2 + 2x + 1)$

par rapport à sa tangente (Δ) *au point d'abscisse* 1.

Exercice 5.2.8 *:*

a) *Calculer le développement asymptotique à* 5 *termes de* $x \longmapsto \dfrac{x}{x^2-1}$ *en* $+\infty$.

b) *Calculer le développement asymptotique à* 3 *termes de* $x \longmapsto \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ *en* $+\infty$.

c) *Calculer les développements asymptotiques à* 3 *termes de* $f : x \longmapsto \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+|x|}$ *en* $+\infty$ *et en* $-\infty$.

En déduire les limites de f *en* $+\infty$ *et en* $-\infty$.

d) *Calculer le développement asymptotique à* 3 *termes de* $g : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+1}}$ *en* $+\infty$. *Pius déterminer l'équation de l'asymptote en* $+\infty$ *et la position du graphe de* g *par rapport à cette asymptote.*

Exercice 5.2.9 *:*

En remarquons que $f' = g \circ h$ *où*

$$g : x \in]-1,1[\longmapsto \frac{-1}{1+x} \qquad \text{et} \qquad h : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2+2x.$$

1^* *Trouver l'expression du développement limité d'ordre* 4 *en* 0 *de* f'.

2^* *En déduire l'expression du développement limité d'ordre* 5 *en* 0 *de* f.

Exercice 5.2.10 *:*

Montrer que le dévloppement limité d'ordre 3 *en* 0 *de* $x \longmapsto cosx.ln\,(1+x)$ (*resp.* $x \longmapsto (1+x)^{\frac{1}{1+x}}$) *a pour partie régulière* $x - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{6}$ (*resp.* $1 + x - x^2 - \dfrac{x^3}{2}$).

Exercice 5.2.11 *:*

Pour $n \in \mathbb{R}$, *on désigne par* f_n *la fonction définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par*

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n lnx}{x^2-1} & si\ x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & si\ x = 1 \end{cases}.$$

a^*) *Déterminer un développement limité à l'ordre* 2 *en* 1 *de la fonction* f_n.

b^*) *En déduit l'equation de la tangente* (T_n) *du graphe* (C_n) *de* f_n *au point d'abscisse* 1, *ainsi que la position de la courbe* (C_0) *de* f_0 *par rapport* (T_0) *au voisinage de* 1.

Exercice 5.2.12 *:*

Soit f *la fonction définie sur* $]-1,1[$ *par* $f(x) = \dfrac{arcsin(x)}{1-x^2}$.

1.) *Déterminer la fonction* $g :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que, pour tout* $x \in]-1,1[$; $f'(x) + g(x)f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

2.) *Déterminer un développement limité à l'ordre* 4 *en* 0 *de la fonction* g.

3.) *En déduire un développement limité à l'ordre* 5 *en* 0 *de* f.

Chapitre 6

Algèbre linéaire

6.1 Structures algébriques

6.1.1 Loi de composition interne

Définition 6.1.1 *:*

Soit E un ensemble.

On appelle loi de composition interne (ou opération) sur E toute application, on la note ici par $\star$ de $E \times E$ vers E et on écrie

$$\begin{array}{rccl} \star : & E & \longrightarrow & E \\ & (x,y) & \longmapsto & x \star y. \end{array}$$

Les lois de composition interne sont généralement notées $\star$, Δ, $\perp$, ∇, $\diamondsuit$, $+$, $\times$, ...

Exemples 6.1.2 *:*

Les applications (les opérations) $\times$, $+$, $\circ$, $\perp$, $\cap$ et $\star$ suivantes

$$\begin{array}{rccl} \times : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & (n,p) & \longmapsto & n \times p. \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} + : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & (p,q) & \longmapsto & p + q. \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} \circ : & \mathcal{A}(E,E) \times \mathcal{A}(E,E) & \longrightarrow & \mathcal{A}(E,E) \\ & (f,g) & \longmapsto & f \circ g. \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \perp : & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (z,z') & \longmapsto & z \times z' - 2z. \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} \cap : & \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ & (A,B) & \longmapsto & A \cap B. \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} \star : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \frac{x-y}{y^2+1}. \end{array}$$

Où E un ensemble et $\mathcal{A}(E,E)$ l'ensemble d'applications de E vers E.

Sont des lois de composition interne sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathcal{A}(E,E)$, $\mathbb{C}$, $\mathcal{P}(E)$, $\mathbb{R}$ respectivement.

Définition 6.1.3 *:*

On appelle ensemble structuré (ou magma) tout couple $(E, \star)$ où E un ensemble et $\star$ une loi de composition *interne sur E.*

Exemple 6.1.4 :

$(\mathbb{C}, \times)$, $(\mathcal{P}(E), \cup)$, $(\mathcal{A}(E,E), \circ)$ *sont des magmas.*

Définition 6.1.5 :

Soit $(E, \star)$ un ensemble structuré. toute partie A de E est dite stable par rapport à la loi $\star$ si :

$$\forall (x,y) \in (A)^2;\ x \star y \in A.$$

Exemples 6.1.6 :

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ *et* $\mathbb{R}$ *sont des parties stables de* $(\mathbb{C}, +)$ *et de* $(\mathbb{C}, \times)$.
- $\mathbb{N}$ *n'est pas une partie stable de* $(\mathbb{C}, -)$. *Car* $\exists p, q \in \mathbb{N}; p - q \notin \mathbb{N}$, *comme* $3 - 5 = -2 \notin \mathbb{N}$.

6.1.2 Propriétés d'une loi de composition interne

Commutativité , Associativité

Définition 6.1.7 :

Soit $\star$ une loi de composition interne sur un ensemble E non vide.

▶ ($\star$ *est commutative*) *si et seulement si* $(\forall (x,y) \in (E)^2;\ x \star y = y \star x)$.

▶ ($\star$ *est associative*) *si et seulement si* $(\forall (x,y,z) \in (E)^3;\ (x \star y) \star z = x \star (y \star z))$.

Si la loi $\star$ commutative (resp. associative), on dit que le magma $(E, \star)$ est commutatif (resp. associatif).

Exemples 6.1.8 :

∗ *Les lois $+$ et $\times$ sont commutatives et associatives sur $\mathbb{C}$.*

∗ *Les lois $\cap$ et $\cup$ sont commutatives et associatives sur $\mathcal{P}(E)$, où E un ensemble.*

∗ *La loi $\circ$ est associative mais n'est pas commutative sur $\mathcal{A}(E,E)$, où E un ensemble.*

∗ *L'opération Δ définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \Delta y = \sqrt{x^2 + y^2}$, est commutative et associative.*

Car, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

$x \Delta y = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2 + x^2} = y \Delta x.$

Et pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} (x \Delta y)\, \Delta z &= \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \Delta z = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2} = \sqrt{(x^2 + y^2) + z^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (y^2 + z^2)} = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{y^2 + z^2}\right)^2} = x \Delta \left(\sqrt{y^2 + z^2}\right) = x \Delta\, (y \Delta z)\,. \end{aligned}$$

6.2 Éléments particuliers

6.2.1 Élément neutre, Élément symétrisable

Définition 6.2.1 :

Soit $\star$ une loi de composition interne sur un ensemble E non vide.

▶ *e de E est un élément neutre pour la loi $\star$ si et seulement si ($\forall x \in E;\ e \star x = x = x \star e$).*

On dit aussi, ($\star$ admet un élément neutre, noté e dans E) $\Longleftrightarrow$ ($\exists e \in E\ /\ \forall x \in E;\ e \star x = x = x \star e$).

▶ *Si e est l'élément neutre pour $\star$, alors on dit qu'un élément x de E est symétrisable (ou inversible) pour la loi $\star$, s'il existe un élément x' de E tel que $x' \star x = e = x \star x'$.*

L'élément x' est appelé élément symétrique (ou inverse) de x pour la loi $\star$.

• *On dit qu'un élément x de E admet un **symétrisable à droite** pour la loi $\star$, si et seulement si $\exists x' \in E\ /\ x \star x' = e$.*

• *On dit qu'un élément x de E admet un **symétrisable à gauche** pour la loi $\star$, si et seulement si $\exists x' \in E\ /\ x' \star x = e$.*

Exemples 6.2.2 :

$*$ *L'élément neutre pour l'addition sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ est 0 et 1 est élément neutre pour la multiplication.*

$*$ *L'élément neutre pour la loi de composition sur $\mathcal{A}(E,E)$ est Id_E.*

$*$ *L'élément neutre pour la multiplication sur $\mathcal{A}(E,E)$ est l'application constante $c : x \in E \longmapsto 1 \in E$.*

$*$ *L'élément neutre pour la loi $\cup$ sur $\mathcal{P}(E)$ est ϕ. Puisque $\forall A \in \mathcal{P}(E); A \cup \phi = \phi \cup A = A$.*

$*$ *L'élément neutre pour la loi $\cap$ sur $\mathcal{P}(E)$ est E. Puisque $\forall B \in \mathcal{P}(E); B \cap E = E \cap B = B$.*

• *Le symétrique d'un élément x de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ pour l'addition est $-x$.*

• *Le symétrique d'un élément x de $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$ pour la multiplication est $\frac{1}{x}$.*

• *Le symétrique d'une application bejective f de $\mathcal{A}(E,E)$ pour la loi de composition est sa réciproque f^{-1}.*

• *Soit $\perp$ une loi de composition interne sur $\mathbb{R}$ définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \perp y = x + y + xy$.*

L'élément neutre pour la loi $\perp$ sur $\mathcal{R}$ est 0. Puisque pour tout $x \in \mathcal{R}$, on a : $x \perp 0 = 0 \perp x = x$.

Le symétrique d'un élément x de $\mathcal{R} - \{-1\}$ pour la loi $\perp$ est $x' = \frac{-x}{x+1}$. Puisque pour tout $x \in \mathcal{R} - \{-1\}$, on a : $x \perp x' = x' \perp x = 0$.

Proposition 6.2.3 :

Si une loi de composition interne sur un ensemble E non vide admet un élément neutre, alors il est unique.

Preuve :

Supposons qu'il existe deux éléments neutres e et e' pour la loi de composition interne $\star$ sur un ensemble E.

Puisque e est un élément neutre pour $\star$, on a $\forall x \in E;\ e \star x = x = x \star e$. En particulier $x = e'$, on obtient :

$$e \star e' = e' \text{ et } e' \star e = e'. \tag{6.1}$$

Comme e' est un élément neutre aussi pour $\star$, on a $\forall x \in E;\ e' \star x = x = x \star e'$. On peut prendre cette fois $x = e$, on obtient :

$$e' \star e = e \text{ et } e \star e' = e. \tag{6.2}$$

D'apès (6.1) et (6.2), on en deduit par transitivité que $e = e'$. ■

Proposition 6.2.4 *:*
Soient $\star$ une loi de composition interne, associative et admet un élément neutre sur un ensemble E non vide et x et y deux éléments de E.
• Si x est symétrisable pour la loi $\star$, alors son symétrique est unique.
• Si x et y sont symétrisables, alors $x \star y$ est symétrisable et son symétrique est donné par $(x \star y)' = y' \star x'$, où x' est le symétrique de x et y' est le symétrique de y.

Preuve :
Soient $\star$ une loi de composition interne, associative sur l'ensemble E et e est l'élément neutre.
• Montrons que le symétrique de $x \in E$ s'il existe il est unique.
On suppose x possède deux symétriques x' et x'' pour la loi $\star$. On a alors,

$$x \star x' = e = x' \star x \quad \text{et} \quad x \star x'' = e = x'' \star x. \tag{6.3}$$

Nous pouvons montrer que $x = x'$ comme suit :

$$\begin{aligned} x' &= e \star x' && (\text{car } e \text{ est l'élément neutre}) \\ &= (x'' \star x) \star x' && (\text{d'aprés } (6.3)) \\ &= x'' \star (x \star x') && (\text{car } \star \text{ est associative}) \\ &= x'' \star e && (\text{d'aprés } (6.3)) \\ &= x''. \end{aligned}$$

• Montrons que si x et y symétrisables, alors $x \star y$ est symétrisable et son symétrique est $y' \star x'$. On suppose que x et y symétrisables et x' et y' leurs symétriques respectifs pour la loi $\star$. On a alors,

$$x \star x' = e = x' \star x \quad \text{et} \quad y \star y' = e = y' \star y. \tag{6.4}$$

On va calculer maintenant $(x \star y) \star (y' \star x')$.

$$\begin{aligned}(x \star y) \star (y' \star x') &= x \star (y \star y') \star x' && (\text{car } \star \text{ est associative})\\ &= x \star e \star x' && (\text{d'aprés } (6.4))\\ &= x \star x' = e.\end{aligned}$$

De la même manière on peut veréfier que $(y' \star x') \star (x \star y) = e$. ■

6.2.2 Élément absorbant, Élément simplifiable

Définition 6.2.5 :

Soient $\star$ une loi de composition interne sur un ensemble E non vide et a un élément de E.

- ▶ *a est élément absorbant pour la loi $\star$ si et seulement si $\forall x \in E;\ a \star x = x \star a = a$.*
- ▶ *$z \in E$ est simplifiable à gauche pour la loi $\star$ si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2;\ z \star x = z \star y \Longrightarrow x = y$.*
- ▶ *$z \in E$ est simplifiable à droite pour la loi $\star$ si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2;\ x \star z = y \star z \Longrightarrow x = y$.*
- ▶ *$z \in E$ est simplifiable pour la loi $\star$ si et seulement si z est simplifiable à gauche et à droite pour la loi $\star$.*

Exemples 6.2.6 :

$*$ *0 est un élément absorbant pour la multiplication dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.*

$*$ *E est un élément absorbant pour la réunion dans $\mathcal{P}(E)$.*

$*$ *ϕ est un élément absorbant pour l'intersection dans $\mathcal{P}(E)$.*

$\otimes$ *Tout élément de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ est simplifiable pour l'addition.*

$\otimes$ *Tout élément de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$ est simplifiable pour la multiplication.*

$\otimes$ *Toute application injective de $\mathcal{A}(E, E)$ est simplifiable à droite pour la loi de composition.*

$\otimes$ *Toute application surjective de $\mathcal{A}(E, E)$ est simplifiable à gauche pour la loi de composition.*

$\otimes$ *Toute application bejective de $\mathcal{A}(E, E)$ est simplifiable pour la loi de composition.*

Proposition 6.2.7 :

Soient $\star$ une loi de composition interne sur un ensemble E non vide, associative et admet un élément neutre. Tout élément de E symétrisable est simplifiable.

Preuve :

On suppose que $\star$ une loi de composition interne sur E, associative, e est l'élément neutre et $x \in E$ symétrisable son symétrique est x'.

Pour tous $y, z \in E$ on a :

$$x \star y = x \star z \Longrightarrow x' \star (x \star y) = x' \star (x \star z) \Longleftrightarrow (x' \star x) \star y = (x' \star x) \star z \Longleftrightarrow e \star y = e \star z \Longleftrightarrow y = z.$$

Donc x est un élément simplifiable à gauche et de même on obtient x simplifiable à droite. ■

6.2.3 Structures produits

6.2.4 Structure sur $E \times F$

Définition 6.2.8 :

Soient (E, Δ) et $(F, \perp)$ deux ensembles structurés.

On définit une loi de composition interne notée $\star$ sur $E \times F$ par :

$$\forall (x, y), (x', y') \in E \times F;\ (x, y) \star (x', y') = (x \Delta x', y \perp y')$$

Cette loi $\star$ est appelé loi produit sur $E \times F$.

Exemple 6.2.9 :

La loi produit $\star$ des structures $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{R}, \times)$ définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ par : $(x, y) \star (x', y') = (x + x', y \times y')$ est une loi de composition interme sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$

Proposition 6.2.10 :

Soit $\star$ une loi produit des structures (E, Δ) et (F, ∇).

Si (E, Δ) et (F, ∇) sont des structures algebriques commutatifs (resp. des structures algebriques associatifs) de neutre e et e' alors $(E \times F, \star)$ est un structure algebrique commutatif (resp. des structures algebriques associatifs) d'élément neutre $\ell = (e; e')$.

De plus, un élément (x, y) de $E \times F$ est symétrisable si, et seulement si, x est symétrisable pour la loi Δ et y est symétrisable pour la loi ∇ et on a alors $sym((x; y)) = (sym(x); sym(y))$.

Preuve :

Soient $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in E \times F$ et e et e' sont neutres pour les lois Δ et ∇ sur E et F.

$\oplus$ Montrons que $\star$ est commutative sur $E \times F$.

On suppose que Δ et ∇ sont commutatives sur E et F respectivement.

$$\begin{aligned} (x, y) \star (x', y') &= (x \Delta x', y \nabla y') \ \text{(par définition de la loi } \star \text{ sur } E \times F \\ &= (x' \Delta x, y' \nabla y) \ \text{(par commutativité des lois } \Delta \text{ et } \nabla \text{ sur } E \text{ et } F \\ &= (x', y') \star (x, y) \ \text{(par définition de la loi } \star \text{ sur } E \times F. \end{aligned}$$

Ainsi la loi $\star$ est commutative sur $E \times F$.

$\oplus$ Montrons que $\star$ est associative sur $E \times F$.

On suppose que Δ et ∇ sont associatives sur E et F respectivement.

$$\begin{aligned}
((x,y)\star(x',y'))\star(x'',y'') &= (x\Delta x', y\nabla y')\star(x'',y'') \text{ (par définition de la loi } \star \text{ sur } E\times F\\
&= ((x\Delta x')\,\Delta x'', (y\nabla y')\,\nabla y'') \text{ (par définition de la loi } \star \text{ sur } E\times F\\
&= (x\Delta(x'\Delta x''), y\nabla(y'\nabla y'')) \text{ (par associativité des lois } \Delta \text{ et } \nabla \text{ sur } E \text{ et } F\\
&= (x,y)\star((x'\Delta x'', y'\nabla y''))\\
&= (x,y)\star((x',y')\star(x'',y'')).
\end{aligned}$$

Ce qui montre que la loi $\star$ est associative sur $E\times F$.

$\oplus$ Montrons que l'élément $\ell=(e;e')$ est un élément neutre pour la loi $\star$ sur $E\times F$. On a :

$$\begin{aligned}
(x,y)\star(e,e') &= (x\Delta e, y\nabla e') \text{ (par définition de la loi } \star \text{ sur } E\times F\\
&= (e\Delta x, e'\nabla y) \text{ (car } e \text{ et } e' \text{ sont neutres à droite et à gauche pour les lois } \Delta \text{ et } \nabla \text{ sur } E \text{ et } F\\
&= (x,y).
\end{aligned}$$

Donc, $\ell=(e;e')$ est l'élément neutre pour la loi $\star$ sur $E\times F$.

$\oplus$ Montrons maintenant que ((x,y) symétrisable dans $E\times F$) $\Longleftrightarrow$ (x et y sont symétrisables pour les lois Δ et ∇respectivement).

Soit (x',y') le symétrique de l'élément (x,y) pour la loi $\star$ sur $E\times F$. On a :

$$\begin{aligned}
(x,y)\star(x',y')=(e,e') &\Longleftrightarrow (x\Delta x', y\nabla y')=(e,e') \text{ (par définition de la loi } \star \text{ sur } E\times F\\
&\Longleftrightarrow (x\Delta x'=e) \text{ et } (y\nabla y'=e').
\end{aligned}$$

De même on a aussi :

$$\begin{aligned}
(x',y')\star(x,y)=(e,e') &\Longleftrightarrow (x'\Delta x, y'\nabla y)=(e,e') \text{ (par définition de la loi } \star \text{ sur } E\times F\\
&\Longleftrightarrow (x'\Delta x=e) \text{ et } (y'\nabla y=e').
\end{aligned}$$

Ceci entraine, x' est le symétrique de x et y' est le symétrique de y pour les lois Δ et ∇respectivement. C'est-à-dire x et y symétrisables.

Inversement, soient $(x,y)\in E\times F$ avec x et y symétrisables.

On suppose que x' est le symétrique de x et y' est le symétrique de y pour les lois Δ et ∇respectivement.

Montrons que (x,y) est symétrisable.

$x\Delta x' = x'\Delta x = e$ et $y\nabla y' = y'\nabla y = e'$ car x et y symétrisables. Alors $(x\Delta x', y\nabla y') = (e,e')$ et $(x'\Delta x, y'\nabla y)=(e,e')$. Par définition de la loi $\star$ sur $E\times F$, on a : $(x,y)\star(x',y')=(e,e')$ et $(x',y')\star(x,y)=(e,e')$. Cela signifier que (x',y') est le symétrique de (x,y) pour la loi $\star$ sur $E\times F$. ■

6.2.5 Structure sur E^n

Définition 6.2.11 *:*

Soient $(E, \star)$ un ensemble structuré et n un nombre naturel non nul.

La loi produit, encore notée $\star$, sur E^n est définie par :

$$\forall\left(x_1, x_2, ..., x_n\right), \left(y_1, y_2, ..., y_n\right) \in E^n;\ \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \star \left(y_1, y_2, ..., y_n\right) = \left(x_1 \star y_1, x_2 \star y_2, ..., x_n \star y_n\right).$$

Exemples 6.2.12 *:*

$\diamond$ *La loi de composition interne $\times$ sur $\mathbb{R}^2$ est definie par :*

$$\forall(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2;\ (x, y) \times (x', y') = (x \times x', y \times y').$$

$\diamond$ *La loi de composition interne $+$ sur $\mathbb{R}^3$ est definie par :*

$$\forall(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^2;\ (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z').$$

Proposition 6.2.13 *:*

Si $(E, \star)$ est un ensemble structuré commutatif (resp. un ensemble structuré associatif) d'élément neutre e et n un nombre naturel non nul, alors $(E^n, \star)$ est un ensemble structuré (resp. un ensemble structuré commutatif) d'élément neutre $\ell = (e, e, ..., e)$. De plus, l'élément $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de E^n est symétrisable dans E^n si, et seulement si, chaque x_i avec $i = 1, 2, ..., n$ l'est aussi dans E, et alors le symétrique de $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dans E^n est $(\text{sym. de } x_1, \text{sym. de } x_2, ..., \text{sym. de } x_n)$.

Preuve : Nous répétons la même preuve de la Proposition **6.2.10** avec les tiplets de n composontes. ■

6.3 Structure de groupe

Définition 6.3.1 *:*

Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne (notée $\diamond$). $(G, \diamond)$ est un groupe si et seulement si

1) $\diamond$ est associative,

2) $\diamond$ possède un élément neutre dans G,

3) tout élément de G est symétrisable pour la loi $\diamond$ dans G.

Si de plus, $\diamond$ est commutative, le groupe $(G, \diamond)$ est dit commutatif ou abélien.

Exemples 6.3.2 *:*

1) $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{D},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{D}^*,\times)$, $(\mathbb{Q}^*,\times)$, $(\mathbb{R}^*,\times)$, $(\mathbb{C}^*,\times)$ *sont des groupes commutatifs.*

2) $(\mathbb{N},+)$ *n'est pas un groupe. Car les nombres naturels non nuls ne sont pas symétrisables dans* $\mathbb{N}$ *pour l'addition.*

3) $(\mathbb{Z},+)$ *n'est pas un groupe. Car tous les élément de* $\mathbb{Z}-\{-1,1\}$ *ne sont pas symétrisables dans* $\mathbb{Z}$ *pour la multiplication.*

4) *Soit* E *un ensemble non vide.* $\mathcal{P}(E)$ *muni de la loi* $\cap$ *n'est pas un groupe. Car, il existe* $A \in \mathcal{P}(E)$ *et* $A \neq E$ *n'est pas symétrisable dans* $\mathcal{P}(E)$ *pour* $\cap$*.*

5) *Soient* E *un ensemble non vide non singleton et* $\mathcal{B}(E,E)$ *l'ensemble d'applications bejectives de* E *sur* E *(ou permutations de* E *).*

$\mathcal{B}(E,E)$ *muni de la loi* $\circ$ *est un groupe.*

Pour montrer qu'une structure est un groupe à partir de la définition peut être assez long. Il existe une autre technique pratique et plus rapide pour prouver qu'un sous-ensemble d'un groupe est lui-même un groupe : c'est la notion de sous-groupe.

6.3.1 Sous-groupe

Définition 6.3.3 *:*

Soient $(G,\star)$ *un groupe d'élément neutre* e *et* H *une partie non vide de* G*.*

H *est un* *sous-groupe* de $(G,\star)$ *si et seulement si vérifiant :*

$$(I)\quad \begin{cases} 1)\ e \in H, \\ 2)\ H \ \text{ stable pour la loi } \star, \\ 3)\ \text{ tout élément de } H \text{ est symétrisable pour la loi } \star. \end{cases} \tag{6.5}$$

Exemples 6.3.4 *:*

1$*$ *Si* $(G,\star)$ *est un groupe, alors les sous ensembles* $\{e\}$ *et* G *sont des sous-groupes de* $(G,\star)$ *appelés sous-groupes triviaux du groupe* $(G,\star)$*. Les autres sous-groupes, s'il en existe, sont appelés sous-groupes propres de* $(G,\star)$*.*

2$*$ *Les ensembles* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *sont sous groupes de* $(\mathbb{C},+)$*.*

3$*$ *Les ensembles* $\mathbb{D}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ *sont sous groupes de* $(\mathbb{C}^*,\times)$*.*

4$*$ *L'ensemble* $\{f, Id_E\}$ *est un sous groupe de* $(\mathcal{B}(E,E),\circ)$*, où* f *une application bejective de* E *sur* E *telle que* $f\circ f = Id_E$ *et* $\mathcal{B}(E,E)$ *l'ensemble d'applications bejectives de* E *sur* E*.*

Proposition 6.3.5 *:*

Soient H un sous-groupe de $(G, \star)$. On a :

$$\text{les conditions } \textbf{(I)} \text{ de } (6.5) \iff \textbf{(II)} \begin{cases} a)\ e \in H, \\ b)\ \forall (x,y) \in H^2; x \star y' \in H, \text{ où } y' \text{ est le symétrique de } y. \end{cases}$$

Preuve :

Il est clair que **(I)** $\Longrightarrow$ **(II)**. Reste à montrer que **(II)** $\Longrightarrow$ **(I)**.

Supposons que H vérifie les assertions a) et b), alors 1) est évident et en choisissant dans l'assertion b) $x = e$, on conclut que tout $y \in H$; $e \star y' = y' \in H$, ce qui assure que 3) est bien vérifié. Pour l'assertion 2) on applicons b) avec $y = y'$, on trouve $\forall x, y' \in H$; $x \star (y')' = x \star y \in H$. Finalement montré que (I) $\Longleftrightarrow$ (II) $\Longleftrightarrow$ (H est un sous-groupe de $(G, \star)$). ■

Proposition 6.3.6 *:*

1) Si H est un sous-groupe d'un groupe (G, Δ) alors (H, Δ) est un groupe.

2) Si de plus si le groupe (G, Δ) est commutatif alors (H, Δ) l'est aussi.

Preuve :

1) Soit H un sous-groupe d'un groupe (G, Δ) d'élément neutre e.

Puisque H est un sous groupe de (G, Δ), alors H stable pour la loi Δ, $e \in H$ et pour tout $x \in H$ le symétrique de x est dans H. Ainsi, H est une partie stable pour la loi Δ de G et Δ associative, alors Δ est associative dans H. Ce qui montre que $(H; \Delta)$ vérifie toutes les conditions d'un groupe, donc $(H; \Delta)$ est un groupe.

2) Soient H un sous-groupe d'un groupe abélien (G, Δ) et $x, y \in H$.

Puisque H stable pour la loi Δ, alors $x\Delta y \in H$. Comme la loi Δ commutative, on a alors $x\Delta y = y\Delta x \in H$. ■

Proposition 6.3.7 *:*

L'intersection de sous-groupes d'un groupe (G, Δ) est un sous-groupe de (G, Δ).

Preuve :

Soients H_i avec $i = \overline{1,n}$ sont sous-groupes de $(G; \Delta)$ d'élément neutre e et y' le symétrique de y pour la loi Δ.

a) Pour tout $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$; on a $e \in H_i$ car H_i est un sous-groupe, alors $e \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i$.

b) Soit $x, y \in H_i$ avec $i = \overline{1,n}$, alors $x, y \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i$. Puisque H_i avec $i = \overline{1,n}$ sont sous-groupes, on a alors pour tout $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$; $x \star y' \in H_i$. Donc $x \star y' \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i$. Ce qui montre que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i$ est un sous-groupe de (G, Δ). ■

Remarque 6.3.8 *:*

L'union de sous groupes d'un groupe $(G; \Delta)$, n'est pas nécessairement un sous groupe de $(G; \Delta)$.

Exemple 6.3.9 *:*

$H_1 = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x = 2^n \text{ avec } n \in \mathbb{Z}\}$, $H_2 = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x = 3^n \text{ avec } n \in \mathbb{Z}\}$ *sont deux sous groupes de* $(\mathbb{R}^*; \times)$. *Mais* $H_1 \cup H_2$ *n'est pas un sous groupe de* $(\mathbb{R}^*; \times)$. *Puisque* $2^2, 3 \in H_1 \cup H_2$ *et* $2^2 \times 3 \notin H_1 \cup H_2$. *C'est-à-dire* $H_1 \cup H_2$ *n'est pas stable pour* $\times$.

6.3.2 Sous-groupes engendrés

Définition 6.3.10 *:*

Soit $(G, \star)$ *un groupe et* A *un sous-ensemble de* G.

Le sous-groupe engendré par A *est l'intersection de tous les sous-groupes de* G *contenant* A. *C'est-à-dire le plus petit sous-groupe de* G *contenant* A *et est noté* $Gr(A)$.

Exemples 6.3.11 *:*

1• *Si* $A = \{1\}$ *et le groupe est* $(\mathbb{R}, +)$, *le sous-groupe engendré par* A *est* $Gr(A) = (\mathbb{Z}, +)$.

2• *Si* $B = \{6, 9\}$ *et le groupe est* $(\mathbb{R}, +)$, *le sous-groupe engendré par* B *est* $Gr(B) = (3\mathbb{Z}, +)$, *où* $3\mathbb{Z}$ *est l'ensemble des multiples de 3 dans* $\mathbb{Z}$.

3• *Si* $C = \{2i\}$ *et le groupe est* $(\mathbb{C}, \times)$, *le sous-groupe engendré par* C *est* $Gr(C) = \{(2i)^n \ /n \in \mathbb{Z}\}$.

6.3.3 Notation multiplicative et additive

Un groupe est dit noté additivement (resp. multiplicativement) si sa loi de composition interne est notée $+$ (resp. $\times$)

En notation multiplicative

Soit $(G, \star)$ un groupe d'élément neutre e noté aussi 1_G, on définit les puissances entières d'un élément a de G par : $a^{\star 0} = e = a^0 = 1_G$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$; $a^{\star k} = \underbrace{a \star a \star ... \star a}_{k \ facteurs} = a^k$ et $(a^{-1})^{\star k} = \underbrace{a^{-1} \star a^{-1} \star ... \star a^{-1}}_{k \ facteurs} = (a^{-1})^k$ où a^{-1} est le symétrique de a pour la loi $\star$.

Avec ces notations, on a : pour tous $p, r \in \mathbb{Z}$; $x^p \star x^r = x^{p+r} = x^r \star x^p$, $(x^p)^r = x^{pr} = (x^r)^p$.

Attention : Si le groupe n'est pas commutatif, alors pour $x, y \in G$, $(x \star y)^k \neq x^k \star y^k$.

Remarque 6.3.12 *:*

Les règles de calcul sur les puissances sont les mêmes que pour les puissances des nombres réels dans le cas le groupe est commutatif. C'est-à-dire pour tous $x, y \in G$, $k \in \mathbb{N}^*$, $(x \star y)^k = x^k \star y^k$ *et* $(x \star y)^{-1} = x^{-1} \star y^{-1}$.

Si $\star$ est la loi de composition $\circ$ dans $\mathcal{B}(E,E)$ l'ensemble d'applications bejectives de E sur E (E ensemble non vide donné). Pour toute f de $\mathcal{B}(E,E)$,

$$\begin{cases} f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n\ facteurs} & si\ \ n > 0, \\ f^n = Id_E & si\ \ n = 0, \\ f^n = \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \ldots \circ f^{-1}}_{-n\ facteurs} & si\ \ n < 0. \end{cases}$$

En notation additive

Soit $(G,\star)$ un groupe d'élément neutre 0_G et le symétrique d'un élément x de G est noté $-x$. On se place maintenant dans la situation où la loi du groupe $\star$ est $+$.

$$Pour\ tout\ \ x \in G,\ k \in \mathbb{Z};\ \begin{cases} nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n\ termes} & si\ \ n > 0, \\ nx = 0_G & si\ \ n = 0, \\ nx = \underbrace{(-x) + (-x) + \cdots + (-x)}_{-n\ termes} & si\ \ n < 0. \end{cases}$$

Avec ces notations, on a : pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$, pour tous $x, y \in G$ on a :
$nx + mx = (n+m)x, \quad (-n)x = -nx, \quad n(mx) = (nm)x, \quad et \quad (x + y = y + x \Longrightarrow n(x+y) = nx + ny)$.

6.4 Morphisme de groupes

Définition 6.4.1 *:*
Soient $(E,\star)$ et (F,Δ) deux ensembles structurés .
On appelle ***morphisme*** *ou* ***homomorphisme*** *d'ensembles structurés toute application $f : E \longrightarrow F$ vérifiant :*

$$\forall (x,y) \in E^2;\ f(x \star y) = f(x) \Delta f(y). \tag{6.6}$$

- $\star$ *Si $(E,\star)$ et (F,Δ) sont deux groupes, on dit que f est un morphisme de groupes.*
- $\star$ *Si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme.*
- $\star$ *Si $f : E \longrightarrow E$ vérifiant (6.6), on dit que f est un endomorphisme.*
- $\star$ *Si f est un endomorphisme bijective, on dit que f est un automorphisme.*

Exemples 6.4.2 *:*

- *Soient les deux groupes $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.*

Les deux applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ *et* $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *definies par* $f(x) = e^x$ *et* $g(x) = lnx$ *sont morphismes de groupes. En effet,*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x+y) = e^{x+y} = e^x \times e^y = f(x) \times f(y)$$

et

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2;\ g(x \times y) = ln(x \times y) = lnx + lny = g(x) + g(y).$$

De plus, ces deux morphismes sont bejectifs. Donc sont isomorphismes.

- *L'application* $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ *definie pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ *par* $h(n) = 3^n$, *est un morphisme de* $(\mathbb{Z}, +)$ *dans* $(\mathbb{Z}, \times)$. *Car*

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2;\ h(p+q) = 3^{p+q} = 3^p \times 3^q = h(p) \times h(q).$$

- *L'application identité* $Id_G : G \longrightarrow G$ *est un automorphisme de l'ensemble structuré* $(G, \star)$.

Proposition 6.4.3 *:*

Soit a *un élément d'un ensemble structuré* $(E, \star)$. *L'application* $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow E$ *définie pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par* $\psi(n) = a^{\star n} = \underbrace{a \star a \star ... \star a}_{n\ facteurs}$ *est un morphisme d'ensembles structurés de* $(\mathbb{N}, +)$ *dans* $(E, \star)$.

Si on remplace $\mathbb{N}$ *par* $\mathbb{Z}$ *et* $(E, \star)$ *est un groupe, alors l'application* ψ *est un morphisme de groupes de* $(\mathbb{Z}, +)$ *dans* $(E, \star)$.

Preuve :

Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}
\psi(p+q) &= a^{\star(p+q)} \\
&= \underbrace{a \star a \star \cdots \star a}_{p+q\ facteurs} \\
&= \underbrace{a \star a \star \cdots \star a}_{p\ facteurs} \star \underbrace{a \star a \star \cdots \star a}_{q\ facteurs} \\
&= a^{\star p} \star a^{\star q} \\
&= \psi(p) \star \psi(q).
\end{aligned}$$

Donc ψ est un morphisme d'ensembles structurés de $(\mathbb{N}, +)$ dans $(E, \star)$.

Soient $p, q \in \mathbb{Z}_-$ et a un élément de groupe $(E, \star)$. Alors $\exists k, k' \in \mathbb{N}\ /\ p = -k \wedge q = -k'$. Nous avons $\psi(p+q) = a^{\star(p+q)} = a^{\star(-k-k')} = (a^{-1})^{\star(k+k')} = (a^{-1})^{\star k} \star (a^{-1})^{\star k'} = a^{\star(-k)} \star a^{\star(-k')} = \psi(p) \star \psi(q)$.

Donc ψ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(E, \star)$. ∎

Proposition 6.4.4 *:*

Soient $f : E \longrightarrow F$ *un homomorphisme de groupes de* $(E, \star)$ *dans* $(F, \diamond)$ *d'éléments neutres* e_E *et* e_F *respectivement. Alors :*

1)• $f(e_E) = e_F$,

2)• $\forall x \in E; f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$,

3)• $\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E^n; f(x_1 \star x_2 \star \cdots \star x_n) = f(x_1) \diamond f(x_2) \diamond \cdots \diamond f(x_n)$,

4)• $\forall x \in E, \forall p \in \mathbb{Z}; f(x^{\star p}) = (f(x))^{\diamond p}$.

Preuve :

1)• On a $f(e_E) = f(e_E \star e_E) = f(e_E) \diamond f(e_E)$. En composant à gauche par $(f(e_E))^{-1}$ pour la loi $\diamond$ on obtient $e_F = f(e_E)$ car $(f(e_E))^{-1} \diamond f(e_E) = e_F$.

2)• Soit x^{-1} le symétrique de x dans E, alors $x^{-1} \star x = e_E$ donc $f\left(x^{-1} \star x\right) = f\left(e_E\right) = e_F$, cela entraîne $f(x^{-1}) \diamond f(x) = e_F$, en composant à droite par $(f(x))^{-1}$ pour la loi $\diamond$ nous obtenons $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

3)• Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E^n$.

Par récurrence sur $\mathbb{N}^*$ on a :

pour $n = 1$, on a $f(x_1) = f(x_1)$ donc $p(1)$ est vraie.

Soit $f(x_1 \star x_2 \star \cdots \star x_n) = f(x_1) \diamond f(x_2) \diamond \cdots \diamond f(x_n)$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$.

$$\begin{aligned} f(x_1 \star x_2 \star \cdots \star x_n \star x_{n+1}) &= f((x_1 \star x_2 \star \cdots \star x_n) \star x_{n+1}) \\ &= f(x_1 \star x_2 \star \cdots \star x_n) \diamond f(x_{n+1}) \\ &= f(x_1) \diamond f(x_2) \diamond \cdots \diamond f(x_{n+1}) \end{aligned}$$

4)• Soit $x \in E$.

Pour $n = 0$, $f(x^{\star 0} = f(e_E) = e_F = (f(x))^{\diamond 0}$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, d'après la propriété 3)• en particuliers $n = p$ et $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = x$, la propriété 4)• est immédiate.

Pour $p \in \mathbb{Z}_-^*$, alors $\exists k \in \mathbb{N}^*$ / $p = -k$, et on a :

$$\begin{aligned} f(x^{\star p}) &= f(x^{\star(-k)}) \\ &= f\left(\left(x^{-1}\right)^{\star(k)}\right) \ (\text{où } x^{-1} \text{ est le symétrique de } x \text{ dans } E \text{ pour la loi } \star) \\ &= f\left(\left(\underbrace{x^{-1} \star x^{-1} \star \cdots \star x^{-1}}_{k\ facteurs}\right)\right) \\ &= \underbrace{f\left(x^{-1}\right) \diamond f\left(x^{-1}\right) \diamond \cdots \diamond f\left(x^{-1}\right)}_{k\ facteurs} \ (\text{puisque } f \text{ est un morphisme de } E \text{ dans } F) \\ &= \underbrace{(f(x))^{-1} \diamond (f(x))^{-1} \diamond \cdots \diamond (f(x))^{-1}}_{k\ facteurs} \ (\text{d'après la propriété 2)}\bullet\,) \\ &= (f(x))^{\diamond(-k)} \\ &= (f(x))^{\diamond p}. \end{aligned}$$

■

Proposition 6.4.5 *:*

Soient les ensembles structurés $(E,\star)$, $(F,\diamond)$ et (G,Δ) sont des groupes.

1•) Si $f:E\longrightarrow F$ et $g:F\longrightarrow G$ sont deux morphismes (resp. endomorphismes, isomorphismes, automorphismes) de groupes alors $g\circ f:E\longrightarrow G$ l'est aussi.

2•) Si $f:E\longrightarrow F$ est un morphisme bijectif (isomorphisme) de groupes alors $f^{-1}:F\longrightarrow E$ est aussi un isomorphisme de groupes.

Preuve :

1•) Soient $f:E\longrightarrow F$ et $g:F\longrightarrow G$ deux morphismes de groupes.

Montrons que $g\circ f:E\longrightarrow G$ est un morphisme de groupes.

Pour tous x,x' de E on a :

$$(g\circ f)(x\star x')=g(f(x\star x'))=g(f(x)\diamond f(x'))=g(f(x))\Delta g(f(x'))=(g\circ f)(x)\,\Delta\,(g\circ f)(x').$$

2•) Soient $f:E\longrightarrow F$ un isomorphisme de groupes et $y,y'\in F$.

Puisque f est bijective, alors $\exists x,x'\in E\ /\ f(x)=y$ et $f(x')=y'$. On a alors :

$$f^{-1}(y\diamond y')=f^{-1}(f(x)\diamond f(x'))=f^{-1}(f(x\star x'))=x\star x'=f^{-1}(x)\star f^{-1}(x').$$

Ainsi, que f^{-1} est un morphisme de $(F,\diamond)$ dans $(E,\star)$, en plus c'est une application bijective. ■

Définition 6.4.6 *:*

Soient $(E,\star)$ et $(F,\diamond)$ deux groupes.

On appelle E et F deux groupes isomorphes s'il existe un isomorphisme $f:E\longrightarrow F$.

6.4.1 Noyau et image

Nous définissons maintenant deux sous-ensembles importants qui vont être des sous-groupes.

Définition 6.4.7 *:*

Soient $(E,\star)$ et $(F,\diamond)$ deux groupes et $f:E\longrightarrow F$ un morphisme de groupes.

• *L'image de f est l'ensemble $Imf=\{f(x)\in F\ /\ x\in E\}$. C'est un sous-ensemble de F.*

En autre terme, Imf est l'image directe de E par f. C'est-à-dire $Imf=f(E)$

• *Le noyau de f est l'ensemble $Kerf=\{x\in E\ /\ f(x)=e_F\}$. C'est un sous-ensemble de E.*

On peut dire aussi, $Kerf$ est l'image réciproque de l'ensemble $\{e_F\}$ par f. C'est-à-dire $Kerf=f^{-1}(\{e_F\})$.

Exemples 6.4.8 *:*

1) Soit* $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *est un morphisme de groupes de* $(\mathbb{C}^*, \times)$ *dans* $(\mathbb{C}^*, \times)$ *définie par* $f(z) = |z|$.

$$Imf = \mathbb{R}_+ \text{ et } kerf = \{z \in \mathbb{C}^*;\ |z| = 1\}.$$

2) Soit* $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ *est un morphisme de groupes de* $(\mathbb{Z}, \times)$ *dans* $(\mathbb{Z}, \times)$ *définie par* $g(k) = k^2$.

$$Img = \left\{0^2, 1^2, 2^2, \cdots, n^2 \ / \ n \in \mathbb{N}\right\} \text{ et } kerg = \{-1, 1\}.$$

3) Soit* $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *est un morphisme du groupe* $(\mathbb{R}, +)$ *dans* $(\mathbb{C}^*, \times)$ *définie par* $h(\theta) = e^{i\theta}$.

$$Imh = \{z \in \mathbb{C}^* \ / \ |z| = 1\} \text{ et } kerh = \left\{\theta \in \mathbb{R} \ / \ e^{i\theta} = 1\right\} = \{2\pi k \ / \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Proposition 6.4.9 *:*

Soient $(E, \star)$ *et* $(F, \diamond)$ *deux groupes et* $f : E \longrightarrow F$ *un morphisme de groupes.*

I• L'image directe d'un sous groupe G *de* E *par* f *est un sous groupe de* F.

II• L'image réciproque d'un sous groupe H *de* F *par* f *est un sous groupe de* E.

Preuve :

I• Soit G un sous-groupe de $(E, \star)$.

Montrons que $f(G) = \{f(x) \in F \ / \ x \in G\}$ est un sous-groupe de $(F, \diamond)$.

On remarque que $f(G) \subset F$, $e_F \in f(G)$ (car $e_F = f(e_E)$ et $e_E \in G$ d'après les conditions de sous-groupe) et pour tous $y, y' \in f(G)$, il existe $x, x' \in G$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. On a alors

$$y \diamond (y')^{-1} = f(x) \diamond (f(x'))^{-1} = f(x) \diamond f((x')^{-1}) = f\left(x \star (x')^{-1}\right) \in f(G) \text{ car } x \star (x')^{-1} \in G.$$

Ainsi $f(G)$ est un sous-groupe de $(F, \diamond)$.

II• Soit H un sous-groupe de $(F, \diamond)$.

Montrons que $f^{-1}(H) = \{x \in E \ / \ f(x) \in H\}$ est un sous-groupe de $(E, \star)$.

On remarque que $f^{-1}(H) \subset E$, $e_E \in f^{-1}(H)$ (car $f(e_E) = e_F \in H$ d'après les conditions de sous-groupe) et pour tous $x, x' \in f^{-1}(H)$, alors $f(x), f(x') \in H$ et $f\left(x \star (x')^{-1}\right) = f(x) \diamond f((x')^{-1}) = f(x) \diamond (f(x'))^{-1} \in H$ (car H est un sous-groupe), donc $x \star (x')^{-1} \in f^{-1}(H)$.

Ainsi $f^{-1}(H)$ est un sous-groupe de $(E, \star)$. ∎

Proposition 6.4.10 *:*

Soient $(E, \star)$ *et* $(F, \diamond)$ *deux groupes et* $f : E \longrightarrow F$ *un morphisme de groupes.*

1. $Kerf$ *est un sous-groupe de* E.

2. Imf est un sous-groupe de F.

3. f est injectif si et seulement si $Kerf = \{e_E\}$.

4. f est surjectif si et seulement si $Imf = F$.

Preuve :

1. Montrons que $Kerf = \{x \in E \ / \ f(x) = e_F\}$ est un sous-groupe de E.

Soient $a, b \in Kerf$ et b^{-1} le symétrique de b pour la loi $\star$. Alors on a :

- $f(e_E) = f\left(b \star b^{-1}\right) = f\left(b\right) \diamond f\left(b^{-1}\right) = f\left(b\right) \diamond \left(f\left(b\right)\right)^{-1} = e_F$, donc $e_E \in Kerf$.
- $f(a \star b^{-1}) = f\left(a\right) \diamond f\left(b^{-1}\right) = f\left(a\right) \diamond \left(f\left(b\right)\right)^{-1} = e_F \diamond \left(e_F\right)^{-1} = e_F$, donc $a \star b^{-1} \in Kerf$.

2. Montrons que $Imf = \{f(x) \in F \ / \ x \in E\}$ est un sous-groupe de F.

Soient $y, y' \in Imf$, Il existe alors $x, x' \in E$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$.

- $f(e_E) = e_F$, donc $e_E \in Kerf$.
- $y \diamond y'^{-1} = f\left(x\right) \diamond \left(f\left(x'\right)\right)^{-1} = f\left(x\right) \diamond f\left(\left(x'\right)^{-1}\right) = f\left(x \star \left(x'\right)^{-1}\right) \in Imf$, car $x \star \left(x'\right)^{-1} \in E$, donc $y \diamond y'^{-1} \in Imf$.

3. Montrons que (f est injectif) $\Longleftrightarrow$ ($Kerf = \{e_E\}$).

<u>Premièrement</u>, on suppose que f est injective.

Soit $x \in Kerf$. Alors $f(x) = e_F = f(e_E)$, comme f est injectif alors $x = e_E$. Donc $Kerf = \{e_E\}$.

<u>Deuxièrement</u>, on suppose que $Kerf = \{e_E\}$.

Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. on a alors

$$\begin{aligned} f(x) \diamond \left(f(x')\right)^{-1} = f(x') \diamond \left(f(x')\right)^{-1} &\Longrightarrow f(x) \diamond \left(f(x')\right)^{-1} = e_F \\ &\Longrightarrow f(x \star (x')^{-1}) = e_F \ (\text{car } f \text{ est un morphisme de groupes}) \\ &\Longrightarrow x \star (x')^{-1} = e_E \ (\ \text{car} \ \ Kerf = \{e_E\}) \\ &\Longrightarrow (x')^{-1} \ \ \text{est le symétrique de} \ \ x \ \ \text{c'est-à-dire} \ \ x' = x. \end{aligned}$$

Donc f est injectif.

4. Cette propriété est immédiate par définition de la surjectivité et $Imf = f(E)$. ∎

6.5 Structure d'anneaux

La distributivité

Définition 6.5.1 *:*

Soient $\star$ et Δ deux lois de composition internes définies sur un ensemble non vide E.

On dit que la loi $\star$ est distributive sur la loi Δ si

$$\forall x, y, z \in E;\ \ x \star (y \Delta z) = (x \star y)\,\Delta\,(x \star z) \quad (\textit{distributivité à gauche})$$

et

$$\forall x, y, z \in E;\ \ (y \Delta z) \star x = (y \star x)\,\Delta\,(z \star x) \quad (\textit{distributivité à droite}).$$

Exemples 6.5.2 *:*

$*$ *Dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ la multiplication $\times$ est distributive sur l'addition $+$.*

$*$ *Soit E un ensemble non vide. Dans $\mathcal{P}(E)$ les deux lois $\cap$ et $\cup$ chacune est distributive par rapport à l'autre.*

6.5.1 Structure d'anneau

Définition 6.5.3 *:*

Soit E un ensemble non vide muni de deux lois de composition internes notées $\star$ et Δ.

Le triplet $(E, \star, \Delta)$ est un ***anneau*** *si et seulement si*

1) *$(E, \star)$ est un groupe commutatif,*

2) *Δ est associative,*

3) *Δ est distributive sur $\star$,*

4) *Δ possède un élément neutre dans E.*

Si de plus Δ est commutative, alors on dit que l'anneau $(E, \star, \Delta)$ est commutatif.

Les notations $\star$ et Δ des deux lois internes définies sur E sont en générale remplaçant par des notations additive $+$ et multiplicative $\times$.

Un anneau possède ainsi deux éléments neutres :

Le premier correspond à la loi $+$ est noté 0_E. On l'appelle zéro de l'anneau.

le deusième correspond à la loi $\times$ est noté 1_E. On l'appelle unité de l'anneau.

Exemples 6.5.4 *:*

• *$(\mathbb{Z}, +, \times)$, $\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des anneaux commutatifs.*

• *Soit $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition usuelle $+$ et la multiplication usuelle $\times$.*

Le triplet $(\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau commutatif.

• *Soit $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition usuelle $+$ et la loi de composition $\circ$.*

Le triplet $(\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \circ)$ est un anneau non commutatif.

6.5.2 Sous-anneau

Définition 6.5.5 :

Soient $(E,+,\times)$ un anneau et F un sous-ensemble non vide de E. F est un sous-anneau de l'anneau $(E,+,\times)$ si :

1) $1_E \in F$,

2) $\forall x, y \in F;\ x - y \in F$,

3) $\forall x, y \in F;\ x \times y \in F$.

Exemples 6.5.6 :

$(\mathbb{Z},+,\times)$, $\mathbb{Q},+,\times)$ *et* $(\mathbb{R},+,\times)$ *sont des sous-anneaux commutatifs de l'anneau* $(\mathbb{C},+,\times)$.

Proposition 6.5.7 :

Si F est un sous-anneau de $(E,+,\times)$ alors $(F,+,\times)$ l'est aussi.

Si de plus $(E,+,\times)$ est commutatif alors $(F,+,\times)$ est commutatif.

Preuve :

Soit $(F,+,\times)$ un sous-anneau d'un anneau $(E,+,\times)$.

Par la condition **2)** on obtient que $(F,+)$ est un groupe commutatif.

D'après **1)** on a $(F,\times)$ possède un élément neutre.

Comme $\times$ est associative sur E et $F \subset E$ donc $\times$ est associative sur F.

$\times$ est distributive sur $+$ dans E donc aussi sur F.

Cela signifie que $(E,+,\times)$ est un anneau. ■

Exemple 6.5.8 :

Soit $F = \left\{a - b\sqrt{5}\ /\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$ *muni de l'addition usuelle $+$ et la multiplication usuelle $\times$.*

Pour montrer que $(F,+,\times)$ est un anneau, il suffit de montrer que $(F,+,\times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R},+,\times)$.

1. Puisque la somme de deux nombres réels est un nombre réel, alors $F \subset \mathbb{R}$.

2. Puisque $1 = 1 + 0\sqrt{5} = 1_F$, alors $(F,\times)$ possède un élément neutre.

3. Soient x et y deux éléments de F tels que $x = a - b\sqrt{5}$ et $y = c - d\sqrt{5}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. On a :
$x - y = (a-c) - (b-d)\sqrt{5} \in F$ et $x \times y = (ac+5bd) - (ad+bc)\sqrt{5} \in \mathbb{Z}$ car $(a-c), (b-d), (ac+5bd), (ad+bc) \in \mathbb{Z}$.

Ainsi $(F,+,\times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R},+,\times)$

Puisque $(\mathbb{R},\times)$ est un groupe commutatif et $(F,\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},\times)$ alors $(F,\times)$ l'est aussi.

Donc, $(F,+,\times)$ est un anneau commutatif.

6.5.3 Règles de calculs dans un anneau

Soit $(E, +, \times)$ un anneau de neutres 0_E pour la loi $+$ et 1_E pour la loi $\times$.

Proposition 6.5.9 *:*

1). $\forall x \in E;\ 0_E \times x = x \times 0_E = 0_E$.

2). $\forall x, y \in E;\ (-x)y = -(xy) = x(-y)$.

3). a) $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in E,\ \forall a \in E;\ (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \times a = x_1 \times a + x_2 \times a + ... + x_n \times a$,

b) $\forall y_1, y_2, \cdots, y_n \in E,\ \forall b \in E;\ b \times (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = b \times x_1 + b \times x_2 + ... + b \times x_n$.

4). $\forall x, y \in E,\ \forall k \in \mathbb{Z}; (kx)y = k(xy) = x(ky)$.

5). *Si a et b deux éléments de E commutent, alors on a :*

$$1\bullet\ \forall n \in \mathbb{N};\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k \times b^{n-k} \quad (\textit{formule du } \textbf{binôme} \textit{ de } \textbf{Newton}),$$

$$2\bullet\ \forall n \in \mathbb{N}^*;\ (a^n - b^n)^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} a^k \times b^{n-1-k} \ (\text{avec } \forall x \in E,\ x^0 = 1_E).$$

Preuve :

1). Soit $x \in E$.

D'une part on a :

$$0_E \times x + 0_E = 0_E \times x \quad \textit{car} \quad 0_E \quad \textit{est l'élément neutre pour } +, \tag{6.7}$$

d'autre part on a :

$$0_E \times x = (0_E + 0_E) \times x = 0_E \times x + 0_E \times x \quad \textit{car} \quad \times \quad \textit{est distributive sur } +. \tag{6.8}$$

D'après (6.7) et (6.8) on obtient $0_E \times x + 0_E = 0_E \times x + 0_E \times x$ ceci implique que $0_E \times x = 0_E$ car dans un groupe, tout élément est simplifiable.

On démontrerait de la même manière que $x \times 0_E = 0_E$.

2). Soit $x, y \in E$.

Montrons que $(-x) \times y = -(xy)$. On a :

$$x \times y + (-x) \times y = (x + (-x)) \times y = 0_E) \times y = 0_E \quad \textit{car} \ \times \ \textit{est distributive sur } + \tag{6.9}$$

$$\textit{et} \ \ x \times y + (-(x \times y)) = 0_E \quad \textit{car} \ -(x \times y) \ \textit{est le symétrique de} x \times y \ \textit{pour la loi } +. \tag{6.10}$$

D'après (6.9) et (6.10) on deduit que $x \times y + (-x) \times y = x \times y + (-(x \times y))$. Donc $(-x) \times y = -(x \times y)$ car dans un groupe, tout élément est simplifiable.

3). On utilise le raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ et la distributivité de $\times$ sur $+$. **4).** Soient x, y deux éléments de E et $k \in \mathbb{N}$.

Pour $k = 0$ c'est évident.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$. On a $(kx) \times y = (\underbrace{x + x + \cdots + x}_{k \;\; termes}) \times y = \underbrace{x \times y + x \times y + \cdots + x \times y}_{k \;\; termes} = k(x \times y)$.

Pour $k = -n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(kx) \times y = (-nx) \times y = -(nx) \times y = -n(x \times y) = k(x \times y)$.

De même, on obtient $x \times (ky) = k(x \times y)$.

5). 1• On utilise le raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Soient a et b deux éléments de E.

Pour $n = 0$, on a : $(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} a^0 \times b^{0-0} = 1_E$, sachant que $\forall a \in E;\; a^0 = 1_E$.

Pour $n = 1$, on a : $(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} a^k \times b^{1-k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} a^0 \times b^{1-0} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a^1 \times b^{1-1} = a + b$. Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Supposons que la propriété soit vraie pour $n \geq 1$ fixé. Nous allons montrer que la propriété est vraie pour $n + 1$.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n (a+b) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k \times b^{n-k} \right) (a+b) \;\; \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{k+1} \times b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k \times b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} a^k \times b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k \times b^{n-k+1} \\
& \textit{(par décalage d'indice dans la } 1^{er} \textit{ somme).}
\end{aligned}
$$

En ajoutant ce terme nul $\begin{pmatrix} n \\ -1 \end{pmatrix} a^k \times b^{n+1-k}$ à la première somme et $\begin{pmatrix} n \\ n+1 \end{pmatrix} a^k \times b^{n+1-k}$ à la deuxième somme, on trouve :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} a^k \times b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k \times b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \right) a^k \times b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} a^k \times b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Donc la propriété est héréditaire. Ce qui montre que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5). 2• Soient a et b deux éléments de E commutent et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} a^k \times b^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} a^{k+1} \times b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} a^k \times b^{n-k} \\
&\quad \textit{(par développement)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} a^k \times b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} a^k \times b^{n-k} \\
&\quad \textit{(par décalage d'indice dans la } 1^{er} \textit{ somme)} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} a^k \times b^{n-k} + a^n - b^n - \sum_{k=1}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} a^k \times b^{n-k} \\
&= a^n - b^n.
\end{aligned}$$

■

Remarque 6.5.10 :

- *Soit $(E, +, \times)$ un anneau.*

Si la loi $\times$ non commutative alors pour $x, y \in E$ on a $(x+y)^2 = (x+y) \times (x+y) = x^2 + x \times y + y \times x + y^2$.

6.5.4 Diviseurs de zéro

Définition 6.5.11 :

Soient $(E, +, \times)$ un anneau et a un élément de E différent de 0_E.

On appelle que a est un diviseur de zéro à gauche dans l'anneau $(E, +, \times)$ s'il existe $b \in E$ avec $b \neq 0_E$ tel que $a \times b = 0_E$.

On appelle que a est un diviseur de zéro à droite dans l'anneau $(E,+,\times)$ s'il existe $b \in E$ avec $b \neq 0_E$ tel que $b \times a = 0_E$.

On dit que a est un diviseur de zéro s'il est un diviseur de zéro à gauche ou à droite dans l'anneau $(E,+,\times)$.

Remarque 6.5.12 *:*

Si a et b deux éléments de E différents de 0_E zéro de l'anneau et $a \times b = 0_E$, alors a et b sont des diviseurs de zéros dans l'anneau $(E,+,\times)$.

Exemples 6.5.13 *:*

1) *Dans l'anneau $(\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\times)$ les deux applications suivantes :*

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{si} \;\; x \geq -2 \\ 0, & \text{si} \;\; x > -2 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \;\; x \geq -2 \\ \sqrt{x+2}, & \text{si} \;\; x > -2 \end{cases}$$

sont des diviseurs de zéros dans l'anneau $(\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\times)$ puisque sont non nulles verifient

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R};\;\; (f \times g)(x) \;\; &= \begin{cases} (x+2) \times 0, & \text{si} \;\; x \geq -2 \\ 0 \times \sqrt{x+2}, & \text{si} \;\; x > -2 \end{cases} \\ &= 0. \end{aligned}$$

2) *Dans l'anneau $(\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\circ)$ les deux applications suivantes :*

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = -1$$

sont des diviseurs de zéros dans l'anneau $(\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\circ)$ puisque sont non nulles verifient

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R};\;\; (f \circ g)(x) \;\; &= f(g(x)) \\ &= (g(x))^2 - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

6.5.5 Anneau intègre

Définition 6.5.14 *:*

Soit E un ensemble non vide et $E \neq \{0_E\}$.

On dit qu'un anneau $(E,+,\times)$ est intègre si ne possède pas de diviseurs de zéro. C'est-à-dire

$$\forall x, y \in E;\;\; \left(x \times y = 0_E \Longrightarrow x = 0_E \;\; \text{ou} \;\; y = 0_E\right).$$

Exemples 6.5.15 *:*

a) $(\mathbb{Z},+,\times)$, $\mathbb{Q},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$ *et* $(\mathbb{C},+,\times)$ *sont des anneaux commutatifs intègres.*

b) $(\mathbb{R}^2,+,\times)$ *n'est pas intègre. Car possède des diviseurs de zéro. comme par éxemple* $(1,0)\times(0,1)=0_{\mathbb{R}^2}$.

Proposition 6.5.16 *Soit* $(E,+,\times)$ *un anneau.*

Tout élément inversible de E *n'est pas diviseur de zéro.*

Preuve :

On suppose qu'il existe un élément x de E soit à la fois iversible et diviseur de zéro.

Alors, il existe y de $E-\{0_E\}$ tel que $y\times x=0_E$ (car x est un diviseur de zéro).

Puisque x est iversible, on a alors :

$$\begin{aligned} y\times x=0_E \quad &\Longrightarrow (y\times x)\times x^{-1}=0_E\times x^{-1} \\ &\Longleftrightarrow y\times(x\times x^{-1})=0_E\times x^{-1} \text{ (car } \times \text{ associative)} \\ &\Longleftrightarrow y\times 1_E=0_E \text{ (car } x^{-1} \text{ est le symitrique de} x \text{ et } 0_E \text{est absorbant pour la loi } \times) \\ &\Longleftrightarrow y=0_E \text{ (car } 1_E \text{ est un élément neutre pour la loi } \times \text{).} \end{aligned}$$

Ce qui est contraire à nos hypothèses (car $y\neq 0_E$). la preuve est terminé. ∎

Proposition 6.5.17 *:*

Soit $(E,+,\times)$ *un anneau intègre.*

Tout élément de $E-\{0_E\}$ *est régulier.*

Preuve :

Soient x un élément de $E-\{0_E\}$ et $y,z\in E$.

On montre que x est un élément régulier à droite et à gauche. Si $y\times x=z\times x$ alors $y\times x-z\times x=0_E$ puis $(y-z)\times x=0_E$. Par l'implication d'intègrité, on obtient $y=z$, car $x\in E-\{0_E\}$. Ainsi a est régulier à droite. De même on obtient la régularité à gauche. ∎

Èlément nilpotent

Définition 6.5.18 *:*

Soient $(E,+,\times)$ *un anneau et* a *un élément de* E.

On dit que a *est* ***nilpotent*** *si et seulement si* $\exists k\in\mathbb{N}^*;\ a^k=0_E$.

6.6 Structure de corps

Définition 6.6.1 *:*

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi additive $+$ et d'une loi multiplicative $\times$.

*Le triplet $(E, +, \times)$ est un **corps** si et seulement si*

1) *$(E, +, \times)$ est un anneau,*

2) *tout élément de $E - \{0_E\}$ est inversible dans E pour la loi $\times$.*

- *De plus, si la loi $\times$ est commutative alors le corps $(E, +, \times)$ est commutatif.*

Remarque 6.6.2 *:*

1) Tout corps est un anneau intègre. La reciproque est fausse. Par exemple $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau intègre mais ce n'est pas un corps.

2) Tout corps n'a pas de diviseurs de zéro.

3) Si $(E, +, \times)$ est un corps, alors $(E - \{0_E\}, \times)$ est un groupe est appelé groupe multiplicatif.

Exemples 6.6.3 *:*

1. $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des corps commutatifs.

2. $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$, $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ et $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ sont des corps commutatifs.

3. $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ et $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ ne sont pas des corps. Car, sont des anneaux non intègres.

4. L'ensemble structuré $(\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right], +, \times)$ est un anneau commutatif, mais n'est pas un corps. Car il existe des éléments non nuls de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right]$ non inversibles. Par exemple $1 - \sqrt{5}$. Puisque, soit $\left(a + b\sqrt{5}\right) \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right]$. On a $\left(1 - \sqrt{5}\right) \times \left(a + b\sqrt{5}\right) = 1_{\mathbb{Z}[\sqrt{5}]} \iff \left(a + b\sqrt{5}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5} \notin \mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right]$.

6.6.1 Sous corps

Définition 6.6.4 *:*

Soient $(E, +, \times)$ un corps et F une partie non vide de E.

F sous-corps d'un $(E, +, \times)$ si et seulement si :

1) *$(F, +, \times)$ est un sous-anneau de $(E, +, \times)$,*

2) *$\forall x \in F - \{0_E\}$; $x^{-1} \in F$.*

Exemples 6.6.5 *:*

1). $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

2). $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un sous-corps de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

3). $(\mathbb{Q}, +, \times)$ et $(\mathbb{R}, +, \times)$ sont sous-corps de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

6.6.2 Morphismes d'anneaux, Morphismes de corps

Définition 6.6.6 *:*

Soient $(E, \star, \Delta)$ *et* $(F, \diamond, \perp)$ *deux anneaux et* $f : E \longrightarrow F$.

On dit que f *est un morphisme d'anneaux si :*

$$\forall x, y \in E;\ f(x \star y) = f(x) \diamond f(y) \text{ et } f(x \Delta y) = f(x) \perp f(y).$$

$\oplus$ *Si* f *est bijective, on dit que* f *est un isomorphisme d'anneaux de* E *dans* F *ou on dit que* $(E, \star, \Delta)$ *et* $(F, \diamond, \perp)$ *sont isomorphes par* f.

$\oplus$ *Si* $f : E \longrightarrow E$, *on dit que* f *est un endomorphisme d'anneau de* E.

$\oplus$ *Si* $f : E \longrightarrow E$ *bijective, on dit que* f *est un automorphisme d'anneaux de* E.

• *Si* $(E, \star, \Delta)$ *et* $(F, \diamond, \perp)$ *deux corps, On dit que* f *est un morphisme de corps de* E *dans* F *et de plus* $f(1_E) = 1_F$.

6.7 Exercices

Exercice 6.7.1 *:*

Soient $\mathbb{R}$ *l'ensemble des nombres réels et* $\star$ *la loi définie par :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \star y := \left(x^3 + 1\right)\left(y^3 + 1\right) - x \times y$$

$+$ *et* $\times$ *désignant l'adition et la multiplication usuelles sur* $\mathbb{R}$.

1) *Vérifier que la loi* $\star$ *est une loi de composition interne sur* $\mathbb{R}$.

2) *La loi* $\star$ *est-elle commutative ? associative ?.*

3) *Vérifier que* $\mathbb{R}$ *possède un élément neutre pour la loi* $\star$.

4) *Existe-t-il des symétriques de l'élément* $\frac{1}{2}$ *pour la loi* $\star$ *dans* $\mathbb{R}$ *?.*

5) *Cette loi confère-t-elle sur* $\mathbb{R}$ *une structure de groupe ?.*

6) *Resoudre les équations algebriques suivantes :* $x \star 0 = 0$ *et* $x \star 1 = 3$.

Exercice 6.7.2 *:*

1) Montrer que l'ensemble structuré $(\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right], +, \times)$ *est un corps commutatif.*

2) Considérons $Q\left[i\right] = \{a + ib\ /\ a, b \in \mathbb{Q}\}$. *Montrer que* $(Q\left[i\right], +, \times)$ *est un corps.*

Exercice 6.7.3 *:*

Soit $(G, *)$ *un groupe et* $G' = \{x \in G; (\forall y \in G, x * y = y * x)\}$.

Montre que G' *est un sous groupe de* G.

Exercice 6.7.4 *:*

Soient $E =]1, 1[$ *et et* T *la loi définie par :*

$$\forall x, y \in E;\; xTy = \frac{x+y}{1+x.y}$$

(a) *Montrer que* T *est une loi de composition interne.*

(b) *Montrer que la loi* T *est associative.*

(c) *Montrer que* E *possède un élément neutre pour la loi* T.

(d) *Déterminer l'inverse d'un élément* $x \in E$ *pour la loi* T.

Exercice 6.7.5 *:*

Les deux ensembles F *et* G *suivants munis des lois considérées sont-ils des groupes ?*

1) F *est l'ensemble des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définies par* $x \longmapsto ax+b$, *avec* $a \in \mathbb{R}^*$ *et* $b \in \mathbb{R}$, *muni de la loi de composition* $\circ$.

2) G *est l'ensemble des fonctions croissantes de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *muni de l'addition.*

3) *Soit* H *un ensemble défini par* $H = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, *où* $f_1(x) = -f_2(x) = x$, $f_3(x) = -f_4(x) = \dfrac{1}{x}$, *muni de la loi de composition* $\circ$.

1. *Compléter le tableau suivant*

Calcul du $(f_i \circ f_j)(x)$ avec $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$				
$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1				
f_2				
f_3				
f_4				

2. *Que peut-on conclure pour* $(H, \circ)$ *?.*

3. *Déterminer tous ces sous-groupes.*

Exercice 6.7.6 *:*

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ *pour que* $\mathbb{R}$ *ait une structure de groupe pour la loi* $*$ *définie par*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x * y = a(x+y) + bxy + c.$$

Exercice 6.7.7 *:*

On munit $\mathbb{R}$ *de la loi de composition interne* $\star$ *définie par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R};\; x \star y = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$$

a) *Montrer que l'application* $x \longmapsto x^5$ *est un isomorphisme de* $(\mathbb{R}, \star)$ *vers* $(\mathbb{R}, +)$.

b) *En déduire que* $(\mathbb{R}, \star)$ *est un groupe commutatif.*

Exercice 6.7.8 *:*

Soient $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ *et* Δ *la loi dans* G *définie par*

$$\forall (x, y), \ (x', y') \in G; \ (x, y) \, \Delta \, (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1.) *Montrer que* (G, Δ) *est un groupe non commutatif.*

2.) *Montrer que* $(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \Delta)$ *est un sous-groupe de* (G, Δ).

Exercice 6.7.9 *:*

On définit sur $\mathbb{Z}^2$ *les deux lois* $\oplus$, $\otimes$ *comme suit :*

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{Z}^2, \ (x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{Z}^2, \ (x, y) \otimes (x', y') = (xx', xy' + yx')$$

Montrer que $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \otimes)$ *est anneau commutatif.*

Exercice 6.7.10 *:*

1) Soient G *un groupe,* e *son neutre,* $a, b \in G$ *tels que :* $a^3 b = b a^3$ *et* $a^5 = e$.

Montrer : $ab = ba$.

2) Soient F *un groupe,* $a, b \in G$, $n \in \mathbb{N}^*$ *tels que :* $b^n a = ab$.

a) Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}, \ b^{kn} a = ab^k$.

b) Endéduire : $\forall p \in \mathbb{N}, \ b^{n^p} a^p = a^p b$.

6.8 Espaces vectoriels

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

6.8.1 Structure d'espace vectoriel

Définition d'un espace vectoriel

Définition 6.8.1 *:*

Soient E *un ensemble, muni d'une loi de coposition interne « + » et muni d'une loi de composition externe « . » opérant de* $\mathbb{K}$ *sur* E. *On dit que le triplet* $(E, +, .)$, *ou plus brièvement* E, *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* *(ou est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$) si :*

(1) $(E,+)$ *est un groupe abélien,*

(2) La loi externe « . » possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
&(a) \quad \forall \lambda, \in \mathbb{K}, \ \forall u, \ v \in E; \ \lambda.(u+v) = \lambda.u + \lambda.v,\\
&(b) \quad \forall \lambda, \ \mu \in \mathbb{K}, \ \forall u \in E; \ (\lambda+\mu).u = \lambda.u + \mu.u,\\
&(c) \quad \forall \lambda, \ \mu \in \mathbb{K}, \ \forall u \in E; \ \lambda.(\mu.u) = (\lambda\mu).u,\\
&(d) \quad \forall u \in E; 1_{\mathbb{K}}.u = u.
\end{aligned}$$

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires, les éléments de de E sont appelés vecteurs.

L'élément neutre de la loi interne « + » est le vecteur nul, on le note 0_E.

Exemples 6.8.2 *:*

▶ $\mathbb{R}^n$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

▶ $\mathbb{C}^n$ *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel.*

▶ *Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, muni des deux opérations « + » et « . » définies pour toutes $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}; ((f+g)(x) = f(x) + g(x) \ \text{ et } (\lambda.f)(x) = \lambda \times f(x)),$$

possède une structure d'espace vectorial sur $\mathbb{R}$. L'élément neutre est la fonction nul.

▶ *L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes $P(X) = a_nX^n + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$. muni des deux opérations « + » et « . », est un espace vectorial sur $\mathbb{R}$. L'élément neutre est le polynôme nul.*

6.8.2 Structure produit

Proposition 6.8.3 *:*

Si $E_1, \cdots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels alors $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois « + » et « . » définies par : $(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) := (x_1 +_{E_1} y_1, \cdots, x_n +_{E_n} y_n)$ et $\lambda.(x_1, \cdots, x_n) := (\lambda._{E_1} x_1, \cdots, \lambda._{E_n} x_n)$, où $+_{E_i}$ désigne la loi interne et $._{E_n}$ la loi externe sur E_i avec $i = 1, \cdots, n$. De plus le vecteur nul de E pour la loi $+$ est alors $0_E = (0_{E_1}, \cdots, 0_{E_n})$.

6.8.3 Propriétés élémentaires

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 6.8.4 *:*

1) $\forall \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K},\ \forall u \in E;\ \sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda_i.u) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right).u.$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u_1, u_2, \cdots, u_n \in E;\ \sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda.u_i) = \lambda.\left(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i\right).$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in E;\ 0.u = 0_E$ *et* $\lambda.0_E = 0_E$.

4) $\forall u \in E;\ (-\alpha).u = -(\alpha.u) = \alpha.(-u)$.

5) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in E;\ (\lambda.u = 0_E \Longrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ *ou* $u = 0_E)$.

Preuve :

1) Par récurrence sur $\mathbb{N}^*$ en exploitant la distributivité par rapport à l'addition des scalaires.

2) Par récurrence sur $\mathbb{N}^*$ en exploitant la distributivité par rapport à l'addition des vecteurs.

3) Pour tout $u \in E$ on a :

$$\begin{aligned}
(0+0).u = 0.u &\iff 0.u + 0.u = 0.u (\text{ la distributivité de la loi + par rapport à la loi .}) \\
&\iff 0.u + 0.u = 0.u + 0_E (\text{ par la définition de l'élément neutre}) \\
&\iff -(0.u) + 0.u + 0.u = -(0.u) + 0.u + 0_E \\
&\iff 0.u = 0_E.
\end{aligned}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$\begin{aligned}
\lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E &\iff \lambda.0_E + \lambda.0_E = \lambda.0_E (\text{ la distributivité de la loi . par rapport à la loi +}) \\
&\iff -(\lambda.0_E) + \lambda.0_E + \lambda.0_E = -(\lambda.0_E) + \lambda.0_E \\
&\iff \lambda.0_E = 0_E \ (\text{ par la définition de l'élément symétrique}).
\end{aligned}$$

4) Commençons par montrer l'égalité $(-\alpha).u = -(\alpha.u)$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et pour tout $u \in E$ on a :

$$\begin{aligned}
\alpha.u + (-\alpha).u = (\alpha + (-\alpha)).u &\iff \alpha.u + (-\alpha).u = (0_{\mathbb{K}}).u \\
&\iff \alpha.u + (-\alpha).u = 0_E \ (\text{ d'après } \textbf{\textit{3)}}\ ) \\
&\iff -(\alpha.u) + \alpha.u + (-\alpha).u = -(\alpha.u) + 0_E \\
&\iff (-\alpha).u = -(\alpha.u) \ (\text{ par la définition d'éléments neutre et symétrique}).
\end{aligned}$$

Montrons maintenant l'égalité $-(\alpha.u) = \alpha.(-u)$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et pour tout $u \in E$ on a :

$$\begin{aligned}
\alpha.u+\alpha.(-u)=\alpha.(u+(-u)) &\iff \alpha.u+\alpha.(-u)=\alpha.(0_E)\\
&\iff \alpha.u+\alpha.(-u)=0_E\\
&\iff -(\alpha.u)+\alpha.u+\alpha.(-u)=-(\alpha.u)+0_E\\
&\iff \alpha.(-u)=-(\alpha.u).
\end{aligned}$$

5) On sait que si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $u = 0_E$, alors la propriété **3)** impliquent $\lambda.u = 0_E$.
Pour la réciproque, soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in E$ tels que $\lambda.u = 0_E$.
Dans un premier temps supposons que $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$. On doit alors montrer que $u = 0_E$.

$$\begin{aligned}
\lambda.u=0_E &\iff \lambda^{-1}(\lambda.u)=\lambda^{-1}.0_E \ (\ \textit{car } \mathbb{K} \textit{ est un corps et } \ \lambda\neq 0_{\mathbb{K}})\\
&\iff (\lambda^{-1}\times\lambda).u=\lambda^{-1}.0_E\\
&\iff u=0_E.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $u \neq 0_E$. On a nécessairement $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$, sinon, ce conduire au contraire à notre hypothèse. ■

6.8.4 Combinaison linéaire

Premièrement on définir la notion de famille de vecteurs d'un espace vectoriel.

Définition 6.8.5 *:*
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et I un ensemble des indices.
On appelle famielle de vecteurs indexée par I, on la note $(v_i)_{i\in I}$ toute appliation $i \in I \longmapsto v_i \in E$.
L'orsque I est un ensemble fini (resp. infini) on dit que $(v_i)_{i\in I}$ est une famille finie (resp. infinie).

Combinaison linéaire d'une famille finie

Définition 6.8.6 *:*
On dit qu'un vecteur u de E est combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \cdots, v_n$ de E si

$$\begin{aligned}
\exists\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{K}\ /\ \ u &= \alpha_1.v_1+\cdots+\alpha_n.v_n\\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i.v_i.
\end{aligned}$$

Les scalaires $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ de $\mathbb{K}$ sont appelés coefficients de la combinaison linéaire.

Exemples 6.8.7 *:*
1)★ *Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ le vecteur $u = (3, -2)$ est combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_3 = (1, 0)$, car on a l'égalité $u = 2v_1 - v_3$.*

2)★ *Soit* $\mathbb{R}_2\left[X\right]$ *l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à deux. Soient* $p_0,\ p_1$ *et* p_2 *les polynômes définis par :* $\forall x \in \mathbb{R};\ p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x,\ p_2(x) = x^2$.

Alors le polynôme p *défini par* $\forall x \in \mathbb{R};\ p(x) = 3x^2 - \frac{3}{5}x + \sqrt{2}$ *est combinaison linéaire des polynômes* $p_0,\ p_1,\ p_2$*, puisque l'on a l'égalité* $p = 3p_2 - \frac{3}{5}p_1 + \sqrt{2}p_0$.

3)★ *Soit* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions réelles. Soient* f *et* g *deux fonctions définies par :*
$\forall x \in \mathbb{R};\ f(x) = sin(x),\ g(x) = cos(x)$. *Alors la fonction* h *définie par* $\forall x \in \mathbb{R};\ h(x) = \sqrt{3}sin(x - \frac{\pi}{3})$ *est combinaison linéaire des fonctions* f *et* g*, puisque l'on a l'égalité* $h = \frac{3}{2}f - \frac{\sqrt{3}}{2}g$ *et donc* $h = \alpha_1 f + \alpha_2 g$ *avec* $\alpha_1 = \frac{3}{2}$ *et* $\alpha_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3)★ *Montrons que* $w = (-2, 4, -4)$ *est combinaison linéaire de* $u = (1, 0, 1)$ *et* $v = (2, 2, 1)$. *On cherche donc* α_1 *et* α_2 *tels que* $w = \alpha_1.u + \alpha_2.v$ *:*

$$\begin{aligned} w = \alpha_1.u + \alpha_1.v \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \alpha_1. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2. \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 2\alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = -2 \\ 2\alpha_2 = 4 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = -4 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = -6 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases}.$$

Donc $w = -6.u + 2.v$.

Combinaison linéaire d'une famille infinie

Définition 6.8.8 *:*

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $(v_i)_{i \in I}$ *une famille infinie de vecteurs de* E.

On dit qu'un vecteur u *de* E *est combinaison linéaire des vecteurs* $(v_i)_{i \in I}$ *de* E *s'il existe un ensemble fini* $J \subset I$ *tel que*

$$\exists (\alpha_i)_{i \in J} \in \mathbb{K}^{cardJ} \ / \quad u \quad = \quad \sum_{i \in J} \lambda_i.v_i.$$

6.8.5 Sous-espace vectoriel

Définition 6.8.9 *:*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie non vide de E.

On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :

1) $\forall u, v \in F;\ u + v \in F,$

2) $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall u \in F;\ \alpha u \in F.$

Exemples 6.8.10 *:*

- $\{0_E\}$ *et* E *sont des sous-espaces vectoriels de* E*, appelés sous-espaces triviaux.*
- *L'ensemble* $A = \{(x, 2x, 4x)\ /\ x \in \mathbb{R}\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$*. Car* $A \subset \mathbb{R}^3$*,* $0_{\mathbb{R}^3} \in A$*, pour tous* $(x, 2x, 4x), (y, 2y, 4y) \in A$ *on a :*
$(x, 2x, 4x) + (y, 2y, 4y) = (x + y, 2(x + y), 4(x + y)) = (x', 2x', 4x') \in A$ *avec* $x' = x + y \in \mathbb{R}$ *et pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*, pour tout* $(x, 2x, 4x) \in A$ *on a :*
$\lambda.(x, 2x, 4x) = (\lambda.x, 2\lambda.x, 4\lambda.x) = (x'', 2x'', 4x'') \in A$ *avec* $x'' = \lambda.x$*.*
- *Les ensembles* $F = \{(x, 0, 0)\ /\ x \in \mathbb{R}\}$*,* $G = \{(0, y, 0)\ /\ y \in \mathbb{R}\}$ *et* $H = \{(0, 0, z)\ /\ z \in \mathbb{R}\}$*, sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$*.*

Proposition 6.8.11 *:*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie non vide de E.

F est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si,

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall u, v \in F;\ \alpha u + \beta v \in F.$$

Ou bien F est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, toute combinaison linéaire de deux vecteurs de F reste dans F.

Preuve :

- Commençons par montrer ($\cdots \Longrightarrow \cdots$).

Supposons que F est un sous-espace vectoriel de E. Soient $u, v \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors par la définition de sous-espace vectoriel on a : $\alpha u \in F$ et $\beta v \in F$ et ainsi $\alpha u + \beta v \in F$.

- Inversement, on montre ($\cdots \Longleftarrow \cdots$).

Supposons que pour chaque $u, v \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on a $\alpha u + \beta v \in F$.

$*$ Posons $\alpha = \beta = 0_{\mathbb{K}}$. Alors, pour tous $u, v \in F$ on a $\alpha u + \beta v = 0_E \in F$. Donc F n'est pas vide.

$*$ Soient $u, v \in F$, alors en particulier $\alpha = \beta = 1$ on obtient $u + v \in F$ (car F stable par addition).

$*$ Soient $u \in F$, et $\alpha \in \mathbb{K}$, (pour tout $v \in F$, en posant $\beta = 0_{\mathbb{K}}$), alors $\alpha u \in F$ (car F stable par produit extérieur). ■

Proposition 6.8.12 *:*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Si F est un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$ alors $(F,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Preuve :

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F est un sous-espace vectoriel de E.

Comme F est un sous-espace vectoriel de E, alors F contient 0_E donc $F \neq \phi$.

Et par la proposition **6.8.11** avec $\alpha = 0$ et $\beta = -1$, on peut affirmer que $\forall u, v \in F;\ u - v \in F$ c'est-à-dire F un sous-groupe de $(E,+)$ et donc $(F,+)$ est un groupe abélien.

De plus les propriétés (a), (b), (c) et (d) de la définition **6.8.1** étant vraies sur E, elle le sont aussi sur F.

Donc $(F,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. ■

6.8.6 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels

Proposition 6.8.13 *:*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou infinie) de sous-espaces vectoriels de E.
L'ensemble $\bigcap\limits_{i=1}^{n \text{ ou } +\infty} F_i = F_1 \cap F_2 \cap \cdots F_{n \text{ ou } +\infty}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve :

Puisque chaque F_i, $i \in I$ est une partie de E donc $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est une partie de E.

Comme $0_E \in F_i$, pour tout $i \in I$, il appartient aussi à $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ c'est-à-dire l'ensemble $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est non vide.

Soient u, v deux vecteurs de $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$, alors pour tout $i \in I$, u, $v \in F_i$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ le vecteur $\alpha u + \beta v \in F_i$ car F_i est un sous-espace vectoriel de E. Donc le vecteur $\alpha u + \beta v \in \bigcap\limits_{i\in I} F_i$. ■

Exemples 6.8.14 *:*

- *Soient $F_1 = \{(0,y,z)\ /\ y,z \in \mathbb{R}\}$ et $F_2 = \{(x,0,z)\ /\ x,z \in \mathbb{R}\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Alors $F_1 \cap F_2 = \{(0,0,z)\ /\ z \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*
- *Soient $G_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ /\ 2x + y - z = 0\}$ et $G_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ /\ 4x - z = 0\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Alors $G_1 \cap G_2 = \{(x,2x,4x)\ /\ x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*

Attention : La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 6.8.15 *:*

Soient $F = \{(x,0,0)\ /\ x \in \mathbb{R}\}$ *et* $G = \{(0,y,0)\ /\ y \in \mathbb{R}\}$ *deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$*. Alors* $F \cup G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ /\ y = z = 0 \text{ ou } x = z = 0\}$ *n'est pas un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *car* $(1,0,0) \in F$ *et* $(0,1,0) \in G$ *mais* $(1,0,0) + (0,1,0) = (1,1,0) \notin F \cup G$ *.*

Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 6.8.16 *:*

Soient F *et* G *deux sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*.*

La somme de F *et* G*, notée* $F+G$ *est l'ensemble de tous les vecteurs* $u+v$*, où* u *est un vecteur de* F *et* v *un vecteur de* G*. C'est-à-dire :*

$$F + G = \{u + v\ /\ u \in F \quad \text{et } v \in G\}\,.$$

Exemple 6.8.17 *:*

Soient $F = \{(x,0,0)\ /\ x \in \mathbb{R}\}$ *et* $G = \{(0,y,0)\ /\ y \in \mathbb{R}\}$ *deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$*.*

Alors $F + G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ /\ z = 0\}$*.*

Par définition de $F+G$*, tout élément* w *de* $F+G$ *s'écrit* $w = u+v$ *où* $u \in F$ *et* $v \in G$*. Comme* $u \in F$ *et* $v \in G$ *alors il existe* $x, y \in \mathbb{R}$ *tel que* $u = (x,0,0)$ *et* $v = (0,y,0)$*. Donc* $w = (x,y,0)$*.*

Réciproquement*, il est clair, un tel élément* $w = (x,y,0)$ *est la somme de* $(x,0,0)$ *et de* $(0,y,0)$*.*

Proposition 6.8.18 *:*

1. *La somme de deux sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *est un sous-espace vectoriel de* E*.*

2. *La somme de deux sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *est le plus petit sous-espace vectoriel contenant à la fois* F *et* G*.*

Preuve :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Alors $F \subset E$ et $G \subset E$, donc $F+G$ est une partie de E contenant 0_E car 0_E appartenant à F et à G. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $w, w' \in F+G$. Comme w, w' sont dans $F+G$, il existe u, u' dans F et v, v' dans G tels que $w = u+v$ et $w' = u'+v'$. On a alors $\alpha w + \beta w' = (\alpha u + \beta u') + (\alpha v + \beta v') \in F+G$ car $\alpha u + \beta u' \in F$ et $\alpha v + \beta v' \in G$.

2. $F \subset F+G$ car pour tout $u \in F$, on peut écrire $u = u + 0_E$ avec $0_E \in G$. De même $G \subset F+G$.

Soit H un tel sous-espace vectoriel contenant F et G, alors il est clair : si $u \in F$ alors $u \in H$ (car $F \subset H$), de même si $v \in G$ alors $v \in H$. Donc $u + v \in H$ car H est un sous-espace vectoriel. ■

Remarques 6.8.19 :

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors on a les propriétés suivantes :

1) *$F+G=G+F$, (la somme de deux sous-espaces vectoriels est commutative),*

2) *$(F+G)+H=F+(G+H)$, (la somme de sous-espaces vectoriels est associative),*

3) *$F+\{0_E\}=F$, $F+E=E$ et $F+F=F$.*

Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 6.8.20 :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

F et G sont en ***somme directe*** *dans E si*

- $F\cap G=\{0_E\}$,
- $F+G=E$.

On note alors $F\oplus G=E$.

Si F et G sont en ***somme directe****, on dit que F et G sont des sous-espaces vectoriels* ***supplémentaires*** *dans E.*

Exemples 6.8.21 :

- *Soient $F'=\{(0,y)\ /\ y\in\mathbb{R}\}$ et $G'=\{(x,-x)\ /\ x\in\mathbb{R}\}$.*

F' et G' sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^2$.

Car $F'\oplus G'=\mathbb{R}^2$ c'est-à-dire $F'\cap G'=\{(0,0)\}$ et $F'+G'=\mathbb{R}^2$.

(1) *Montrons $F'\cap G'=\{(0,0)\}$.*

Soit $(x,y)\in F'\cap G'$, alors $(x,y)\in F'$ et $(x,y)\in G'$ donc $y=0$ et $y=-x$ s'implique (x, y)=(0, 0).

(2) *Montrons $F'+G'=\mathbb{R}^2$.*

Soit $w=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Cherchons $u\in F'$ et $v\in G'$ tels que $w=u+v$.

Soient $u=(x_1,y_1)\in F'$ et $v=(x_2,y_2)\in G'$ alors $y_1=0$ et $y_2=-x_2$. Donc

$$\begin{aligned} w=u+v &\iff (x,y)=(x_1+x_2,-x_2)\\ &\iff x=x_1+x_2\wedge y=-x_2\\ &\iff x_1=x+y\wedge x_2=-y. \end{aligned}$$

C'est-à-dire, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on a $(x,y)=(x+y,0)+(-y,-(-y))$ qui prouve que tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ est somme d'un élément de F' et d'un élément de G'.

- *Soient $F=\{(x,0,0)\ /\ x\in\mathbb{R}\}$ et $G=\{(0,y,0)\ /\ y\in\mathbb{R}\}$.*

Les deux sous-espaces vectoriels F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, car $F+G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\{0\}\neq\mathbb{R}^3$.

Proposition 6.8.22 *:*

F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si

$$\forall w \in E,\ (\exists!\ u \in F,\ \exists!\ v \in G\ /\ w = u + v).$$

Preuve :

Premièrement : supposons $E = F \oplus G$ et montrons que tout élément $w \in E$ se décompose d'une manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Soient $w = u + v$ et $w = u_1 + v_1$ avec $u, u_1 \in F$ et $v, v_1 \in G$. On a alors $u + v = u_1 + v_1$, donc $u - u_1 = v - v_1$. Comme F et G sont sous-espaces vectoriels alors $u - u_1 \in F$ et $v - v_1 \in G$. Puisque F et G sont supplémentaires dans E, on a alors, $u - u_1 = v - v_1 \in F \cap G = \{0_E\}$, donc $u - u_1 = 0_E$ et $v - v_1 = 0_E$. On en deduit $u = u_1$ et $v = v_1$, ce qui montre que tout élément de E se décompose d'une manière unique.

Deuxièmement : supposons que tout $w \in E$ se décompose de manière unique et montrons $E = F \oplus G$.

• Montrons $F \cap G = \{0_E\}$.

Soit $u \in F \cap G$, alors, il peut être décomposer des deux manières suivantes : $u = 0_E + u$ et $u = u + 0_E$. Par l'unicité de la décomposition, $u = 0_E$.

• Montrons $F + G = E$.

D'une côté, on sait que $F + G \subset E$.

D'autre côté, soit $w \in E$, alors il existe $u \in F$ et $v \in G$ tels que $w = u + v \in F + G$, donc $E \subset F + G$. ■

6.8.7 Espace vectoriel engendré par une famille finie

Définition 6.8.23 *:*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (v_i)_{1 \le i \le n}$ une famille finie de vecteures de E.

*On appelle espace vectoriel **engendré** par $\mathcal{F}$, l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteures $v_1, v_2, \cdots, v_n$ et est noté $Vect(\mathcal{F})$ ou $Vect(v_1, v_2, \cdots, v_n)$. Autrement dit :*

$$Vect(v_1, v_2, \cdots, v_n) := \{u \in E\ /\ \exists(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n;\ u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n\}.$$

*La famille $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ est dite **génératrice** de $Vect(v_1, v_2, \cdots, v_n)$.*

Définition 6.8.24 *:*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (v_i)_{1 \le i \le p}$ une famille de vecteures de E.

*La famille $\mathcal{F}$ est une famille **génératrice** de l'espace vectoriel E si*

$$\forall u \in E, \exists(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p\ /\ u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$$

C'est-à-dire tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \cdots, v_p$.

*On dit aussi que la famille $\{v_1, \cdots, v_p\}$ **engendre** l'espace vectoriel E.*

Théorème 6.8.25 *:*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ une famille finie de vecteures de E.

***I.** L'ensemble $Vect(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.*

***II.** L'ensemble $Vect(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $v_1, v_2, \cdots, v_n$.*

Preuve :

I. On appelle F l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$.

(a) $0_E \in F$ car $0_E = 0_{\mathbb{K}} v_1 + 0_{\mathbb{K}} v_2 + \cdots + 0_{\mathbb{K}} v_n$.

(b) Soient $u, v \in F$ alors, $\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K};\ u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, et $\exists \mu_1, \cdots, \mu_n \in \mathbb{K};$

$v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$. On a $u + v = (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n)v_n$, on en deduit $u + v \in F$.

(c) De même, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, pour tout $u \in F$ on a $\alpha u = (\alpha\lambda_1)v_1 + (\alpha\lambda_2)v_2 + \cdots + (\alpha\lambda_n)v_n \in F$.

Ce qui montre que F est un sous-espace vectoriel.

II. Soit G un tel sous-espace vectoriel contenant $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, alors il est stable par combinaison linéaire, il contient donc toute combinaison linéaire des vecteurs $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. Par conséquent F est inclus dans G. Conclusion : F est le plus petit sous-espace contenant $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. ■

Proposition 6.8.26 *:*

Soient A et B deux parties d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

***1)** $A \subset B \Longrightarrow VectA \subset VectB$.*

***2)** $Vect(A \cup B) = VectA + VectB$.*

Preuve :

1) Supposons $A \subset B$. On a alors $A \subset B \subset VectB$, puisque $VectA$ le plus petit sous-espace contenant A donc $VectA \subset VectB$.

2) $A \subset VectA$ donc $A \subset VectA + VectB$. De même, $B \subset VectA + VectB$ donc $A \cup B \subset VectA + VectB$. Or $VectA + VectB$ est un sous-espace vectoriel donc $Vect(A \cup B) \subset VectA + VectB$.

Inversement $A \subset A \cup B$ donc $VectA \subset Vect(A \cup B)$ d'apès **1)**. Aussi $VectB \subset Vect(A \cup B)$. Or $Vect(A \cup B)$ est un sous-espace vectoriel donc $VectA + VectB \subset Vect(A \cup B)$. ■

Proposition 6.8.27 *:*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F}_{m+1} = (v_i)_{1 \le i \le m+1}$ une famille de $m+1$ vecteures de E.

- *Si v_{m+1} est combinison linéaire des vecteurs $v_1, v_2, \cdots v_m$, alors $vect\mathcal{F}_{m+1} = vect\mathcal{F}_m$, où $\mathcal{F}_m = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$.*

Preuve :

$*$ D'après la proposition **6.8.26**, il est clair que $vect\mathcal{F}_m \subseteq vect\mathcal{F}_{m+1}$.

$*$ Montrons maintenant que $vect\mathcal{F}_{m+1} \subseteq vect\mathcal{F}_m$.

Soit $u \in vect\mathcal{F}_{m+1}$, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{m+1}) \in \mathbb{K}^{m+1}$ tel que

$$u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m + \lambda_{m+1} v_{m+1}.$$

Puisque v_{m+1} est combinison linéaire de $v_1, v_2, \cdots v_m$, alors

$$\exists\,(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) \in \mathbb{K}^m \;/\; v_{m+1} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m.$$

On en deduit que

$$\exists\,(\gamma_1, \cdots, \gamma_m) \in \mathbb{K}^m \;/\; u = \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_m v_m,$$

où $\gamma_i = \lambda_i + \lambda_{m+1}\alpha_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$.

Ce qui montre que $u \in vect\mathcal{F}_m$. On a alors, $vect\mathcal{F}_{m+1} \subseteq vect\mathcal{F}_m$.

Ce qui termine la preuve. ∎

6.8.8 Espace vectoriel engendré par une famille infinie

Définition 6.8.28 *:*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (v_i)_{i\in I}$ une famille infinie de vecteures de E.

On appelle espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$, l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteures $(v_i)_{i\in I}$.

Autrement dit :

$$Vect((v_i)_{i\in I}) := \left\{ u \in E \;/\; \exists J \subset I,\; cardJ < +\infty,\; \exists(\lambda_i)_{i\in J} \in \mathbb{K}^{cardJ};\; u = \sum_{i\in J} \lambda_i.v_i \right\}.$$

La famille $(v_i)_{i\in I}$ est dite génératrice de $Vect((v_i)_{i\in I})$.

Définition 6.8.29 *:*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (v_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de vecteures de E.

La famille $\mathcal{F}$ est une famille ***génératrice*** *de l'espace vectoriel E si*

$$\forall u \in E, \exists \lambda_1, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{K} \;/\; u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$$

C'est-à-dire tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \cdots, v_p$.

On dit aussi que la famille $\{v_1, \cdots, v_p\}$ ***engendre*** *l'espace vectoriel E.*

Proposition 6.8.30 *:*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(v_i)_{i\in I}$ une famille infinie de vecteures de E.

- *L'ensemble $Vect((v_i)_{i\in I})$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Preuve :

- On appelle F l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $(v_i)_{i\in I}$.

(a) $0_E \in F$ car $0_E = 0_{\mathbb{K}}v_1 + 0_{\mathbb{K}}v_2 + \cdots + 0_{\mathbb{K}}v_p + \cdots$.

(b) Soient $u, v \in F$ alors, $\exists J_1 \subset I,\ cardJ_1 < +\infty$ et $\exists (\lambda_i)_{i\in J_1} \in \mathbb{K}^{cardJ_1};\ u = \sum\limits_{i\in J_1} \lambda_i.v_i$.
De même, $\exists J_2 \subset I,\ cardJ_2 < +\infty$ et $\exists (\mu_i)_{i\in J_2} \in \mathbb{K}^{cardJ_2};\ v = \sum\limits_{i\in J_2} \mu_i.v_i$. On peut définie J comme suit : $J = J_1 \cup J_2$. Posons $\lambda_i = 0$, pour tout $i \in J - J_1$ et $\mu_i = 0$ pour tout $i \in J - J_2$. Cela donne :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K};\ \alpha u + \beta v = \sum_{i\in J} (\alpha\lambda_i + \beta\mu_i).v_i.$$

■

6.8.9 Famille libre, famille liée

Définition 6.8.31 *:*

Soit $\mathcal{F} = (v_i)_{1\le i\le n}$ une famille finie de vecteures d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

*On dit que la famille $\mathcal{F}$ est **libre** (ou **linéairement indépendante**) si elle vérifie :*

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K};\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}.$$

*Dans le cas contraire, la famille $\mathcal{F}$ est **liée** (ou **linéairement dépendante**) si :*

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K};\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E \text{ et } (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \neq 0_{\mathbb{K}^n}.$$

C'est-à-dire, s'il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls.

Exemples 6.8.32 *:*

***1)** Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$, la famille $\{v_1 = (1, -2, i), v_2 = (0, i-2, 2), v_3 = (-i, 4, -3)\}$ est liée. Car $iv_1 + 2v_2 + v_3 = 0_{\mathbb{C}^3}$.*

***2)** Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, les polynômes $P_1(X) = X + 1$, $P_2(X) = X^2 + X + 1$ et $P_3(X) = X^4 + X^2 + 1$ forment une famille libre. Supposons que*

$$\forall X \in \mathbb{R}; \alpha P_1(X) + \beta P_2(X) + \lambda P_3(X) = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Cela équivaut à

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \beta + \lambda = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta + \lambda = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}.$$

Donc

$$\forall X \in \mathbb{R}; \alpha P_1(X) + \beta P_2(X) + \lambda P_3(X) = 0_{\mathbb{R}[X]} \Longrightarrow \alpha = \beta = \lambda = 0.$$

3) Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la famille $\{cos, sin\}$ est libre. Car pour tout $x \in \mathbb{R}$ la relation $\alpha cos x + \beta sin x = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ implique que $\alpha = \beta = 0$.

4) Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la famille $\{cos^2(x), sin^2(x), cos(2x)\}$ est liée. Car pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\exists\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 - \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ / $\lambda_1 cos^2(x) + \lambda_2 sin^2(x) + \lambda_3 cos(2x) = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$, comme par exemple $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 1$.

Définition 6.8.33 *:*

∗ On dit qu'une famille infinie est ***libre*** *(ou* ***linéairement indépendante*** *) si toutes ses sous-familles finies sont libres.*

∗ Une famille est ***liée*** *(ou* ***linéairement dépendante*** *) s'il existe une sous-famille finie qui est liée.*

Exemples 6.8.34 *:*

• *Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, la famille infinie $\{1, X, X^2, \cdots, X^n, \cdots\}$ est libre.*

• *Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, la famille infinie $\{1, ln(x), ln(2x^2), ln(3x^3), \cdots, ln(nx^n), \cdots\}$ est liée. Car la sous-famille $\{1, ln(x), ln(2x^2)\}$ est liée. Puisque $\forall x \in \mathbb{R}_+^*; -ln(2).1 - 2.ln(x) + 1.ln(2x^2) = 0$.*

Attention : (u, v) liée n'implique pas que v est un multiple de u (prendre $u = 0_E$ et $v \neq 0_E$). Cependant (u, v) liée et $u \neq 0_E \Longrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K}; v = \alpha u$.

Proposition 6.8.35 *:*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Une famille $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ de $p \geq 2$ vecteurs de E est une famille liée si et seulement si un de ces vecteurs de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$. C'est-à-dire la famille $\mathcal{F}$ est liée si et seulement si

$$\exists \ell \in \{1, 2, 3, \cdots, p\} \ / v_\ell = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^{p} \alpha_i v_i, \quad \text{avec } \alpha_i \in \mathbb{K} \text{ pour tout } i \in \{1, 2, 3, \cdots, \ell - 1, \ell + 1, \cdots, p\}.$$

Preuve :

★ Supposons d'abord $\mathcal{F}$ liée. Il existe donc $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ non tous nuls vérifiant $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0_E$. Alors il existe $\lambda_\ell \neq 0$ pour au moins un indice $\ell \in \{1, 2, 3, \cdots, p\}$. On peut encore écrire $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{\ell-1} v_{\ell-1} + \lambda_\ell v_\ell + \lambda_{\ell+1} v_{\ell+1} + \cdots + \lambda_p v_p = 0_E$. Puisque $\lambda_\ell \neq 0$ on peut écrire

$$v_\ell = -\frac{\lambda_1}{\lambda_\ell} v_1 + \cdots - \frac{\lambda_{\ell-1}}{\lambda_\ell} v_{\ell-1} - \frac{\lambda_{\ell+1}}{\lambda_\ell} v_{\ell+1} - \cdots - \frac{\lambda_p}{\lambda_\ell} v_p.$$

Ce qui montre que v_ℓ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$.

★ Supposons l'un des vecteurs de $\mathcal{F}$ combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$. Soit v_ℓ est combinaison linéaire des vecteurs $\{v_1, \cdots, v_{\ell-1}, v_{\ell+1}, \cdots, v_p\}$. C'est-à-dire

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{\ell-1}, \alpha_{\ell+1}, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{K} \ / \ v_\ell = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{\ell-1} v_{\ell-1} + \alpha_{\ell+1} v_{\ell+1} + \cdots + \alpha_p v_p.$$

Passant v_ℓ au second membre, il vient

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{\ell-1}, -1, \alpha_{\ell+1}, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{K} \ / \ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{\ell-1} v_{\ell-1} + (-1) v_\ell + \alpha_{\ell+1} v_{\ell+1} + \cdots + \alpha_p v_p = 0_E.$$

En posant $\alpha_\ell = -1$, on peut alors écrire

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \cdots + \alpha_p v_p = 0_E \quad \textit{avec } \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{K} \quad \textit{non tous nuls.}$$

Ainsi la famille $\mathcal{F}$ est liée. ■

Remarque 6.8.36 *:*

1) Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

2) Une sur-famille d'une famille libre n'est pas nécessairement libre.

3) Les vecteurs d'une famille libre sont distincts deux à deux.

Proposition 6.8.37 *:*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Si $(v_1, \cdots, v_p)$ est une famille libre et si $v_{p+1} \notin Vect(v_1, \cdots, v_p)$ alors la sur-famille $(v_1, \cdots, v_p, v_{p+1})$ est libre.

Preuve :

Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_p, \lambda_{p+1} \in \mathbb{K}$.

Supposons $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p + \lambda_{p+1} v_{p+1} = 0_E \quad (1)$.

Si $\lambda_{p+1} \neq 0$ alors on peut écrire $v_{p+1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_{p+1}} v_1 + \cdots + \frac{\lambda_p}{\lambda_{p+1}} v_p$. Cela signifie que v_{p+1} est combinaison linéaire de $(v_i)_{1 \leq i \leq p}$. Ceci est contradiction, car $v_{p+1} \notin Vect(v_1, \cdots, v_p)$. On en deduit que $\lambda_{p+1} = 0$.

Puisque la famille $(v_1, \cdots, v_p)$ est supposée libre donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = \lambda_{p+1} = 0$. Alors la famille $(v_i)_{1 \leq i \leq p+1}$ est libre. ■

Proposition 6.8.38 *:*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1) Toute sur-famille d'une famille de vecteurs de E liée est liée.

2) Toute sous-famille d'une famille de vecteurs de E libre est libre.

Preuve :

Soit $\mathcal{F} = (v_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de vecteurs de E liée.

Cela signifie que

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p - \{0_{\mathbb{K}^p}\} \;\; / \;\; \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p = 0_E. \quad (1)$$

On considère la sur famille de $\mathcal{F}$ suivante $\mathcal{F}' = (v_i)_{1 \leq i \leq p+1}$. On deduit de l'égalité (1) que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p + 0_{\mathbb{K}} v_{p+1} = 0_E \;\; avec \; (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p, 0) \in \mathbb{K}^{p+1} - \{0_{\mathbb{K}^{p+1}}\}.$$

Ce qui montre que la sur famille $\mathcal{F}'$ est liée.

La deuxième propriété se démontre par les même techniques. Laisser au lecteur. ■

Proposition 6.8.39 *:*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Toute famille d'au mois de $m+1$ vecteurs de E appartenant à $vect(v_1, \cdots, v_m)$ est liée.

Preuve :

La démonstration est basé sur un procédé d'élimlnation. Comme par exemple : soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tel que $E = vect(v_1, v_2)$.

Soient $u_1,\ u_2,\ u_3$ trois vecteurs de E tel que

$$\begin{cases} u_1 &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \\ u_2 &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 \\ u_3 &= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 \end{cases} \tag{6.11}$$

<u>1^{er} ***cas***</u> : • Si $\gamma_2 = 0$, alors on a :

$$\begin{cases} u_1 &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \\ u_2 &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 \\ u_3 &= \gamma_1 v_1 \end{cases} \tag{6.12}$$

∗ Si $\gamma_1 = 0$, alors la famille (u_1, u_2, u_3) est liée. Car contient 0_E.

∗ Si $\gamma_1 \neq 0$, on isole le vecteur v_1 à partir de la troisième relation du système (6.12), on l'injecte dans les deux autres relations et on obtient

$$\begin{cases} u_1 &= \frac{\alpha_1}{\gamma_1} u_3 + \alpha_2 v_2 \\ u_2 &= \frac{\beta_1}{\gamma_1} u_3 + \beta_2 v_2 \\ v_1 &= \frac{1}{\gamma_1} u_3 \end{cases} \tag{6.13}$$

⊗ Si $\beta_2 = 0$ ou $\alpha_2 = 0$, alors la famille (u_1, u_2, u_3) est liée. Car toute sur-famille d'une famille de vecteurs de E liée est liée.

⊗ Si $\beta_2 \neq 0$ et $\alpha_2 \neq 0$ on isole le vecteur v_2 à partir de la deuxième relation du système (6.13), on l'injecte dans la première relation et on obtient

$$\begin{cases} u_1 &= (\frac{\alpha_1}{\gamma_1} - \frac{\alpha_2 \beta_1}{\beta_2 \gamma_1}) u_3 + \frac{\alpha_2}{\beta_2} u_2 \\ v_2 &= \frac{1}{\beta_2} u_2 - \frac{\beta_1}{\beta_2 \gamma_1} u_3 \\ v_1 &= \frac{1}{\gamma_1} u_3, \end{cases} \tag{6.14}$$

ce qui montre que la famille (u_1, u_2, u_3) est liée. Car $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3 - \{0_{\mathbb{K}^3}\}\ /\ \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_E$.

<u>$2^{ème}$ ***cas***</u> • Si $\gamma_2 \neq 0$:

• On isole le vecteur v_2 à partir de la troisième relation du système (6.11), on l'injecte dans les autres relations et on trouve :

$$\begin{cases} u_1 &= -\frac{\alpha_2}{\gamma_2} u_3 + (\frac{\alpha_2 \gamma_1}{\gamma_2} + \alpha_1) v_1 \\ u_2 &= -\frac{\beta_2}{\gamma_2} u_3 + (\frac{\beta_2 \gamma_1}{\gamma_2} + \beta_1) v_1 \\ v_2 &= -\frac{1}{\gamma_2} u_3 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} v_1 \end{cases} \tag{6.15}$$

∗ Si $\frac{\beta_2 \gamma_1}{\gamma_2} + \beta_1 = 0$ ou $\frac{\alpha_2 \gamma_1}{\gamma_2} + \alpha_1 = 0$, alors la famille (u_1, u_2, u_3) est liée. Car u_2, u_3 ou u_1, u_3 sont liées.

∗ Si $\frac{\beta_2 \gamma_1}{\gamma_2} + \beta_1 \neq 0$ et $\frac{\alpha_2 \gamma_1}{\gamma_2} + \alpha_1 \neq 0$, on isole le vecteur v_1 à partir de la dexième ou la première relation du système (6.15), on l'injecte dans l'autre relation et on trouve :

$$\begin{cases} u_1 &= (\frac{\alpha_2\gamma_1}{\gamma_2}+\alpha_1)(\frac{\frac{\beta_2}{\gamma_2}}{\frac{\beta_2\gamma_1}{\gamma_2}+\beta_1})u_3+(\frac{\alpha_2\gamma_1}{\gamma_2}+\alpha_1)(\frac{1}{\frac{\beta_2\gamma_1}{\gamma_2}+\beta_1})u_2 \\ v_1 &= \frac{1}{\frac{\beta_2\gamma_1}{\gamma_2}+\beta_1}u_2+\frac{\frac{\beta_2}{\gamma_2}}{\frac{\beta_2\gamma_1}{\gamma_2}+\beta_1}u_3 \\ v_2 &= -\frac{1}{\gamma_2}u_3+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}v_1 \end{cases} \tag{6.16}$$

ce qui montre que $\exists(1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{K}^3-\{0_{\mathbb{K}^3}\}\ /\ 1.u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=0_E$. Alors, la famille (u_1,u_2,u_3) est liée. ■

On peut déduire le corrolaire suivant :

Corollaire 6.8.40 *:*

Si un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est engendré par m vecteurs de E, alors toute famille d'au mois de $m+1$ vecteurs appartenant à E est liée.

Proposition 6.8.41 *:*

Une famille infinie est libre si, et seulement si, toutes ses sous-familles finies sont libres.

Preuve :

• Supposons d'abord que la famille $(v_i)_{i\in I}$ libre avec I un ensemble infini.

Soit $J\subset I$ un ensemble fini. Supposons $\sum\limits_{j\in J}\lambda_jv_j=0_E$ avec $\lambda_j\in\mathbb{K}$ pour tout $j\in J$.

Pour $i\in I-J$ posons $\lambda_i=0_{\mathbb{K}}$. On a $\sum\limits_{i\in I}\lambda_iv_i=0_E$ avec $\lambda_i\in\mathbb{K}$ pour tout $i\in I$ d'après l'hypothèse, on a donc $\lambda_i=0_{\mathbb{K}}$ pour tout $i\in I$ et enparticulier $i\in J$ on trouve que la sous-famille $(v_i)_{i\in J}$ est libre.

• Supposons $\sum\limits_{i\in I}\lambda_iv_i=0_E$ avec $\lambda_i\in\mathbb{K}$ pour tout $i\in I$.

Posons $J=\{i\in I\ /\lambda_i\neq 0\}$. Puisque $J\subset I$ et la sous-famille finie $(v_i)_{i\in J}$ est supposée libre, on obtient $\sum\limits_{i\in I}\lambda_iv_i=\sum\limits_{i\in J}\lambda_iv_i=0_E$. Alors on en deduit que l'ensemble J est vide, donc $\lambda_i=0$ pour tout $i\in I$.

Ce qui montre que la famille infinie $(v_i)_{i\in I}$ est libre. ■

6.8.10 Base d'un espace vectoriel

Définition 6.8.42 *:*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}=(e_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de vecteurs de E.

*On dit que $\mathcal{B}$ est une **base** de E si $\mathcal{B}$ à la fois **libre et génératrice** de E.*

Exemples 6.8.43 *:*

(1) *Soient les vecteurs* $e_1 = (1,0)$ *et* $e_2 = (0,1)$. *Alors, la famille* (e_1, e_2) *est génératrice de* $\mathbb{R}^2$. *Car tout vecteur* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *s'écrit* $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$. *De plus il est claire que la famille* (e_1, e_2) *est libre. Donc est une base de* $\mathbb{R}^2$, *appelée base canonique de* $\mathbb{R}^2$.

(2) *Dans* $\mathbb{R}^2$ *toute famille de deux vecteurs libre est une base de* $\mathbb{R}^2$.

(3) *La famille* $\mathcal{B} = (1,i)$ *est une base du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$ *(dite canonique).*

(4) *La famille* $\mathcal{B} = (1,i)$ *n'est pas une base du* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$.

Car $\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ / $\lambda_1.1 + \lambda_2.i = 0_{\mathbb{C}}$ *comme par exemple* $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = 1$. *C'est-à-dire, dans* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$ *la famille* $(1,i)$ *est liée*

(5) *La famille* $\mathcal{B} = (X^i)_{1\leq i\leq n} = (1_{[X]}, X, X^2, \cdots, X^n)$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$ *(dite base canonique de* $\mathbb{R}_n[X]$ *). Car pour tout polynome* P *de* $\mathbb{R}_n[X]$ *il existe* $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *unique tel que*
$P(X) = a_0.1_{[X]} + a_1.X + \cdots, a_n.X^n$.

Proposition 6.8.44 *:*

$\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq p}$ *est une base d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *si, et seulement si,*

$$\forall u \in E,\ \exists!(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \ /\ u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p. \tag{6.17}$$

Preuve :

$(\Longrightarrow)$: Supposons $\mathcal{B}$ une base de E.

Puisque la famille $\mathcal{B}$ génératrice de E, alors il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ / $u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$.

Cela prouve l'existence.

Pour l'unicité des $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$: Supposons qu'il existe d'autres scalaires $\mu_1, \cdots, \mu_p \in \mathbb{K}$ tels que $u = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_p e_p$. On a alors, $(\lambda_1 - \mu_1)e_1 + \cdots + (\lambda_p - \mu_p)e_p = 0_E$. Comme $\mathcal{B}$ est une famille libre, on en deduit que $\lambda_1 - \mu_1 = \cdots = \lambda_p - \mu_p = 0_{\mathbb{K}}$, ceci implique $\lambda_i = \mu_i$ pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}$.

$(\Longleftarrow)$: Supposons (6.17) vraie.

D'après la proposition (6.17) on a $\mathcal{B}$ est génératrice de E.

De l'égalité $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = 0_E$, on deduit par unicité de la décomposition du 0_E par apport aux vecteures $e_1, \cdots, e_p$ que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0_{\mathbb{K}}$. ce qui montre que $\mathcal{B}$ est libre. ∎

Définition 6.8.45 *:*

Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ *une base d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *et* $u \in E$ *tel que* $u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$.

Les scalaires $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ *s'appellent les* ***coordonnées*** *(ou* ***composantes****) de* u *dans la base* $(e_i)_{1\leq i\leq n}$.

Définition 6.8.46 *:*

On dit qu'un espace vectoriel E *est de* ***dimension finie*** *s'il possède une famille génératrice finie de vecteurs* *de E.*

Dans le cas ou la famille génératrice de E est infinie, on dit que l'espace E est de dimension infinie.

Proposition 6.8.47 *:*

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possède au moins une base.

Preuve :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{F}_m = (v_1, \cdots, v_m)$ une famille génératrice de E.

Si la famille $\mathcal{F}_m$ est libre, alors est une base de E.

Sinon, la famille $\mathcal{F}_m$ est liée, et alors un des vecteurs de $\mathcal{F}_m$ est combinaison linéaire des autres.

Supposons que le vecteur v_m est combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \cdots, v_{m-1}$.

D'après la proposition **6.8.27** , la sous-famille $\mathcal{F}_{m-1} = (v_1, \cdots, v_{m-1})$ est elle même génératrice de E.

Répétons la même discussion sur la famille $\mathcal{F}_{m-1}$ si elle est n'est pas libre. Ce processus s'arrête jusqu'à ce que nous ayons une famille lineairement indépendante génératrice de E. Car la famille $\mathcal{F}_m$ est finie. ■

Théorème 6.8.48 *(Théorème de la dimension)*

Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même cardinal.

Preuve :

Soient $B_1 = (e_1, \cdots, e_n)$ et $B_2 = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_p)$ deux bases distinctes d'un espace vectoriel E.

On note $card(B_1) = n$ et $card(B_2) = p$.

Suposons que $n > p$, alors, d'après le corollaire **6.8.40** la famille B_1 est liée. Ce qui est imposible puisque la famille B_1 est libre, car c'est une base de E.

De même, si on supose que $p > n$.

Par conséquent, la ceule posibilité est que $n = p$. La preuve est terminée. ■

Lemme 6.8.49 *:*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Si $\mathcal{L}$ une famille libre de p vecteurs de E et $\mathcal{F}$ une famille génératrice finie de m vecteurs de E, alors $p \leq m$.

Preuve :

D'après le corollaire **6.8.40**, on en déduit que toute famille de $m + 1$ vecteurs de E est liée. Donc, toute famille de vecteurs de E libre a au plus m vecteurs. Ceci implique $p \leq m$. ■

Définition 6.8.50 *:*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

On appelle ***dimension*** *de E le nombre de vecteurs d'une bases de E, notée $dimE$, c'est-à-dire*

$dimE = card(\mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ est une base de E.

Si E n'est pas de dimension finie, on pose $dimE = +\infty$.

Proposition 6.8.51 *:*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors :

***1.** Toute famille libre de E a au plus n éléments.*

***2.** Toute famille génératrice de E a au moins n éléments.*

Preuve :

Soit $\mathcal{B}$ une base de E telle que $card(\mathcal{B}) = n$.

1. Considérons la famille $\mathcal{B}$ génératrice, d'après le lemme lemme **6.8.49**, on a qu'une famille $\mathcal{L}$ libre dans un espace E de dimontion finie n vérifie $Card(\mathcal{L}) \leq Card(\mathcal{B}) = n$.

2. D'après la proposition **6.8.47**, on sait que toute famille $\mathcal{G}$ génératrice d'un espace E de dimontion finie n, on peut extraire une base $\mathcal{B}_1$ de E vérifie $Card(\mathcal{B}_1) \leq Card(\mathcal{G})$. On applique la proposition **6.8.48**, on a $n = Card(\mathcal{B}_1) \leq Card(\mathcal{G})$. ■

Remarques 6.8.52 *:*

*1) Toute famille de au moins de $n+1$ vecteurs d'un espae vectoriel de dimontion finie n est une famille **liée**.*

*2) Toute famille de au plus de $n-1$ vecteurs d'un espae vectoriel de dimontion finie n elle **n'est pas génératrice** de E.*

Il reste à énoncer un résultat important et très utile :

Théorème 6.8.53 *:*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E.

Il y a équivalence entre :

($\mathcal{B}$) $\mathcal{F}$ est une base de E,

($\mathcal{L}$) $\mathcal{F}$ est une famille libre de E,

($\mathcal{G}$) $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E.

Preuve :

★ Les implications $(\mathcal{B}) \Longrightarrow (\mathcal{L})$ et $(\mathcal{B}) \Longrightarrow (\mathcal{G})$ sont immédiates (par la définition d'une base).

★ $(\mathcal{L}) \Longrightarrow (\mathcal{B})$ Supposons la famille $\mathcal{F}$ libre et montrons qu'elle est génératrice.

Soit $u \in E$ tel que $u \notin Vect(\mathcal{F})$. D'après la proposition **6.8.37**, on peut affirmer que la sur-famille $\mathcal{F}' = (v_1, \cdots, v_n, u)$ est libre. Mais cela conduit à une contradiction, parce que, d'après la proposition **6.8.51**, on en déduit que $card(\mathcal{F}') = n+1 < n = dim(E)$. Donc, tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$. Ceci implique que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E.

★ $(\mathcal{G}) \Longrightarrow (\mathcal{B})$: Supposons la famille $\mathcal{F}$ génératrice et montrons qu'elle est libre.

On réalise cette démonstration par contraposition. Nous allons montrer que si la famille $\mathcal{F}$ est liée, alors elle n'est pas génératrice de E.

Supposons que la famille $\mathcal{F}$ est liée. Alors, il existe $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tel que v_i est combinaison linéaire de $(v_1, \cdots v_{i-1}, v_{i+1}, \cdots, v_n)$. D'après la proposition **6.8.27**, la famille $\mathcal{F}_{n-1} = (v_1, \cdots v_{i-1}, v_{i+1}, \cdots, v_n)$ est génératrice de E. Or cette famille est de cardinal $n-1 < n = dim(E)$, ce qui implique (d'après la proposition **6.8.27** et proposition **6.8.51**) que la famille $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice de E. ■

Définition 6.8.54 *:*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.

- *Si $dimF = 1$, le sous-espace F est appelé **droite vectorielle** de E.*
- *Si $dimF = 2$, le sous-espace F est appelé **plan vectorielle** de E.*
- *Si $dimE = n \geq 1$ et $dimF = n-1$, le sous-espace F est appelé **hyperplan vectorielle** de E.*

Exemples 6.8.55 *:*

1). *Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ défini par :*

$$F = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x - 2y = 0\Big\}.$$

Pour tout $u = (x, y) \in F$ on a $x = 2y$, on en déduit

$$F = \{(2y, y) \ / \ y \in \mathbb{R}\} = \{y.(2, 1) \ / \ y \in \mathbb{R}\},$$

c'est-à-dire $F = vect(v_1)$ où $v_1 = (2, 1)$. Ainsi $dimF = 1 = dim\mathbb{R}^2 - 1$,

le sous-espace F est donc une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$. C'est aussi un hyperplan vectorielle de $\mathbb{R}^2$.

2). *Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par :*

$$G = \Big\{(x - y, y - x, x + z - y, z) \in \mathbb{R}^4 \text{ où } x, y, z \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Soit $u \in G$, on a

$$u = (x - y, y - x, x + z - y, z) = x.(1, -1, 1, 0) + y.(-1, 1, -1, 0) + z.(0, 0, 1, 1) = vect(v_1, v_2, v_3)$$

avec $v_1 = (1, -1, 1, 0), v_2 = (-1, 1, -1, 0)$ et $v_3 = (0, 0, 1, 1)$. Remarquons que v_1 est combinaison linéaire de v_2 et v_3 car $v_1 = (-1).v_2 + 0.v_3$. Donc $vect(v_1, v_2, v_3) = vect(v_2, v_3)$. et la famille (v_2, v_3) est une famille *libre. Ainsi,* $dimG = 2$*,*

le sous-espace G *est donc un plan vectorielle de* $\mathbb{R}^4$*, mais ce n'est pas un hyperplan vectorielle de* $\mathbb{R}^4$*.*

6.8.11 Dimension d'un sous espace vectoriel d'un espace de dimension finie

Théorème 6.8.56 *:*

Tout sous-espace vectoriel F *d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie est de dimension finie et* $dimF \leq dimE$*.*

De plus, $dimF = dimE$ *si, et seulement si* $E = F$*.*

Preuve :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et F un sous-espace vectoriel de E.

Si $F = \{0_E\}$, alors F est de dimension finie et $dimF = 0 \leq n = dimE$.

On suppose maintenant $F \neq \{0_E\}$, alors, il existe un vecteur v_1 non nul de F et la sous-famille (v_1) est libre.

• Si elle est génératrice de F, c'est une base de F. Il est clair que toute famille libre d'éléments de F étant une famille libre de E (puisque F est un sous-espace de E), d'aprés la proposiyion **6.8.51**, toutes les familles libres de F ont au plus n éléments.

• Si la sous-famille (v_1) n'est pas génératrice de F, il existe des familles libre ont au moins deux vecteurs et ont au plus n vecteurs de F. Soit $F_p = (v_1, \cdots, v_p)$ la plus grande sous-famille libre de F. Alors cette famille est aussi génératrice de F. Sinon, $\exists u \in F \ / \ u \notin Vect(v_1, \cdots, v_p)$, alors la famille $(v_1, \cdots, v_p, u)$ est libre (par la proposition **6.8.37**). Ce qui est une contradiction. Car la plus grande sous-famille libre de F est la famille F_p. Donc F_p est une base de F. Ainsi $dimF = p \leq n = dimE$ (puisque toute famille libre de F a au plus n éléments).

De plus, lorsque $p = n$, d'aprés le théorème **6.8.53**, la famille F_p est une base de F , est aussi une base de E, et tout élément de E est combinaison linéaire de $v_1, \cdots, v_p$, ce qui montre que $F = E$. ■

D'après le théorème précédent, on en déduire le corollaire suivant :

Corollaire 6.8.57 *:*

Soient F *et* G *deux sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*. Si* F *de dimension finie et* $G \subset F$*. Alors :* $F = G$ *si, et seulement si* $dimF = dimG$*.*

Si, on sait qu'un sous-espace est inclus dans un autre, alors pour montrer qu'ils sont égaux il suffit de montrer l'égalité des dimensions de ses deux espaces.

Exemple 6.8.58 *:*

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$F = \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x + y - z = 0 \ \ et \ \ t = x + y\Big\},$$

$$et \quad G = vect(v_1, v_2) \ \ où \ \ v_1 = (1,-1,1,0) \ \ et \ \ v_2 = (1,0,2,1).$$

- *On remarque que la famille (v_1, v_2) est libre, donc $dimG = 2$, et de plus $v_1 \in F$ et $v_2 \in F$, donc $G \subset F$.*
- *Calculons maintenent $dimF$.*

D'après la définition de F, on a, pour tout $u = (x,y,z,t) \in F$, on peut écrire $u = (x, y, 2x+y, x+y) = x.(1,0,2,1) + y.(0,1,1,1)$. C'est-à-dire $F = vect(u_1, u_2)$ où $u_1 = (1,0,2,1)$ et $u_2 = (0,1,1,1)$, et les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, donc $dimF = 2 = dimG$, ce qui entraîne $F = G$.

Théorème 6.8.59 *:*

Tout sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie possède au moins un supplémentaire.

Preuve :

Soient F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n et $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_p)$ une base de F.

Alors, la famille $\mathcal{B}$ est une famille libre de vecteurs de E.

- Si $p = n$, on a alors que $F = E$, et $G = \{0_E\}$ est le supplémentaire de F dans E.
- Si $p < n$, on peut considére alors $G = vect(v_{p+1}, \cdots, v_n)$, tel que la famille $\mathcal{L} = (v_1, \cdots, v_n)$ est libre et montrons que G est un supplémentaire de F. C'est-à-dire montrons que $G \cap F = \{0_E\}$ et $G + F = E$.

$*$ Soit $u \in F \cap G$, alors $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p$ et $u = \beta_{p+1} v_1 + \cdots + \beta_n v_n$, (car $u \in F$ et $u \in G$). Ceci implique $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p - \beta_{p+1} v_1 - \cdots - \beta_n v_n = 0_E$. Donc $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \beta_{p+1} = \cdots = \beta_n = 0$, car la famille $\mathcal{L}$ est libre. On en déduit $u = 0_E$ et ainsi $F \cap G = \{0_E\}$.

$*$ Soit $u \in E$, alors $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p + \beta_{p+1} v_1 + \cdots + \beta_n v_n$, (puisque la famille $\mathcal{L}$ est libre et de cardinal égal à $n = dimE$, par le théorème **6.8.53**, est une base de E).

On peut écrire $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p \in F$ et $u_2 = \beta_{p+1} v_1 + \cdots + \beta_n v_n \in G$, ce qui montre que $u \in F + G$. Finalement F et G sont supplémentaires dans E. ∎

Théorème 6.8.60 *:*

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et $\mathcal{B}_F = (e_1, \cdots, e_p)$, $\mathcal{B}_G = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_q)$ des bases des F et G respectivement. Alors $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p, \epsilon_1, \cdots, \epsilon_q)$ est une base de E. C'est-à-dire $dimE = dimF + dimG$.

Preuve :

Posons $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G. et montrons que la famille $\mathcal{B}$ c'est une base de E.

1* Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

Supposons

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p + \beta_1 \epsilon_1 + \cdots + \beta_q \epsilon_q = 0_E.$$

On a donc $\underbrace{\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p}_{\in F} = \underbrace{-\beta_1 \epsilon_1 - \cdots - \beta_q \epsilon_q}_{\in G} = 0_E$ (car $F \cap G = \{0_E\}$). Ce qui implique que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \beta_1 = \cdots = \beta_q = 0$ (parsque $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ sont des familles libres). Ainsi la famille $\mathcal{B}$ est libre.

2* Montrons maintenant que la famille $\mathcal{B}$ est génératrice de E.

Soit $u \in E$. Alors on peut écrire $u = v + w$ où $v \in F$ et $w \in G$ (car $E = F + G$). Puisque $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G, on peut écrire $u = \underbrace{\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p}_{=v} + \underbrace{-\beta_1 \epsilon_1 - \cdots - \beta_q \epsilon_q}_{=w}$. Ce qui montre que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E. En particulier $dimE = card(\mathcal{B}) = p + q = dimF + dimG$. ■

Théorème 6.8.61 *:*

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors, $dim(F + G) = dimF + dimG - dim(F \cap G)$.

Preuve :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de F. D'après le théorème **6.8.59**, le sous-espace $F \cap G$ possède un supplémentaire H dans F. C'est-à-dire $H \cap (F \cap G) = \{0_E\}$ et $H + (F \cap G) = F$.

Montrons que H et G sont supplémentaires dans $F + G$.

1 $*$ Montrons $H \cap G = \{0_E\}$. Puisque H est un sous-espaces de F, on a $H \subset F$, alors $H = H \cap F$ donc $H \cap G = (H \cap F) \cap G = H \cap (F \cap G) = \{0_E\}$.

2 $*$ Montrons $H + G = F + G$. puisque $F \cap G$ et H sont supplémentaires dans F, on a alors $H + F \cap G = F$, donc $H + F \cap G + G = F + G$, ainsi $H + G = F + G$ (car $F \cap G \subset G$). Finalement H et G sont supplémentaires dans $F + G$.

D'après le théorème **6.8.60**, on a $dimF = dimH + dim(F \cap G)$ (car H et $F \cap G$ sont supplémentaires dans F). On a aussi $dim(F + G) = dimH + dimG$ (car H et G sont supplémentaires dans $F + G$). On en déduit $dim(F + G) = dimF + dimGdimF \cap G$. ■

Théorème 6.8.62 *:*

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie vérifiant

$dimF + dimG = dimE$.

On a équivalence entre :

(i) *F et G sont supplémentaires dans E,*

(ii) *$F+G=E$,*

(iii) *$F\cap G=\{0_E\}$.*

Preuve :

(i) $\Longrightarrow$ **(ii)** et **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** sont immédiates (par la définition d'espaces supplémentaires).

(ii) $\Longrightarrow$ **(iii)** Supposons F et G des sous-espaces vectoriels dans E et $F+G=E$. D'après le théorème **6.8.61**, on a $dim(F\cap G)=dimF+dimG-dim(F+G)=dimF+dimG-dimE=0$. Donc $F\cap G=\{0_E\}$.

(iii) $\Longrightarrow$ **(i)** Supposons F et G des sous-espaces vectoriels dans E et $F\cap G=\{0_E\}$. D'après le théorème **6.8.61**, on a $dimE=dim(F+G)=dimF+dimG$ (car $dim(F\cap G)=0$). Puisque $F\subset E$, $G\subset E$ et $dimE=dimF+dimG$, on a F et G sont supplémentaires dans E. ■

6.8.12 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 6.8.63 *:*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F=(v_1,\cdots,v_p$ une famille finie de p vecteurs de E.

*On appelle **rang** de la famille finie F, notée $rg(F)$, la **dimension** du sous-espace $Vect(F)$ engendré par les vecteurs $v_1,\cdots,v_p$.*

Autrement dit :

$$rgF=rg(v_1,\cdots,v_p)=dimVect(v_1,\cdots,v_p).$$

Proposition 6.8.64 *:*

Soit $(v_1,\cdots,v_p)$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Alors $rg(v_1,\cdots,v_p)\leq p$ avec égalité si, et seulement si, la famille $(v_1,\cdots,v_p)$ est libre.

Preuve :

Puisque la famille $(v_1,\cdots,v_p)$ est génératrice de l'espace $Vect(v_1,\cdots,v_p)$, donc d'après la proposition **6.8.51**, $dimVect(v_1,\cdots,v_p)\leq p$.

* Si la famille $(v_1,\cdots,v_p)$ est libre, c'est alors une base de $Vect(v_1,\cdots,v_p)$ et donc $dimVect(v_1,\cdots,v_p)=p$.

* **Inversement :** si $dimVect(v_1,\cdots,v_p)=p$, alors, d'après le théorème **6.8.53**, la famille $(v_1,\cdots,v_p)$ c'est une base de $Vect(v_1,\cdots,v_p)$, car elle contient p vecteurs de $Vect(v_1,\cdots,v_p)$ et p est la dimonsion de l'espace $Vect(v_1,\cdots,v_p)$. Donc elle est libre. ■

Proposition 6.8.65 *:*

Soit $(v_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n.

Alors $rg(v_i)_{1\leq i\leq p} \leq min\{n,p\}$ et de plus, $rg(v_i)_{1\leq i\leq p} = n = dimE$ si, et seulement si, la famille $(v_i)_{1\leq i\leq p}$ est génératrice de E.

Preuve :

Puisque $Vect((v_i)_{1\leq i\leq p}) \subset E$, donc, (d'après le théorème **6.8.56** et la proposition **6.8.64**)
$dimVect((v_i)_{1\leq i\leq p}) \leq dimE = n$ et $dimVect((v_i)_{1\leq i\leq p}) \leq p$, ce qui entraîne
$rg(v_i)_{1\leq i\leq p} = dimVect((v_i)_{1\leq i\leq p}) \leq min\{n,p\}$
* D'après le corrolaire **6.8.57** nous avons $(Vect((v_i)_{1\leq i\leq p}) \subset E$ et $dimVect((v_i)_{1\leq i\leq p}) = n = dimE)$ si, et seulement si, $(Vect((v_i)_{1\leq i\leq p}) = E)$, c'est-à-dire la famille $(v_i)_{1\leq i\leq p}$ est génératrice de E. ■

Opérations

Proposition 6.8.66 *:*
Le rang d'une famille de vecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, n'est pas modifié si on utilise les opérations élémentaires suivantes :
- *On peut multiplier un vecteur par un scalaire non nul. (c'est-à-dire, on peut remplacer un vecteur v_i de la famille par $\lambda.v_i$ avec $\lambda \neq 0$).*
- *On peut permuter les vecteurs de la famille (c'est-à-dire, on peut changer l'emplacement de deux vecteurs, « $v_i \longleftrightarrow v_j$ »).*
- *On peut ajouter à un vecteur de la famille une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille ($v_i \longleftarrow v_i + \sum_{i\neq j}\lambda_j v_j$).*

Preuve :

Soit $(v_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
- Puisque $\forall\lambda \in \mathbb{K};\ \lambda.v_i \in Vect((v_i)_{1\leq i\leq p}$ (car $Vect((v_i)_{1\leq i\leq p})$ est un sous-espace de E), alors

$$Vect(v_1, \cdots, v_p) = Vect(v_1, \cdots, v_{i-1}\lambda.v_i, v_{i+1}, \cdots, v_p).$$

C'esr-à-dire, cette manipulation ne modifié pas l'espace vectoriel engendré par la famille $(v_i)_{1\leq i\leq p}$.
- De même, si on permuter deux vecteurs entre eux.
- Supposons que $u = \sum_{j\in\{1,\cdots i-1,i+1,\cdots p\}}\lambda_j v_j$, et montrons

$$Vect(v_1, \cdots, v_p) = Vect(v_1, \cdots, v_{i-1}v_i + u, v_{i+1}, \cdots, v_p). \tag{6.18}$$

Puisqu'une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \cdots, v_{i-1}, v_{i+1}, \cdots, v_p$ et $v_i + u$ est aussi une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \cdots, v_p$, on a alors,

$$Vect(v_1, \cdots, v_{i-1} v_i + u, v_{i+1}, \cdots, v_p) \subset Vect(v_1, \cdots, v_p). \tag{6.19}$$

De même, on a

$$Vect(v_1, \cdots, v_p) = Vect(v_1, \cdots, v_{i-1}\,(v_i + u) - u, v_{i+1}, \cdots, v_p) \subset Vect(v_1, \cdots, v_{i-1} v_i + u, v_{i+1}, \cdots, v_p). \tag{6.20}$$

Par (6.19) et (6.20) on a l'égalité (6.18). ∎

6.9 Exercices

Exercice 6.9.1 *:*

Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1(1,1,0)$, $v_2(4,1,4)$ et $v_3(2,1,4)$.

1.) Montrer que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. Faire de même avec v_1 et v_3, puis avec v_3 et v_2.

2.) La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?.

Exercice 6.9.2 *:*

Soient $u_1(1,2,3,4)$ et $u_2(1,-2,3,-4)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

• *Peut-on déterminer x et y pour que $(x,1,y,1) \in Vect\{u_1, u_2\}$? Et pour que $(x,1,1,y) \in Vect\{u_1, u_2\}$?.*

Exercice 6.9.3 *:*

Soient E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par les vecteurs $\{(1,2,-1), (1,-1,2)\}$ et $\{(3,0,3), (4,5,-1)\}$.

Montrer que E et F sont égaux.

Exercice 6.9.4 *:*

***I.**) F est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(1,0)$, G est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(0,1)$.*

$1*$ *A-t-on une somme directe ?*

$2*$ *F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$?.*

***II.**) F est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(1,1)$, G est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(0,1)$.*

1° *Montrer que F et G sont en somme directe. On note $H = F \oplus G$.*

2° *Pour chaque élément $u = (x_1, x_2)$ de H donner sa décomposition unique sur F et G , c'est-à-dire trouver*

$v \in F$ et $w \in G$ tel que $u = v + w$.

3° F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$?.

Exercice 6.9.5 *:*

Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Calculer leurs dimensions.

$$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x - y + z = x + y - z = 0\right\}. \qquad E_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 - z^2 = 0\right\}.$$

$$E_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ e^x + e^y = 0\right\}. \qquad E_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 2\right\}.$$

Exercice 6.9.6 *:*

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère $V = \{(x,y,z,t) \in E;\ z - 2y = 0 \text{ et } y - 2x = 0\}$ et

$W = \{(x,y,z,t) \in E;\ x - y = z - t\}$.

***1.** Montrer que V et W sont des sous espaces vectoriels de E.*

***2.** Donner une base de V, W et $V \cap W$.*

***3.** Montrer que $E = V + W$.*

Exercice 6.9.7 *:*

Soient $e_1(0,1,-2,1)$, $e_2(1,0,2,-1)$, $e_3(3,2,2,-1)$, $e_4(0,0,1,0)$ et $e_5(0,0,0,1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1* $Vect\{e_1,e_2,e_3\} = Vectf\{(1,1,0,0),(1,1,4,2)\}$.

2* $(1,1,0,0) \in Vect\{e_1,e_2\} \cap Vect\{e_2,e_3,e_4\}$.

3* $dim\,(Vect\{e_1,e_2\} \cap Vect\{e_2,e_3,e_4\}) = 1$.

4* $Vect\{e_1,e_2\} + Vect\{e_2,e_3,e_4\} = \mathbb{R}^4$.

5* $Vect\{e_4,e_5\}$ *est un sous-espace vectoriel de supplémentaire* $Vect\{e_1,e_2,e_3\}$ *dans* $\mathbb{R}^4$.

Exercice 6.9.8 *:*

On munit $\mathbb{R}^3$ des opérations usuelles.

Soient $F_1 = \{(x,x,x);\ x \in \mathbb{R}\}$, $F_2 = \left\{(x-3y, 2y, x+y);\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$, $F_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x - y + z = 0\right\}$ et $F_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x + 2y + 3z = 0 \text{ et } 2x + 5y + z = 0\right\}$.

1) Montrer que F_1, F_2, F_3 et F_4 sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ et en fournir dans chaque cas une famille génératrice.

Soient $u = (1,1,1)$, $v = (1,0,-1)$ et $w = (0,1,1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

2) Montrer que (u,v,w) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6.9.9 *:*

Soient $v_1(1,2,3,4)$, $v_2(2,2,2,6)$, $v_3(0,2,4,4)$, $v_4(1,0,1,2)$, $v_5(2,3,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Soient $F = Vect\{v_1, v_2, v_3\}$ *et* $G = Vect\{v_4, v_5\}$.

Déterminer une base des sous-espaces F, G, $F \cap G$ *et* $F + G$.

Exercice 6.9.10 *:*

Dans $\mathbb{R}^4$, *on considère les familles de vecteurs suivantes*

$u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (0,1,2,-1)$, $u_3 = (1,0,-2,3)$, $u_4 = (2,1,0,-1)$, $u_5 = (4,3,2,1)$.

$v_1 = (1,2,3,4)$, $v_2 = (0,1,2,-1)$, $v_3 = (3,4,5,16)$.

$w_1 = (1,2,3,4)$, $w_2 = (0,1,2,-1)$, $w_3 = (2,1,0,11)$, $w_4 = (3,4,5,14)$.

Ces vecteurs forment-ils :

1. *Une famille libre ? Si oui, la compléter pour obtenir une base de* $\mathbb{R}^4$. *Si non donner des relations de dépendance entre eux et extraire de cette famille au moins une famille libre.*

2. *Une famille génératrice ? Si oui, en extraire au moins une base de l'espace. Si non, donner la dimension du sous-espace qu'ils engendrent.*

Exercice 6.9.11 *:*

On note $\mathbb{R}_3[X]$ *l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à* 3.

Soit $F := \{P \in \mathbb{R}_3[X];\ (X+1)P' - (2-X^2)P'' = 0\}$.

a. *Montrer que l'ensemble* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_3[X]$.

b. *Soit* $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. *Trouver les valeurs de* a_0, a_1, a_2 *et* a_3 *tel que* $P(X) \in F$.

En préciser l'ensemble F *et en donner une famille génératrice.*

Exercice 6.9.12 *:*

On considère la famille suivante de polyômes :

$$E := \left\{1,\ 1+X,\ 1+X+X^2,\ 1+X+X^2+X^3\right\}.$$

1 $\bullet$ *Montrer que* E *est une base de* $\mathbb{R}_3[X]$, *l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à* 3, *en démontrant que tout polynôme* $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ *s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire d'éléments de* E.

2 $\bullet$ *Donner les coordonnées de* P *dans cette famille libre.*

Exercice 6.9.13 *:*

On considère la famille suivante de polynômes

$$F := \left\{1+X+X^2+X^3,\ 1-X-X^3,\ 1-X^2-X^3,\ 3-X^3\right\}.$$

1. *Cette famille est-elle génératrice dans l'espace-vectoriel* $\mathbb{R}_3[X]$ *des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 ?*

2. *Cette famille est-elle libre dans* $\mathbb{R}_3[X]$ *?*

3. *Cette famille est-elle libre dans* $\mathbb{R}[X]$ *?*

4. *Donner deux bases du sous-espace* $Vect(F)$ *engendré par la famille* F.

5. *Compléter ces bases de* $Vect(F)$ *en des bases de* $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 6.9.14 *:*

Soient $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + z = 0, \text{ et } y + t = 0\}$ *une parties de* $\mathbb{R}^4$ *et* F *le sous-espace de* $\mathbb{R}^4$ *engendré par* $\{u_1, u_2\ u_3\}$ *où*

$$u_1 = (1, 1, 1, 1)\,, \ u_2 = (1, -1, 1, -1) \ \text{ et } u_3 = (1, 0, 1, 0)\,.$$

1· *Montrer que* E *est un sous-espace de* $\mathbb{R}^4$.

2· *Déterminer une base de* E*, et déduire sa dimension* $(\dim E)$.

3· *Déterminer une base de* F.

4· *Déterminer une famille engendré à* $E + F$.

5· *Montrer que* $E \oplus F = \mathbb{R}^4$.

6.10 Applications linéaires

Définition 6.10.1 *:*

Soient $(E, +, .)$ *et* $(F, \oplus, \otimes)$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels.*

On appelle ***application linéaire*** *(ou* ***homomorphisme*** *d'espaces vectoriels) de* E *dans* F*, toute application* $f : E \longrightarrow F$ *verifiant :*

1) $\forall\,(u, v) \in E^2;\ f(u + v) = f(u) \oplus f(v)$,

2) $\forall\,(\alpha, u) \in \mathbb{K} \times E;\ f(\lambda.u) = \lambda \otimes f(u)$.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ *l'ensemble des applications linéaires de* E *dans* F.

Exemples 6.10.2 *:*

1 • l'application

$$\begin{array}{rccc} D: & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & P(X) & \longmapsto & P'(X). \end{array} \quad \text{est une application linéaire.}$$

Car pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ *et pour tous* $\alpha \in \mathbb{R}$ *on a*

$$\begin{aligned} D\left(P(X)+Q(X)\right) &= \left(P(X)+Q(X)\right)' \\ &= P'(X)+Q'(X) \\ &= D\left(P(X)\right)+D\left(Q(X)\right). \end{aligned} \qquad et \qquad \begin{aligned} D\left(\alpha.P(X)\right) &= \left(\alpha.P(X)\right)' \\ &= \alpha.P'(X) \\ &= \alpha.D\left(P(X)\right). \end{aligned}$$

2 • L'application de $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *définie par :* $f(x,y,z) = (2z-y, 3x+z)$ *est une application linéaire. Puisque, pour tous* $u_1\left(x_1,y_1,z_1\right), u_2\left(x_2,y_2,z_2\right) \in \mathbb{R}^3$ *et pour tous* $\lambda \in \mathbb{R}$ *on a*

$$\begin{aligned} f\left(u_1+u_2\right) &= f\left(\left(x_1,y_1,z_1\right)+\left(x_2,y_2,z_2\right)\right) \\ &= f\left(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2\right) \\ &= f\left(X,Y,Z\right) \qquad \text{avec } X = x_1+x_2, Y = y_1+y_2, Z = z_1+z_2 \\ &= \left(2Z-Y, 3X+Z\right) \\ &= \left(2\left(z_1+z_2\right)-\left(y_1+y_2\right), 3\left(x_1+x_2\right)+\left(z_1+z_2\right)\right) \\ &= \left(2z_1-y_1, 3x_1+z_1\right)+\left(2z_2-y_2, 3x_2+z_2\right) \\ &= f\left(x_1,y_1,z_1\right)+f\left(x_2,y_2,z_2\right) \\ &= f\left(u_1\right)+f\left(u_2\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad f\left(\lambda.u_1\right) &= f\left(\lambda.\left(x_1,y_1,z_1\right)\right) \\ &= f\left(\lambda.x_1, \lambda.y_1, \lambda.z_1\right) \\ &= f\left(X',Y',Z'\right) \qquad \text{avec } X' = \lambda.x_1, Y' = \lambda.y_1, Z' = \lambda.z_1 \\ &= \left(2Z'-Y', 3X'+Z'\right) \\ &= \left(2\left(\lambda.z_1\right)-\lambda.y_1, 3\left(\lambda.x_1\right)+\lambda.z_1\right) \\ &= \lambda.\left(2z_1-y_1, 3x_1+z_1\right) \\ &= \lambda.f\left(x_1,y_1,z_1\right) \\ &= \lambda.f\left(u_1\right). \end{aligned}$$

3 • L'application $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow x^2 \in \mathbb{R}$ *n'est pas linéaire. Car il existe* $x, x' \in \mathbb{R}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $f\left(x+x'\right) = \left(x+x'\right)^2 \neq f\left(x\right)+f\left(x'\right)$ *ou* $f\left(\lambda.x\right) = \left(\lambda.x\right)^2 \neq \lambda.f\left(x\right)$.

4 • Soient $\mathbb{C}$ *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel et* g *une application de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$ *définie par* $g(z) = \overline{z}$. *Cette application* g *n'est pas linéaire. Car il existe* $z \in \mathbb{C}$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $g\left(\lambda.z\right) = \overline{\left(\lambda.z\right)} = \overline{\lambda}.\overline{z} \neq \lambda.g(z)$.

Proposition 6.10.3 *:*

Soient $(E,+,.)$ *et* $(F,\oplus,\otimes)$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* f *une application de* E *dans* F.

L'application f est linéaire si et seulement si,

$$\forall (u,v) \in E^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2;\ f(\alpha.u+\beta.v) = \alpha \otimes f(u) \oplus \beta \otimes f(v).$$

Preuve :

$*$ Supposons que f soit une application linéaire de E dans F. Soient $u, v \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. D'après la définition d'une application linéaire, on a

$$f(\alpha.u+\beta.v) = f(\alpha.u) \oplus f(\beta.v) = \alpha \otimes f(u) \oplus \beta \otimes f(v).$$

$*$ **Réciproquement**, Soit f une application de E vers F telle que pour tous $u, v \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$; $f(\alpha.u+\beta.v) = \alpha \otimes f(u) \oplus \beta \otimes f(v)$.
En prenant, d'une part $\alpha = \beta = 1_{\mathbb{K}}$ et $u, v \in E$ on obtient

$$f(1_{\mathbb{K}}.u + 1_{\mathbb{K}}.v) = f(u+v) = 1_{\mathbb{K}} \otimes f(u) \oplus 1_{\mathbb{K}} \otimes f(v) = f(u) \oplus f(v),$$

et d'autre part en prenant $\beta = 0_{\mathbb{K}}$ on obtient

$$f(\alpha.u + 0_{\mathbb{K}}.v) = f(\alpha.u) = \alpha \otimes f(u) \oplus 0_{\mathbb{K}} \otimes f(v) = \alpha \otimes f(u).$$

■

Exemple 6.10.4 *:*

• *Soient $\mathbb{C}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et h une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $h(z) = a\overline{z}$.*
Cette application h est linéaire. Car pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} f\left(\alpha.z+\beta.z'\right) &= a\overline{(\alpha.z+\beta.z')} \\ &= a\left(\overline{\alpha.z}+\overline{\beta.z'}\right) \\ &= \alpha.\left(a\overline{z}\right)+\beta.\left(a\overline{z'}\right) \\ &= \alpha f\left(z\right)+\beta f\left(z'\right). \end{aligned}$$

Proposition 6.10.5 *:*

Si f une application linéaire de E vers F alors $f(0_E) = 0_F$.

Preuve :

Pour tout $u \in E$ on a $f(0_E) = f(u-u) = f(u) - f(u) = 0_F$. ■

6.10.1 Application linéaires particulières

Définition 6.10.6 :

• *On appelle* ***forme linéaire*** *toute application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E dans $\mathbb{K}$ et on note $E^\star$ au lieu de $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ (est appelé dual de E).*

• *On appelle* ***endomorphisme*** *de E, toute application linéaire de E dans lui-même. On note $\mathcal{L}(E)$, l'ensemble des endomorphismes de E.*

• *Toute application linéaire bijective d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vers un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F appelée* ***isomorphisme****.*

• *On appelle* ***automorphisme*** *de E, toute endomorphisme bijective de E.*

Exemples 6.10.7 :

1) *Soient $a,b \in \mathbb{R}$ et ψ l'application de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ définie par $\psi(f) = \int_a^b f(t)dt$ L'application ψ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ car c'est une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

2) *L'application identité $Id_E : E \longrightarrow E$ est un endomorphisme de E.*

3) *L'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (z,y,x)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.*

Proposition 6.10.8 :

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. *Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont linéaires alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ est linéaire.*

2. *Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire bijective alors son application réciproque f^{-1} est une application linéaire de F vers E.*

Preuve :

1. Pour tous $u,v \in E$ et pour tous $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ on a

$$\begin{aligned}
(g\circ f)(\alpha.u+\beta.v) &= g(f(\alpha.u+\beta.v)) \\
&= g(f(\alpha.u)+f(\beta.v)) \quad \text{par linéarité de } f \\
&= g(\alpha.f(u)+\beta.f(v)) \\
&= g(\alpha.f(u))+g(\beta.f(v)) \quad \text{par linéarité de } g \\
&= \alpha.g(f(u))+\beta.g(f(v)) \\
&= \alpha.(g\circ f)(u)+\beta.(g\circ f)(v).
\end{aligned}$$

2. Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ et y (respectivement y') un vecteur de F. Il existe un unique vecteur x (resp. x') de E tel que $y = f(x)$ (resp. $y' = f(x')$) ou de manière equivalente $x = f^{-1}(y)$ (resp. $x' = f^{-1}(y')$).

Par linéarité de f on a

$$\begin{aligned} \alpha.y + \beta.y' &= \alpha.f(x) + \beta.f(x') \\ &= f(\alpha.x + \beta.x'). \end{aligned}$$

Lorsque f^{-1} est une une application bijective de F vers E alors on a

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha.y + \beta.y') &= f^{-1}(f(\alpha.x + \beta.x')) \\ &= \alpha.x + \beta.x' \\ &= \alpha.f^{-1}(y) + \beta.f^{-1}(y'). \end{aligned}$$

■

Proposition 6.10.9 *:*

∗ *Si f et g sont des endomorphismes E alors la composée $g \circ f$ aussi.*

∗ *Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont des isomorphismes alors la composée $g \circ f : E \longrightarrow G$ est un isomorphisme.*

∗ *Si f et g sont des automorphismes de E alors la composée $g \circ f$ est un automorphisme de E.*

∗ *Si f est un automorphisme de E alors son application réciproque f^{-1} est un automorphisme de E.*

Corollaire 6.10.10 *:*

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de E et f une application linéaire de E dans F.

Pour tout vecteur u de E il existe $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tel que

$$f(u) = \lambda_1.f(e_1), \lambda_2.f(e_2), \cdots, \lambda_p.f(e_p).$$

Preuve :

Soit u un vecteur de E, alors il existe un unique $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$u = \lambda_1.e_1 + \lambda_2.e_2 + \cdots + \lambda_p.e_p.$$

En appliquant f, on obtient

$$\begin{aligned} f(u) &= f(\lambda_1.e_1 + \lambda_2.e_2 + \cdots + \lambda_p.e_p) \\ &= \lambda_1.f(e_1), \lambda_2.f(e_2), \cdots, \lambda_p.f(e_p) \quad \text{par linéarité de } f. \end{aligned}$$

■

Corollaire 6.10.11 *:*

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de E et f, g deux applications linéaires de E dans F.

$$(\forall i \in \{1, 2, \cdots, p\}\,;\; f(e_i) = g(e_i)) \Longleftrightarrow (\forall u \in E :\; f(u) = g(u))\,.$$

Proposition 6.10.12 *:*

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F.

a• Si V est un sous-espace vectoriel de E alors $f(V)$ est un sous-espace vectoriel de F.

b• Si U est un sous-espace vectoriel de F alors $f^{-1}(U)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve :

Soit V un sous-espace vectoriel de E. Alors, on a $f(V) \subset F$ et $0_E \in V$ et $0_F = f(0_E) \in f(V)$.

Pour tout vecteur y_1 (respectivement y_2) de $f(V)$ il existe x_1 (resp. x_2) dans V tel que $y_1 = f(x_1)$ (resp. $y_2 = f(x_2)$) On a alors

$$\alpha.y_1 + \beta.y_2 = \alpha.f(x_1) + \beta.f(x_2) = f(\alpha.x_1 + \beta.x_2) \in f(V),$$

car $x_1, x_2 \in V$ et V est un sous-espace vectoriel de E. Ainsi $f(V)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Considérons U un sous-espace vectoriel de F et montrons que $f^{-1}(U)$ est un s.e.v de E.

On a $0_F \in U \subset F$ car U est s.e.v de E et $f^{-1}(U) \subset E$ donc $0_E \in f^{-1}(U)$ puisque $f(0_E) = 0_F \in U$.

Pour tout vecteur x_1 (respectivement x_2) de $f^{-1}(U) \subset E$ il existe y_1 (resp. y_2) dans U tel que $y_1 = f(x_1)$ (resp. $y_2 = f(x_2)$).

On a alors

$$f\left(\alpha.x_1 + \beta.x_2\right) = \alpha.f(x_1) + \beta.f(x_2) \in U,$$

car $f(x_1), f(x_2) \in U$ et U est un sous-espace vectoriel de F.

Donc $\alpha.x_1 + \beta.x_2 \in f^{-1}(U)$. Ainsi $f^{-1}(U)$ est un sous-espace vectoriel de E. ■

6.10.2 Image et noyau d'une application linéaire

Dans toute la suite, E et F désigneront des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F.

Image d'une application linéaire

Définition 6.10.13 *:*

*L'**image** de f est $f(E)$ l'ensemble de toutes les images des éléments de E par f et est noté Imf.*

$$Imf = f\left(E\right) = \left\{f\left(x\right)/x \in E\right\}.$$

Exemples 6.10.14 *:*

1) *Soit l'application linéaire,*

$$\begin{array}{rlcl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f\left(x,y,z\right) = (x-y, y+2z). \end{array}$$

Déterminons l'image de f :

$$\begin{aligned} Imf &= \left\{(x',y') \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x',y') = f\left(x,y,z\right) \ \wedge \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{(x-y, y+2z) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{x\left(1,0\right) + y\left(-1,1\right) + z\left(0,2\right) / \left(x,y,z\right) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= vect\left(u\left(1,0\right), v\left(-1,1\right), w\left(0,2\right)\right) \\ &= vect\left(u\left(1,0\right), v\left(-1,1\right)\right) \quad car\ w = 2u+2v \\ &= \mathbb{R}^2 \quad car\ \left\{u,v\right\} \quad est\ une\ base\ de\ \ \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

2) *Soit l'application linéaire,*

$$\begin{array}{rlcl} h: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & h\left(x,y,z\right) = (x+y, y+z, x+2y+z) \end{array}$$

Déterminons l'image de h : Soit $(x',y',z') \in Imh$, alors $\exists\left(x,y,z\right) \in \mathbb{R}^3 \ / \ h\left(x,y,z\right) = (x',y',z')$. On a donc $x' = x+y,\ y' = y+z$ et $z' = x+2y+z$. Remarquons que les coordonnées d'un vesteur $u = (x',y',z')$ de Imh vérifient la relation $x'+y'-z' = 0$. Cela montre que

$$Imh \subset P = \left\{(x',y',z') \in \mathbb{R}^3;\ x'+y'-z' = 0\right\}.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} Imh &= vect\{h(1,0,0), h(0,1,0), h(0,0,1)\} \\ &= vect\{u_1(1,0,1), u_2(1,1,2), u_3(0,1,1)\} \\ &= vect\{u_1(1,0,1), u_3(0,1,1)\} \quad car\ u_2 = u_1 + u_3 \\ &= P \quad car\ u_1, u_3 \in P. \end{aligned}$$

Proposition 6.10.15 *:*

Soit f une application linéaire de E dans F.

• *Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E alors l'image de $\mathcal{G}$ par f est génératrice de Imf. En d'autres termes*

$$f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F) \text{ et } E = vect(\mathcal{G}) \Longrightarrow Imf = vect(f(\mathcal{G})).$$

Plus précisément, si $\mathcal{G} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ est une base de E (ou une famille génératrice de E), alors $Imf = Vect\{f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)\}$.

• *De plus, si E est de dimension finie alors $dim(Imf) \leq dim(E)$*

Preuve :

• Supposons que $\mathcal{G} = \{e_i\}_{1\leq i\leq p}$ une famille finie de p vecteurs génératrice de E (dans le cas d'une famille infinie ne pose pas des difficulté).

Montrons que tout vecteur u de Imf s'écrit comme une combinaison linéaire de $f(\mathcal{G}) = \{f(e_i)\}_{1\leq i\leq p}$.

Soit $u \in Imf$, alors il existe $v \in E$ tel que $f(v) = u$. puisque E engendré par $\{e_i\}_{1\leq i\leq p}$ alors

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{K}; v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p$$

En appliquant f on obtient

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{K}; u = f(v) = \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \cdots + \lambda_p f(e_p).$$

Ce qui montre que u est combinaison linéaire des vecteurs $f(e_1), f(e_2), \cdots, (e_p)$.

• Soit $\mathcal{B} = \{e_i\}_{1\leq i\leq m}$ une base de E, alors $Imf = vect\{\mathcal{B}\}$. On en deduit que

$$dim(Imf) = dim(vect\{\mathcal{B}\}) \leq dimE = m.$$

■

Exemples 6.10.16 *:*

a) *Soit l'application linéaire,*

$$\begin{array}{rccl} g_1 : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & g_1(x,y,z) = (x-y+2z, y-x-2z) \end{array}$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned} Img_1 &= \{g_1(x,y,z) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x-y+2z, y-x-2z) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x-y+2z)(1,-1) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= vect\{(1,-1)\}. \end{aligned}$$

D'autre part, on peut définir le s.e.v Img_1 comme suit :

$$\begin{aligned} Img_1 &= vect\{g_1(1,0,0), g_1(0,1,0), g_1(0,0,1)\} \\ &= vect\{u_1(1,-1,), u_2(-1,1), u_3(2,-2)\} \\ &= vect\{(1,-1,)\} \quad car\ u_2 = -u_1 \ \ et\ u_3 = 2u_1. \end{aligned}$$

b) *Soient $\mathcal{B} = (i,j,k)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et f_1 l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :*

$$f_1(i) = i+k, \ \ f_1(j) = j-k, \ \ f_1(k) = i-j+2k.$$

Alors l'image de f_1 est définie comme suit :

$$\begin{aligned} Imf_1 &= \text{vect}\{f_1(i), f_1(j), f_1(k)\} \\ &= \text{vect}\{f_1(i), f_1(j)\} \quad car \ \ f_1(k) = f_1(i) - f_1(j) \\ &= \{x(i+k) + y(j-k) / x, y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Noyau d'une application linéaire

Définition 6.10.17 *:*

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

*Le **noyau** de f, noté $Ker(f)$, est l'ensemble des solutions de $f(x) = 0_F$ dans E.*

$$Ker(f) = \{x \in E; \ f(x) = 0_F\}.$$

Autrement dit, le noyau de f est l'image réciproque par f de l'ensemble $\{0_F\}$. C'est-à-dire $Ker(f) = f^{-1}\{0_F\}$.

Exemples 6.10.18 *:*

1 Soit l'application linéaire,*

$$\begin{array}{rlll} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = (x-y, y+2z). \end{array}$$

Déterminons le noyau de f :

$$\begin{aligned} \ker f &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^2}\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x-y, y+2z) = 0_{\mathbb{R}^2}\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \left\{\begin{array}{c} x-y=0 \\ y+2z=0 \end{array}\right.\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \left\{\begin{array}{l} x=y \\ y=-2z \end{array}\right.\right\} \\ &= \{(-2z,-2z,z) \ \text{ avec } z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(-2,-2,1) \ \text{ avec } z \in \mathbb{R}\} \\ &= vect\{w(-2,-2,1)\}. \end{aligned}$$

2 On considère $\mathbb{R}_1[X]$ l'ensemble du polynômes de degré inférieure ou égale à 1 muni de sa structure usuelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
Soit l'application linéaire,

$$\begin{array}{rlll} g: & \mathbb{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ & P(X) & \longmapsto & g(P(X)) = (X+1)P(X) - (X^2+1)P'(X). \end{array}$$

Calculons le noyau de g :
Soit $P(X) = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P(X) \in ker(g) &\iff g(P(X)) = 0_{\mathbb{R}_1[X]} \\ &\iff (X+1)(aX+b) - (X^2+1)(a) = 0_{\mathbb{R}_1[X]} \\ &\iff (a+b)X + b - a = 0_{\mathbb{R}_1[X]} \\ &\iff (a+b) = 0 \ \ et \ \ b-a=0 \\ &\iff b = a = 0. \end{aligned}$$

En on deduit que $ker(g) = \left\{0_{\mathbb{R}_1[X]}\right\}$.

3 Soit l'application linéaire,*

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & h(x,y,z) = (x+y, y+z, x+2y+z). \end{array}$$

Déterminons le noyau de h :

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z) \in \ker(h) & \Longleftrightarrow & h(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ & \Longleftrightarrow & (x+y, y+z, x+2y+z) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x+y=0 \\ y+z=0 \\ x+2y+z=0 \end{array} \right. \\ & & \textit{remarquons que la dernière equation est la somme des deux premières} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x=-y \\ y=-z \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \{(z,-z,z) \quad \textit{avec } z \in \mathbb{R}\} \\ & \Longleftrightarrow & \{z(1,-1,1) \quad \textit{avec } z \in \mathbb{R}\} \\ & \Longleftrightarrow & \textit{vect}\{u(1,-1,1)\}. \end{array}$$

4 Soit l'application linéaire,*

$$\begin{array}{rccl} k: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & k(x,y,z) = x+y-2z. \end{array}$$

Déterminons le noyau de k :

$$\begin{array}{rcl} \ker k & = & \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ k(x,y,z) = 0\right\} \\ & = & \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y-2z = 0\right\} \\ & = & \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = 2z-y\right\} \\ & = & \{(2z-y, y, z) \quad \text{avec } y,z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{(2z,0,z) + (-y,y,0) \quad \text{avec } y,z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{z(2,0,1) + y(-1,1,0) \quad \text{avec } y,z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \textit{vect}\{u_1(1,-1,0), u_2(2,0,1)\}. \end{array}$$

Proposition 6.10.19 *:*

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors

1 $*$ *Imf est un sous-espace vectoriel de F.*

2 $*$ *$\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Preuve :

1 $*$ On rappelle que Imf est le sous-ensemble $f(E)$ de F. En appliquons la proposition **6.10.12** avec $V = E$, d'où le résultat.

2 $*$ La propriété de linéarité de l'application f nous assure que $Kerf$ est non vide. En effet $0_E \in Kerf$ car $f(0_E) = 0_F$.

Soient $u, v \in Kerf$ et α, $\beta \in \mathbb{K}$. Montrons que $(\alpha.u + \beta.v) \in Kerf$. Puisque f est linéaire, on a

$$f(\alpha.u + \beta.v) = \alpha.f(u) + \beta.(v) = 0_F,$$

car $f(u) = f(v) = 0_F$. Donc le vecteur $\alpha.u + \beta.v$ il appartient à $Kerf$. ■

Proposition 6.10.20 *:*

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors :

1° f est injective $\Leftrightarrow$ $\ker f = \{0_E\}$

2° f est surjective $\Leftrightarrow$ Im f=F.

Preuve :

1° Premièrement, montrons que : f est injective $\Longrightarrow \ker f = \{0_E\}$.

Supposons que f soit injective et montrons que $Kerf = \{0_E\}$.

D'une part, on a $\{0_E\} \subset \ker f$ car $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E.

D'autre part, pour tout $x \in \ker f$ on a $f(x) = 0_F = f(0_E)$ d'après linéarité de f. On en deduit que $x = 0_E$ car f est injective. Cela montre que $\ker f \subset \{0_E\}$.

On peut alors affirmer $Kerf = \{0_E\}$.

Montrons maintenant que : $\ker f = \{0_E\} \Longrightarrow f$ est injective.

Supposons que $\ker f = \{0_E\}$ et montrons que f est injective.

Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On a donc $f(x) - f(y) = 0_F$. On en déduit $f(x - y) = 0_F$, car f est linéare. C'est-à-dire $x - y \in \ker f$. Comme $\ker f = \{0_E\}$ on a donc $x - y = 0_E$, c'est-à-dire $x = y$. Ainsi f est injective.

2° Cette propriété est vraie même si f n'est pas linéaire. La preuve est immédiate par définition de la surjectivité et la définition de l'image directe de E par f. ■

Exemples 6.10.21 *:*

1• *L'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y, z) = (x - y, y + 2z)$ est surjective (puisque $Imf = \mathbb{R}^2$*

*voir l'exemple **1)** dans **6.10.14**). Mais N'est pas injective (puisque* $\ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ *voir l'exemple* $\mathbf{1}^*$ *dans **6.10.18**).*

2• *L'ondomorphisme* h *de* $\mathbb{R}^3$ *défini par* $h(x,y,z) = (x+y, y+z, x+2y+z)$*. N'est ni injective (puisque* $\ker h \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ *voir l'exemple* $\mathbf{3}^*$ *dans **6.10.18**), ni surjective (puisque* $Im h \neq \mathbb{R}^3$ *voir l'exemple **2)** dans **6.10.14**).*

Proposition 6.10.22 *:*

Soient f *une application linéaire de* E *dans* F *et* $\mathcal{B}$ *une famille de vecteurs de* E*.*

$\mathbf{1}^\star$ *Si la famille* $\mathcal{B}$ *est libre et* f *est injective alors la famille* $f(\mathcal{B})$ *est libre.*

$\mathbf{2}^\star$ *Si la famille* $\mathcal{B}$ *est génératrice de* E *et* f *est surjective alors la famille* $f(\mathcal{B})$ *est génératrice de* F*.*

Preuve :

$\mathbf{1}^\star$ Supposons que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_p\}$ est une famille de E libre et f est une application linéaire de E dans F injective et montrons que $f(\mathcal{B}) = \{f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_p)\}$ est une famille libre.

C'est-à-dire on montre

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{K};\ \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \cdots + \lambda_p f(u_p) = 0_F \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0_{\mathbb{K}}.$$

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \cdots + \lambda_p f(u_p) = 0_F$. Par linéarité de f on a

$$f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p) = f(0_E).$$

Donc $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E$ car f est injective. Enfin puisque la famille $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_p\}$ est libre, on obtient

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0_{\mathbb{K}}.$$

$\mathbf{2}^\star$ Supposons que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_p\}$ est une famille génératrice de E et f est une application linéaire de E dans F surjective et montrons que $f(\mathcal{B}) = \{f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_p)\}$ est une famille génératrice de F.
Pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car f est surjective. Puisque la famille $\mathcal{B}$ est génératrice de E, alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p$. Par linéarité de f on a $f(x) = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \cdots + \lambda_p f(u_p)$ Cela montre que la famille $f(\mathcal{B})$ est génératrice de F. ∎

Proposition 6.10.23 *:*

Si la famille $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_p\}$ *est une base de* E *et si* f *est un isomorphisme de* E *dans* F *alors* $f(\mathcal{B})$ *est une base de* F*.*

Preuve :

C'est immédiat par les deux théorèmes qui précèdent. ∎

Proposition 6.10.24 *:*

Soient f une application linéaire de E dans F et $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_p\}$ une base de E.

1) f est injective si, et seulement si, la famille $\{f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_p)\}$ est libre.

2) f est surjective si, et seulement si, la famille $\{f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_p)\}$ est génératrice de F.

3) f est un isomorphisme si, et seulement si, la famille $\{f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_p)\}$ est une base de F.

Preuve :

1) Nous avons déjà démontré l'implication $(\cdots \Longrightarrow \cdots)$ voir la proposition 6.10.22.

Montrons maintenant la réciproque.

Supposons qu'une famille $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_p\}$ est une base de E telle que la famille $\{f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_p)\}$ soit libre et montrons que $Kerf = 0_E$ C'est-à-dire f est injective.

Pour tout $x \in Kerf$ il existe un unique $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p,$$

car $\mathcal{B}$ est une base de E et $Kerf \subset E$.

En appliquant f, on obtient

$$f(x) = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \cdots + \lambda_p f(u_p) = 0_F,$$

car f est linéaire et $x \in Kerf$.

Puisque la famille $\{f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_p)\}$ est libre (par hypothèse) on déduit alors que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0_{\mathbb{K}}$ ce qui implique que $x = 0_E$. Ainsi $kerf = 0_E$.

2) Nous avons déjà démontré l'implication $(\cdots \Longrightarrow \cdots)$ voir la proposition **6.10.22**.

Montrons maintenant l'implication $(\cdots \Longleftarrow \cdots)$.

Supposons qu'une famille $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_p\}$ est une base de E telle que la famille $\{f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_p)\}$ soit génératrice de F et montrons que $Imf = F$ C'est-à-dire f est surjective.

Soit $y \in F$. On peut écrire

$$y = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \cdots + \lambda_p f(u_p) = f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p),$$

puisque la famille $f(\mathcal{B})$ est génératrice de F et f est linéaire.

Posons $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p \in E$, on a donc $y = f(x) \in Imf$.

3) Immédiat par ce qui précède. ∎

6.10.3 Rang d'une application linéaire

Définition 6.10.25 *:*

Le ***rang*** *d'une application linéeaire f de E dans F est la* ***dimension de l'image*** *de f et noté rgf. C'est-à-dire $rgf = dim(Imf)$.*

Théorème 6.10.26 *(Théorème du rang) :*

Soit f une application linéaire de E dans F, E étant de dimension finie. Alors

$$dimE = rgf + dim(kerf).$$

Preuve :

Supposons que $(e_1, e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, c'est-à-dire $dimE = n$.

Puisque $Kerf$ est un s.e.v de E, alors $0 \leq dim(Kerf) \leq n$. Soit p la dimension de $(Kerf)$

• Dans le cas ou $p = 0$: En on déduit que f est injective et la famille $\{f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)\}$ est libre et est une partie génératrice de Imf. Donc est une base de Imf. Ainsi $dim(Imf) = card\{f(e_1), \cdots, f(e_n)\} = n$. Cela montre que si $Kerf = \{0_E\}$ le théorème du rang est vrai.

• Dans le cas ou $1 \leq p \leq n$, c'est-à-dire $Kerf \neq \{0_E\}$: Soit $(v_1, v_2, \cdots, v_p)$ une base de $Kerf$. On a alors

$$f(v_1) = f(v_2) = \cdots = f(v_p) = 0_F.$$

D'après le théorème de la base incomplète, il existe $n-p$ vecteurs $v_{p+1}, v_{p+2}, \cdots, v_n$ de E tels que $(v_1, v_2, \cdots, v_p, v_{p+1}, v_{p+2}, \cdots, v_n)$ soit une base de E. Alors, D'après la proposition 6.10.15 le s.e.v Imf est engendrée par les vecteurs $f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_p), f(v_{p+1}), f(v_{p+2}), \cdots, f(v_n)$. Mais, on a $f(v_1) = f(v_2) = \cdots = f(v_p) = 0_F$, donc Imf est engendrée par $\{f(v_{p+1}), f(v_{p+2}), \cdots, f(v_n)\}$.

Montrons maintenant que ces vecteurs forment une famille libre.

Soient $\alpha_{p+1}, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha_{p+1} f(v_{p+1}) + \alpha_{p+2} f(v_{p+2}) + \cdots + \alpha_n f(v_n) = 0_F$. Puisque f est une application linéaire, on a donc $f(\alpha_{p+1}v_{p+1} + \alpha_{p+2}v_{p+2} + \cdots + \alpha_n v_n) = 0_F$. Cela montre bien que $\alpha_{p+1}v_{p+1} + \alpha_{p+2}v_{p+2} + \cdots + \alpha_n v_n \in Kerf$. Donc il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$\alpha_{p+1}v_{p+1} + \alpha_{p+2}v_{p+2} + \cdots + \alpha_n v_n = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p.$$

Comme $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ est une base de E (par hypothèse), les vecteurs $v_1, v_2, \cdots, v_n$ sont linéairement indépendants et par conséquent

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = \alpha_{p+1} = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$$

Les vecteurs $\{f(v_{p+1}), f(v_{p+2}), \cdots, f(v_n)\}$. définissent donc bien une base de Imf. Ainsi le sous-espace vectoriel Imf est de dimension $n-p$, ce qui termine la preuve. ■

Proposition 6.10.27 *:*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies tels que $dimE = dimF$ et f une application linéaire de E dans F. On a alors :

1) f est surjective $\Longleftrightarrow rgf = dimF$;

2) f est injective $\Longleftrightarrow rgf = dimE$;

3) f est bejective $\Longleftrightarrow rgf = dimE = dimF$.

De plus, on peut déduire que :

$$f \text{ est surjective } \Longleftrightarrow f \text{ est injective } \Longleftrightarrow f \text{ est bejective.}$$

Preuve :

1) La propriété de la surjectivité de f est équivalente à $Imf = F$ qui est équivalente aussi à $rgf = dim(Imf) = dimF$.

2) La propriété de l'injectivité de f est équivalente à $Kerf = 0_F$ qui est équivalente à $dim(Kerf) = 0$. D'après le théorème du rang, elle est équivalente aussi à $rgf = dimE$.

3) C'est immédiat d'après **1**) et **2**). ■

Attention $dimE = dimF$ n'implique pas que f est bejective.

Exemple 6.10.28 *:*

L'ondomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ défini par $h(x, y, z) = (x + y, y + z, x + 2y + z)$.

N'est ni injective (car $dim(kerh) \neq 0$), ni surjective (car $dim(Imh) \neq 3$).

6.11 Exercices

Dans ces exercices, l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ (resp. $\mathbb{R}[X]$) avec $n \in \mathbb{N}$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n (resp. tous les polynômes) et à coefficients réels, muni de sa structure usuelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 6.11.1 *:*

(1) On considère les applications suivantes définies de $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$*. Lesquelles sont linéaires ?*

a) $f : (x, y) \longrightarrow (x + 2y, 2xy)$,

b) $g : (x, y) \longrightarrow (x + 2y, 2xy + 1)$,

c) $h : (x, y) \longrightarrow (x + y, 2xy)$,

d) $k : (x, y) \longrightarrow (x + y, x - y^2)$.

(2) Soit l *l'application de* $\mathbb{R}_3[X]$ *dans* $\mathbb{R}_3[X]$ *définie par :* $l(P) = X^2P'' - XP' + P$.

montrer que l *est une application linéaire.*

Exercice 6.11.2 *:*

(1•) Déterminer les noyaux et les images des applications linéaires suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x + 4y, 3x - 6y). \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y + z, x - y, x - z). \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - 2y, x + y + 2z). \end{array} \qquad k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, x - y, x - z). \end{array}$$

(2•) Soit ℓ *l'application linéaire de* $R_3[X]$ *dans* $R_3[X]$ *définie par :* $\ell(P) = P + (1 - X)P'$.

Déterminer l'image de cette application.

Exercice 6.11.3 *:*

Soit l'application f *définie par :*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ x & \longmapsto & f\,(x + y, z - x, y + z, x + z)\,. \end{array}$$

1· *Montrer que* f *est une application linéaire.*

2· *Déterminer l'image et noyau de* f.

3· f *est-elle surjictive ? injictive ?.*

Exercice 6.11.4 *:*

Soient (e_1, e_2, e_3) *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *une application linéaire définie par :*

$$f\,(e_1) = e_1 + e_2 + 3e_3; \qquad f\,(e_2) = e_1 + 2e_2 + 5e_3; \qquad f\,(e_3) = e_1 - e_2 - e_3.$$

1• *Déterminer une base de* $\ker f$ *et l'autre de* Imf.

2• *Montrer que* $\ker f + Imf$ *n'est pas direct.*

3• *Considérons les vecteurs suivants*

$$u = e_1 - e_2 + e_3; \qquad v = e_1 + e_2; \qquad w = e_2 - e_3.$$

⊘ *Montrer que* $\{u, v, w\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

⊘ *Ecrire le vecteur* $f(e_1 + e_2 + e_3)$ *dans la base* $\{u, v, w\}$.

Exercice 6.11.5 *:*

Soit

$$\begin{array}{rccl} p: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & x & \longmapsto & (-2x - 3z, x + y + z, 2x + 3z). \end{array}$$

1·) *Calculer* $p(e_1), p(e_2), p(e_3)$ *et* $p^2(e_1), p^2(e_2), p^2(e_3)$.

⊕ *Comment déduisons par raport* $p^2(u)$ *quelque soit* $u \in \mathbb{R}^3$.

2·) *Déterminer une base de* Imf *et l'autre de* $\ker(p - id_{\mathbb{R}^3})$ *et montrer que* $Imf = \ker(p - id_{\mathbb{R}^3})$.

3·) *Montrer que* $\ker p \oplus Imp = \mathbb{R}^3$.

Exercice 6.11.6 *:*

Soient E_1, E_2 *deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel* E *et* h *une application définie par :*

$$\begin{array}{rccl} h: & E_1 \times E_2 & \longrightarrow & E \\ & (x, y) & \longmapsto & x + y.. \end{array}$$

1· *Montrer que* $\ker h = \{(x, -x) \in E_1 \times E_2;\ x \in E_1 \cap E_2\}$.

2· *Déterminer une base de* $\ker h$.

3· *Montrer que* $Imh = E_1 + E_2$ *et déduire que*

$$\dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2) = \dim E_1 + \dim E_2.$$

Exercice 6.11.7 *:*

Soient les applications linéaire

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (-x + y + z, x - y + z). \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} g; & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \longmapsto & (y, x, x + y). \end{array}$$

1· *Déterminer* $\ker f, Imf, \ker g, Img$ *et sons dimensions*

Exercice 6.11.8 *:*

Soit f *l'application de* $\mathbb{R}_2[X]$ *dans* $\mathbb{R}_2[X]$ *définie par :* $f(P) = 2(X+1)P' - (X^2 - 2X + 1)P'$ *où* P'

désigne le polynôme dérivé de P.

1) Montrer que f *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Montrer que $\mathcal{B} = \left(1, X+1, (X-1)^2\right)$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.

3) Déterminer Imf *et* $Kerf$.

Exercice 6.11.9 *:*

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* 3 *et* $B = (e_1, e_2, e_3)$ *une base de* E.

On pose $u = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ *et* $v = e_2 + e_3$. *Montrer que la famille* (u, v) *est libre et compléter celle-ci en une base de* E.

Exercice 6.11.10 *:*

Soi E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel muni de la base* $B = (e_1, \cdots, e_n)$.

Pour tout $i \in 1, \cdots, n$, *on pose* $u_i = \sum_{k=1}^{i} e_k$.

(a) Montrer que $B' = (u_1, \cdots, u_n)$ *est une base de* E.

(b) Exprimer les composantes dans B*' d'un vecteur* w *de* E *en fonction de ces composantes dans* B.

Exercice 6.11.11 *:*

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* 2 *muni d'une base* $\mathcal{B} = (u, v)$ *et* α *un réel. On considère l'endomorphisme* f_α *de* E *défini par :*

$$\begin{cases} f_\alpha(u) & = (\alpha+1)\, u + \alpha v \\ f_\alpha(v) & = (\alpha-1)\, u + (\alpha+1)\, v. \end{cases}$$

1 Pour quelle(s) valeur(s) de* α, f_α *est-il bejective ?*

2 Déterminer* $Kerf$ *et* Imf *suivant les valeurs de* α.

3 Rechercher les invariants*[1] *de* f_α *noté* $Invf_\alpha$.

Exercice 6.11.12 *:*

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension quelconque et* f *est un endomorphisme de* E *verifiant l'égalité suivante* (E) : $f^{\circ 2} = -f$, *où* $f^{\circ 2} = f \circ f$.

1) Montrer que :* $\forall x \in E;\ f(x) + x \in Kerf$.

2) Trouver les valeurs de* α *tels que l'application* $\alpha.Id_E$ *est un solution de l'equation* (E).

3) En supposant que* $f \neq \alpha.Id_E$, *montrer qu'il existe* $x_0 \in E$ *tel que* $f(x_0) + x_0 \neq 0_E$. *En deduire que* f *n'est pas injective.*

4) Montrer que* $E = Imf \oplus Kerf$.

1. $Invf_\alpha$ est l'ensemble des vecteurs x de E tels que $f_\alpha(x) = x$.

Bibliographie

[1] Arnaud Bodin, Marc Bourdon, Sophie Chemla (L'équipe Exo7), *ALGEBRE. COURS DE MATH ?MATIQUES PREMIÈRE ANNÉE*, université de Lille 1, Version 1.00 Ű Janvier 2016.

[2] Arnaud Bodin, Léa Blanc-Centi, Niels Borne, Benjamin Boutin, Laura Desideri et Pascal Romon, *ANALYSE. COURS DE MATHÉMATIQUES PREMIÈRE ANNÉE*, université de Lille 1, Version 1.00 Ű Janvier 2016.

[3] ATTAR Ahmed, MIRI Sofiane Elhadi, *Algèbre et Analyse Recueil d'Exercices Corrigés*,Faculté des Sciences Département de Mathématiques, Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen. 8 mars 2018 .

[4] Bernard Ycart, *Développements limités*,Université Joseph Fourier, Grenoble.

[5] L. Brandolese, M-A. Dronne, *ALGEBRE LINÉAIRE Cours et exercices*, ISPB, Faculté de Pharmacie de Lyon Filière ingénieur , Année 2014 - 2015.

[6] Bruno Vallette, *L'ALGÈBRE LINÉAIRE POUR TOUS*, Laboratoire J.A.Dieudonné, Université de Nice Sophia-Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02, France. Version du October 8, 2015.

[7] david Delaunay, *Cours mathématiques MPSI* , http ://mp.cpgedupuydelome.fr. 26 août 2013.

[8] david Delaunay, *Algèbre linéaire 1 : Résumé de cours*, Université de Bordeaux Licence de Sciences, Technologies, Santé Mathématiques, Informatique, Sciences de la Matière et Ingénierie. Version du 25 avril 2017.

[9] Cl. Gabriel, *Mathématiques avancées* , http ://ww3.ac-poitiers.fr/math/mol/mole.htm, 2015-2016.

[10] HITTA Amara, *Cours Algèbre et Analyse I et Exercices Corrigés*, Universitťe 8 Mai 1945 - Guelma.

[11] B. Landreau, D. Schaub, *Notes de Cours d'ALGEBRE LINEAIRE.*, Département de Mathématiques Université d'Angers.

[12] Stéphane Balac, Frédéric Sturm, *Algebre et analyse. Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés* , Collection des sciences appliquées de l'INSA de Liyon. Juillet (2003).

[13] Xavier Dussau, Jean Esterle, Fouad Zarouf et Rachid Zarouf *ESTIA 1e Année-Mathématiques Cours d'algèbre linéaire Edition 2008* , Collection des sciences appliquées de l'INSA de Liyon. 26 novembre 2008.