RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF

Faculté d'Architecture et de Génie Civil

Département de Génie Civil

Polycopié intitulé :

Recueil d'exercices corrigés sur les méthodes numériques

Élaboré par :

Mme BOUALLA Nabila (Docteur en Génie Civil / Option Géotechnique- Matériaux, U.S.T.O)

Sommaire :

Avant-propos :

L'analyse numérique est une discipline qui étudie les méthodes de résolution de certains problèmes de mathématiques issus de la modélisation des problèmes réels. Donc, à proposer des méthodes d'approximation et de résolution qui soient à la fois efficaces et robustes allant de la discrétisation des équations aux dérivées partielles, de leur approximation numérique jusqu'à la résolution de systèmes non-linéaires.

Ce document propose un recueil d'exercices corrigés d'analyse numérique, adressé aux étudiants de 2ème année licence LMD Sciences et Techniques et se propose de familiariser les étudiants avec les notions de base de l'analyse numérique. Le document est composé de cinq chapitres consacrés aux différentes méthodes de résolution des équations. J'espère que les étudiants trouveront dans cet ouvrage un support pour maitriser les fondements des méthodes numériques.

CHAPITRE 1

Résolution des équations non linéaires $f(x)=0$

1.1- La résolution de l'équation f(x)=0 par la méthode de Dichotomie

Rappel

Soit $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(a).f(b) < 0$, alors il existe au moins un $\bar{x} \in]a,b[$ tel que $f(\bar{x}) = 0$.

Si f est strictement monotone $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ $\forall x \in [a,b]$ $\rightarrow f$ admet une racine unique.

On pose $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$:

- si $f(x_0).f(a) = 0$; alors x_0 est la solution ; sinon on vérifie :

- si $f(x_0).f(a) > 0 \rightarrow a_1 = x_0;\ b_1 = b_0$

- si $f(x_0).f(a) < 0 \rightarrow a_1 = a_0;\ b_1 = x_0$

$x_{i+1} = \frac{a_i+b_i}{2}$

- si $f(x_i).f(a_i) > 0 \rightarrow a_{i+1} = x_i;\ b_{i+1} = b_i$

- si $f(x_i).f(a_i) < 0 \rightarrow a_{i+1} = a_i;\ b_{i+1} = x_i$

Le critère d'arrêt :

Pour trouver la solution de l'équation $f(x) = 0$ dans un intervalle donné $[a,b]$ avec un critère d'arrêt ε et le nombre maximum d'itération N tel que :

$$N \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{\ln 2} + 1$$

Ou : $|x_{i+1} - x_i| \leq \varepsilon$

Exercice 1-1 :

On considère la fonction $f : f(x) = x^2 e^x - 1 = 0$.

1. Trouver un intervalle [a-b], contenant la solution de la fonction *f*.
2. Calculer la solution approchée de f avec une précision de $= 10^{-2}$.

Solution :

1- Théorème des valeurs intermédiaires :

$\mathrm{D_f} = R$

$f(x) = x^2 e^x - 1$

$f'^{(x)} = 2x\, e^x + x^2 e^x = x\, e^x\,(2 + x)$

Tableau 1 : Tableau de variation de la fonction $f(x)$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+		-		+	
f(x)	$-\infty$	↗	-0.4587 -0.4587	↘	-1 -1	↗	$+\infty$

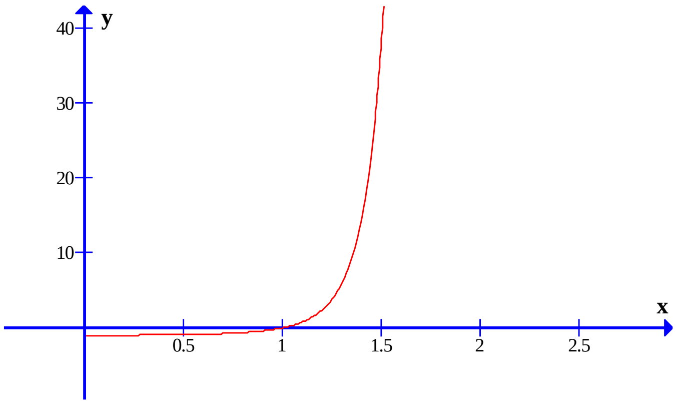

Figure 1 : Le graphe de de la fonction $f(x)$

[a – b] = [0 - 2]

- Sur [0 – 2], *f*(x) est définie, continue et monotone.
- Existence de la solution :

$$f(a) * f(b) = f(0) * f(2) = (-1) * 28.57 = \ -28.57 \ < 0$$

<u>Conclusion : *f*(x)</u> admet une solution unique sur [0 – 2]

1- <u>Calcul de la solution approchée : Calcul de la solution approchée :</u>

Tableau 2 : Tableau des valeurs des extrémités a_i et b_i des intervalles et des milieux x_i

i	a_i	b_i	x_i	$f(a_i) * f(x_i)$	$\vert x_{i+1} - x_i \vert$
0	0	2	1	-1.7183	
1	0	1	0.5	0.5878	$0.5>10^{-2}$
2	0.5	1	0.75	-0.11212	$0.25>10^{-2}$
3	0.5	0.75	0.625	0.1588	$0.125>10^{-2}$
4	0.625	0.75	0.6875	0.0162	$0.0625>10^{-2}$
5	0.6875	0.75	0.7188	-0.0036	$0.0313>10^{-2}$
6	0.6875	0.7188	0.7031	0.0001	$0.0156>10^{-2}$
7	0.7031	0.7188	0.7109	0.0000	$0.0078<10^{-2}$

La solution approchée est : $\hat{x} = 0.7109$

La solution exacte est : 0.7109 ± 10^{-2}

Exercice 1-2 :

On considère la fonction *f*(x) : $f(x) = x - 0.2\,sin\,x - 0.5 = 0$. Résoudre la fonction sur [0 - π] avec une précision de $\varepsilon = 10^{-2}$:

Solution :

1- Existence et unicité :

a) *f* est définie et continue sur [0 - π].

b) $f(0) * f(\pi) = (-0.5) * (2.64) = -2.64 < 0$

Conclusion : f admet une solution sur [0 - π].

c) *f* est croissante sur [0 - π], donc elle admet une solution unique sur [0 - π].

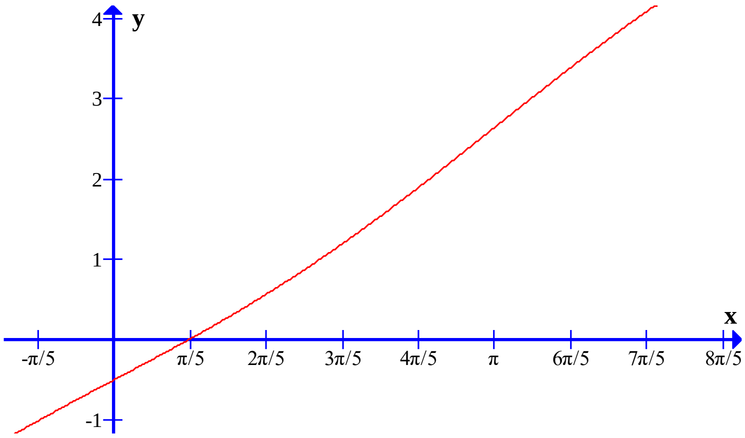

Figure 2 : Le graphe de de la fonction f(x)

2- Calcul de la solution approchée :

Tableau 3 : Tableau des valeurs des extrémités a_i et b_i des intervalles et des milieux x_i

i	a_i	b_i	x_i	$f(a_i) * f(x_i)$	$\|x_{i+1} - x_i\|$
0	0	π	1.57	-1.22	
1	0	1.57	0.785	-0.4643	$0.785>10^{-2}$
2	0	0.785	0.3925	-0.1043	$0.3925>10^{-2}$
3	0	0.3925	0.19625	0.0732	$0.1963>10^{-2}$
4	0.1963	0.3925	0.2944	0.0567	$0.0982>10^{-2}$
5	0.2944	0.3925	0.34343	0.0461	$0.0490>10^{-2}$
6	0.3434375	0.3925	0.3680	0.0402	$0.0246>10^{-2}$
7	0.3680	0.3925	0.3802	0.0370	$0.0122>10^{-2}$
8	0.3802	0.3925	0.3864	0.0355	$0.0062<10^{-2}$

La solution approchée est : $\hat{x} = 0.3864$

La solution exacte est : 0.3864 ± 10^{-2}

Exercice 1-3 :

On considère la fonction *f*(x) : $f(x) = x^4 + x - 1 = 0$. Résoudre la fonction sur [-2 , 0] avec une précision de $\varepsilon = 10^{-2}$:

Solution :

1- Existence et unicité :

a) f est définie et continue sur [-2 , 0].

b) $f(-2) * f(0) = (13) * (-1) = -13 < 0$

Conclusion : f admet une solution sur [-2 , 0].

c) f est décroissante sur [-2 , 0], donc elle admet une solution unique sur [-2 , 0].

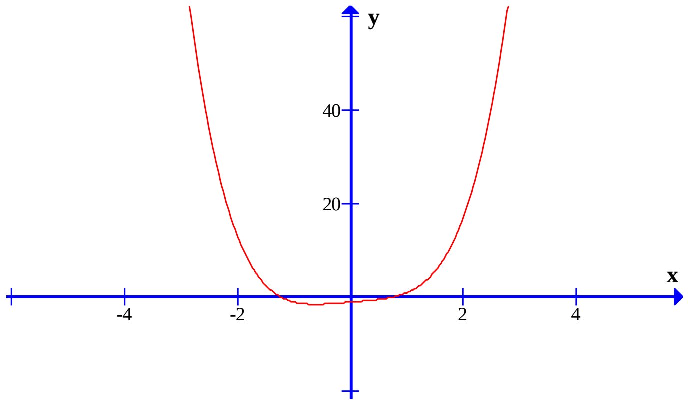

Figure 3 : Le graphe de de la fonction $f(\mathrm{x})$

2- Calcul de la solution approchée :

Tableau 4 : Tableau des valeurs des extrémités a_i et b_i des intervalles et des milieux x_i

i	a_i	b_i	x_i	$f(a_i) * f(x_i)$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	-2	0	-1	-13	
1	-2	-1	-1.5	33.3125	$0.5 > 10^{-2}$
2	-1.5	-1	-1.25	0.4905	$0.25 > 10^{-2}$
3	-1.25	-1	-1.125	-0.1001	$0.125 > 10^{-2}$
4	-1.25	-1.125	-1.1875	-0.0381	$0.0625 > 10^{-2}$
5	-1.25	-1.1875	-1.2188	-0.0024	$0.0313 > 10^{-2}$
6	-1.25	-1.2188	-1.2344	0.0167	$0.0156 > 10^{-2}$
7	-1.2344	-1.2188	-1.2266	0.0032	$0.0078 < 10^{-2}$

La solution approchée est : $\hat{x} = -1.2266$

La solution exacte est : -1.2266 $\pm 10^{-2}$

Exercice 1-4 :

Soit la fonction : $f(x) = 2\,tgx - x - 1 = 0,\, x \in [-\pi, +\pi]$

1- Séparer analytiquement les racines de cette équation.

2- Donner le nombre d'itérations nécessaires pour approcher la solution à 10^{-3}.

Solution :

1- $f(x) = 2\,tgx - x - 1 = 0,$

$D_f = \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\sqcup \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\sqcup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

$\lim_{x\to -\pi} f(x) = 2.14$; $\lim_{x\to \pi} f(x) = -4.14$; $\lim_{x\to <-\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to >-\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$;

$\lim_{x\to <\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to >\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$

$$f'(x) = \frac{2}{cos^2x} - 1$$

$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{2}{cos^2x} = 1 \rightarrow cos^2x = 2$

$$-1 \le \cos x \le 1 \rightarrow 0 \le \cos x \le 1 \rightarrow \frac{1}{cos^2x} \ge 1 \rightarrow \frac{2}{cos^2x} \ge 2 \rightarrow \frac{2}{cos^2x} - 1 \ge 1$$

$$f'(x) > 0\ \forall\, x \in D_f$$

Tableau 5 : Tableau de variation de la fonction $f(\mathrm{x})$

x	$-\pi$ $\quad$ $\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$ $\quad$ $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ $\quad$ π
$f'(x)$	+	+	+
$f\ (x)$	$2.14 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow$ -4.14

- $x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ $f(-\pi) * f\left(-\frac{\pi}{2}\right) > 0$ et $f'(x) > 0 \rightarrow \nexists$racine dans cet intervalle.
- $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) * f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ et $f'(x) > 0 \rightarrow \exists$ une seule racine dans cet intervalle.
- $x \in \left[+\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ $f\left(\frac{\pi}{2}\right) * f(\pi) > 0$ et $f'(x) > 0 \rightarrow \nexists$racine dans cet intervalle.

2- Donc : $f(x) = 0$ admet une racine unique dans l'intervalle $]-\pi, +\pi[$

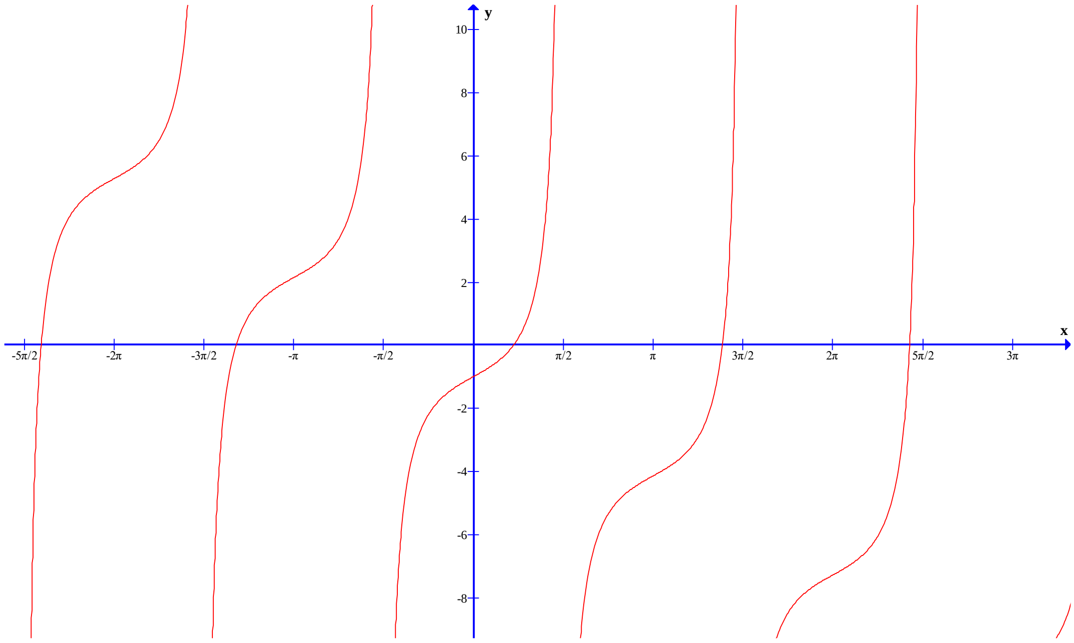

Figure 4 : Le graphe de de la fonction $f(\mathrm{x})$

On prend l'intervalle $[0-1]$

a) f est définie et continue sur [0 - 1].

b) $f(0) * f(1) = (-1) * (1.1148) = -1.1148 < 0$

Conclusion : f admet une solution sur [0 - 1].

c) f est croissante sur [0 - 1], donc elle admet une solution unique sur [0 - 1].

d) Calcul de la solution approchée :

Tableau 6 : Tableau des valeurs des extrémités a_i et b_i des intervalles et des milieux x_i

i	a_i	b_i	x_i	$f(a_i) * f(x_i)$	$\|x_{i+1} - x_i\|$
0	0	1	0.5	0.4074	
1	0.5	1	0.75	-0.0461	0.25 >10^{-3}
2	0.5	0.75	0.625	0.0742	0.125>10^{-3}
3	0.625	0.75	0.6875	0.0082	0.0625>10^{-3}
4	0.6875	0.75	0.7188	-0.0014	0.0313>10^{-3}
5	0.6875	0.7188	0.7031	0.0004	0.0157>10^{-3}
6	0.7031	0.7188	0.7109	-0.0001	0.0078>10^{-3}
7	0.7031	0.7109	0.7070	0.0000	0.0039>10^{-3}
8	0.7031	0.7070	0.7051	0.0000	0.0019>10^{-3}
9	0.7051	0.7070	0.7061	0.0000	0.001>10^{-3}
10	0.7061	0.7070	0.7066	0.0000	0.0005<10^{-3}

La solution approchée est : $\hat{x} = 0.7066$

La solution exacte est : 0.7066$\pm 10^{-3}$

Exercices non corrigés :

Exercice 1-5 :

Sur l'intervalle [2 - 3] , décrire la méthode de la dichotomie pour calculer la solution de la fonction : $f(x) = x^4 - 3x - 8.95$, avec une précision : $\varepsilon = 10^{-2}$.

Exercice 1-6 :

Soit : $R \to R$, définie par $f(x) = x^3 - 3x + 1$

- Vérifier que $f(x) = 0$ admet une racine dans [0 – 0.5] .
- Calculer le nombre d'itérations pour que l'erreur commise avec la méthode de dichotomie soit inférieure à 10^{-2}.
- Trouver alors une valeur approchée de la racine de $f(x)$ dans [0 – 0.5] avec cette précision.

1.2- La résolution de l'équation *f* (x)=0 par la méthode du point fixe

Rappel

On transforme le problème $f(x) = 0$ en $g(x) = x$.

On dit que $\bar{x}$ en est un point fixe de $g(x)$; si $g(\bar{x}) = \bar{x}$.

Pour trouver la solution de l'équation $g(x) = x$ avec un critère d'arrêt ε et une valeur initiale x_0 refaire les étapes ci-dessous :

1- $x_{n+1} = g(x_n)$.

2- $Si\ |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, la solution est x_{n+1} . Sinon continuer.

3-Remplacer x_n par x_{n+1} et retourner à 1.

-Cette méthode converge et possède une solution unique lorsque :

$\forall x \in [a, b]$, $g(x) \in [a, b]$. Et , $g'(x)$ est définie et continue.

Si : $\left|g'(x)_{x \in [a,b]}\right| < 1$ Alors la méthode est convergente .

Exercice 1-7 :

Soit la fonction : $f(x) = x(1 + e^x) - e^x$=0.

On se propose de trouver les racines réelles de *f* par la méthode des approximations successives sur [0.5 - 1].

Solution :

1- Existence et unicité :

a) *f* est définie et continue sur [0.5 - 1].

b) $f(0.5) * f(1) = (-0.324) * (1) = -0.324 < 0$

Conclusion : *f* admet une solution sur [0.5 - 1].

c) *f* est croissante sur [0.5 - 1], donc elle admet une solution unique sur [0.5 - 1].

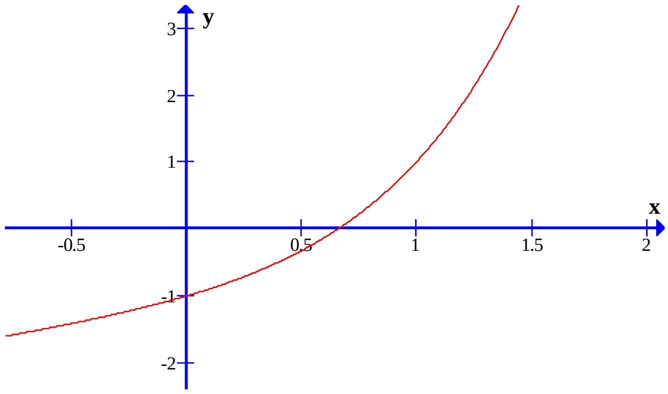

Figure 5 : Le graphe de de la fonction $f(\mathrm{x})$

2- Condition de convergence :

$f(x) = x(1 + e^x) - e^x = 0 \Rightarrow x = g(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)}$

Étude de la conctractance :

$g(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)}$

$$g'(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$$

$Max|g'(x)| = Max|g'(0.5), g'(1)| = Max|(0.23), (0.196)| = 0.23 < 1$

Conclusion : $g(x)$ conctractante sur [0.5 - 1].

Stabilité de $g(x)$:

$g(x)$ est croissante sur [0.5 - 1] $\Rightarrow g([a, b]) = [g(a), g(b)] \in [a, b]$

$$\Rightarrow g([0.5 - 1]) = [g(0.5), g(1)] = [0.62 - 0.73] \in [0.5 - 1]$$

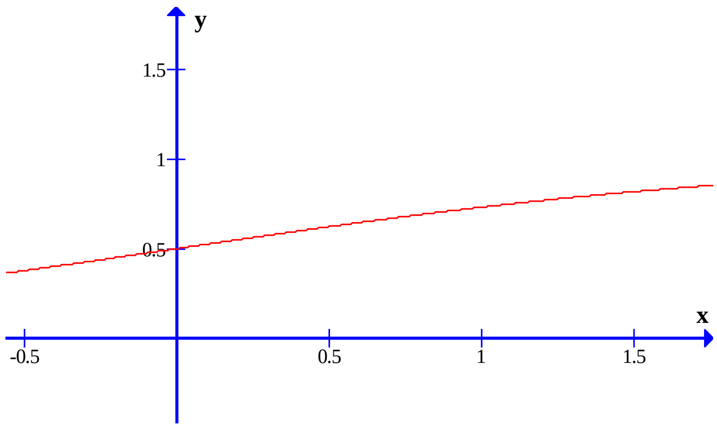

Figure 6 : Le graphe de de la fonction $g(\mathrm{x})$

Conclusion : g est stable sur $[0.5 - \ 1]$

1- Calcul de la solution approchée :

Tableau 7 : Tableau des itérés x_i du point fixe pour $x_0 = 0.5$

i	x_i	$g(x_i) = \frac{e^{x_i}}{(1+e^{x_i})}$
0	0.5	0.6225
1	0.6225	0.6508
2	0.6508	0.6572
3	0.6572	0.6586
4	0.6586	0.6590
5	0.6590	0.6590
6	0.6590	0.6590
7	0.6590	0.6590
8	0.6590	0.6590

La solution approchée est : $\hat{x} = \ 0.6590$

Exercice 1-8 :

Soit la fonction : $f(x) = \sin\left(-\frac{1}{2-x}\right) - x$=0.

On se propose de trouver les racines réelles de f $f(x)$ par la méthode des approximations successives sur [-1, 1], avec une précision de : $\varepsilon = \ 10^{-4}$

Solution :

1- Existence et unicité :

a) f est définie et continue sur [-1,1].

b) $f(-1) * f(1) = (0.68) * (-1.84) = -1.25 < 0$

Conclusion : f admet une solution sur [-1,1].

c) f est décroissante sur [-1,1], donc elle admet une solution unique sur [-1,1].

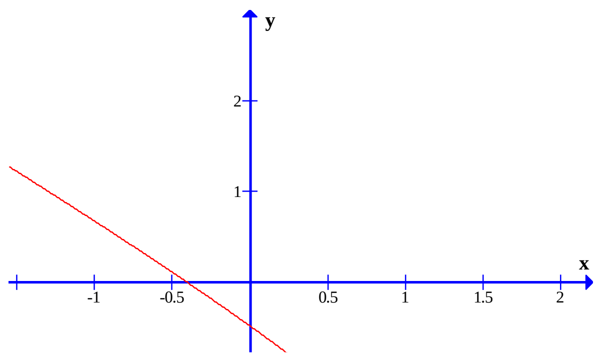

Figure 7 : Le graphe de de la fonction $f(\mathrm{x})$

2- Condition de convergence :

$f(x) = \sin\left(-\frac{1}{2-x}\right) - x=0 \Rightarrow \; x = g(x) = \sin\left(-\frac{1}{2-x}\right)$

Étude de la conctractance :

$g(x) = \sin\left(-\dfrac{1}{2-x}\right)$

$$g'^{(x)} = \left(-\frac{1}{(2-x)^2}\right)\cos\left(-\frac{1}{2-x}\right)$$

$Max|g'(x)| = Max|\, g'(-1), g'\,(1)| = Max|\,(-0.105), (-0.540)| = 0.54<1$

Conclusion : $g(x)$ conctractante sur [-1,1].

Stabilité de $g(x)$:

$g(x)$ est décroissante sur [-1,1] $\Rightarrow g([a,b]) = [g(b), g(a)] \in [a,b]$

$\Rightarrow [g(1), g(-1)] = [-0.84, -0.33] \in \; [-1,1]$

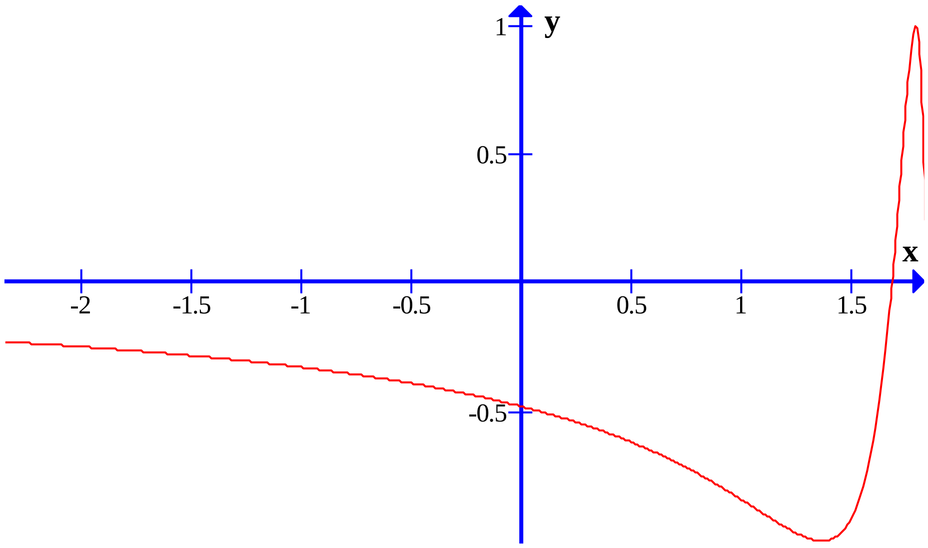

Figure 8 : Le graphe de de la fonction g(x)

Conclusion : g est stable sur $[-1,1]$

3- Calcul de la solution approchée :

Tableau 8 : Tableau des itérés x_i du point fixe pour $x_0 = -1$

i	x_i	$g(x) = \sin\left(-\frac{1}{2-x}\right)$	$\lvert x_{i+1} - x_i\rvert$
0	-1	-0.32719	0.67281>10^{-4}
1	-0.32719	-0.41660	0.08941>10^{-4}
2	-0.41660	-0.40210	0.01450>10^{-4}
3	-0.40210	-0.40438	0.00229>10^{-4}
4	-0.40438	-0.40402	0.00036>10^{-4}
5	-0.40402	-0.40408	0.00006 <10^{-4}

La solution approchée est : $\hat{x} = -0.40408$.

La solution exacte est : -0.40408$\pm 10^{-4}$

Exercice 1-9 :

Soit la fonction : $f(x) = \cos(x) - x$ =0.

On se propose de trouver les racines réelles de f par la méthode des approximations successives sur [0 - 2], avec une précision de : $\varepsilon = 10^{-2}$

Solution :

1- Existence et unicité :

a) f est définie et continue sur [0 - 2].

b) $f(0) * f(2) = (1) * (-2.42) = -2.42 < 0$

Conclusion : f admet une solution sur [0 - 2].

c) f est décroissante sur [0 - 2], donc elle admet une solution unique sur [0 - 2].

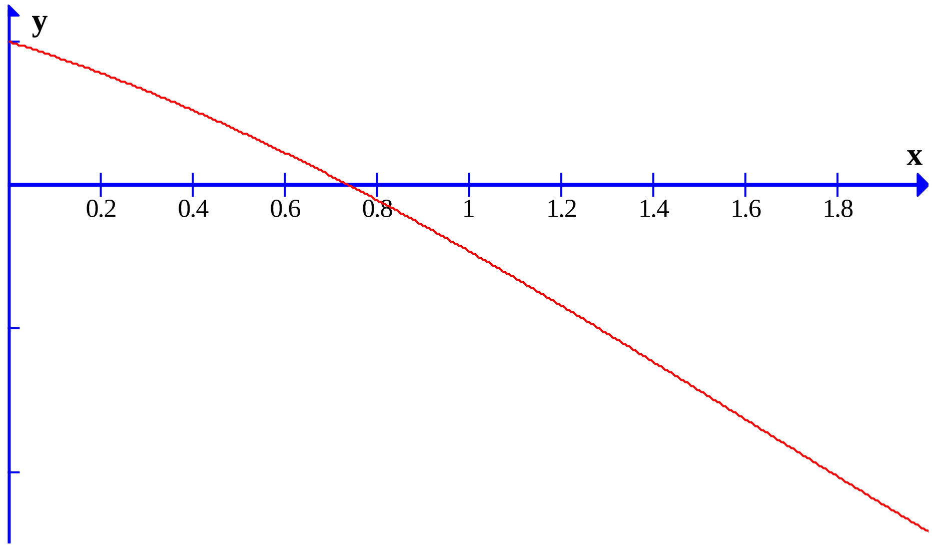

Figure 9 : Le graphe de de la fonction $f(x)$

2- Condition de convergence :

$f(x) = \cos(x) - x$=0$\Rightarrow$ $x = g(x) = \cos(x)$

Étude de la conctractance :

$g(x) = \cos(x) \rightarrow g'^{(x)} = -\sin(x)$

$Max|g'(x)|$ = $Max|g'(0), g'(2)|$ = $Max|(0), (-0.9)| = 0.9 < 1$

Conclusion : $g(x)$ conctractante sur [0 - 2].

Stabilité de $g(x)$:

$g(x)$ est décroissante sur [0,2] $\Rightarrow [g(2), g(0)] = [-0.42,1] \notin [0 - 2]$

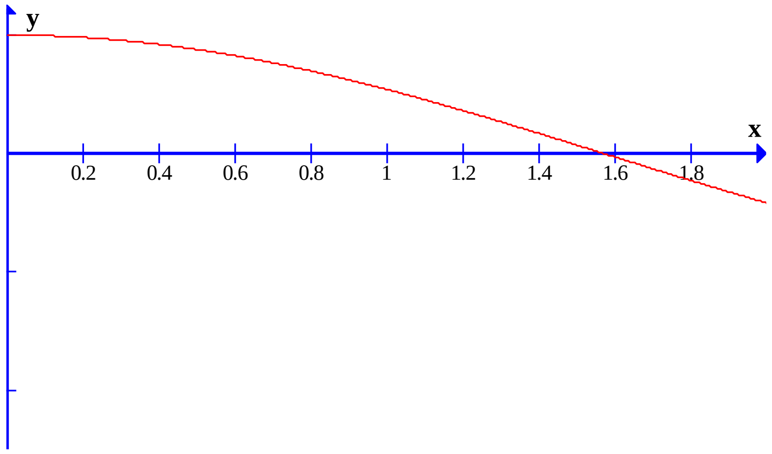

Figure 10 : Le graphe de de la fonction $g(\mathrm{x})$

Conclusion : g est non stable sur $[0 - 2]$

3- Changement d'intervalle : On prend [a,b] = [0 - 1]

a) f est définie et continue sur [0 - 1].

b) $f(0) * f(2) = (1) * (-0.46) = -0.46 < 0$

Conclusion : f admet une solution sur [0 - 1].

c) f est décroissante sur [0 - 1], donc elle admet une solution unique sur [0 - 1].

Condition de convergence :

$f(x) = \cos(x) - x$=0 $\Rightarrow x = g(x) = \cos(x)$

Étude de la conctractance :

$g(x) = \cos(x) \rightarrow g'^{(x)} = -\sin(x)$

$Max|g'(x)| = Max|g'(0), g'(1)| = Max|(0), (-0.84)| = 0.84 < 1$

Conclusion : $g(x)$ conctractante sur [0 - 1].

Stabilité de $g(x)$:

$g(x)$ est décroissante sur [0,1] $\Rightarrow [g(1), g(0)] = [0.54,1] \in [0 - 1]$

Conclusion : g est stable sur $[0 - 1]$

4- Calcul de la solution approchée :

La solution approchée est : $\hat{x} = 0.7356$.

La solution exacte est : 0.7356$\pm 10^{-2}$

Tableau 9 : Tableau des itérés xi du point fixe pour $x_0 = 0$

i	x_i	$g(x) = \sin\left(-\frac{1}{2-x}\right)$	$\|x_{i+1} - x_i\|$
0	0	1	
1	1	0.5403	0.4597>10^{-2}
2	0.5403	0.8576	0.3173>10^{-2}
3	0.8576	0.6543	0.2033>10^{-2}
4	0.6543	0.7935	0.1392>10^{-2}
5	0.7935	0.7014	0.0921>10^{-2}
6	0.7014	0.7640	0.0626>10^{-2}
7	0.7640	0.7221	0.0419>10^{-2}
8	0.7221	0.7504	0.0283>10^{-2}
9	0.7504	0.7314	0.0192>10^{-2}
10	0.7314	0.7442	0.0128>10^{-2}
11	0.7442	0.7356	0.0086<10^{-2}

Exercice 1-10 :

Soit la fonction : $f(x) = e^x + 3\sqrt{x} - 2$=0.

On se propose de trouver les racines réelles de *f* par la méthode des approximations successives sur [0 - 0.75], avec une précision de : $\varepsilon = 10^{-4}$

Solution :

1- Existence et unicité :

a) *f* est définie et continue sur [0 – 0.75].

b) $f(0) * f(0.75) = (-1) * (2.72) = -2.72 < 0$

Conclusion : f admet une solution sur [0 – 0.75].

c) *f* est croissante sur [0,1], donc elle admet une solution unique sur [0 – 0.75].

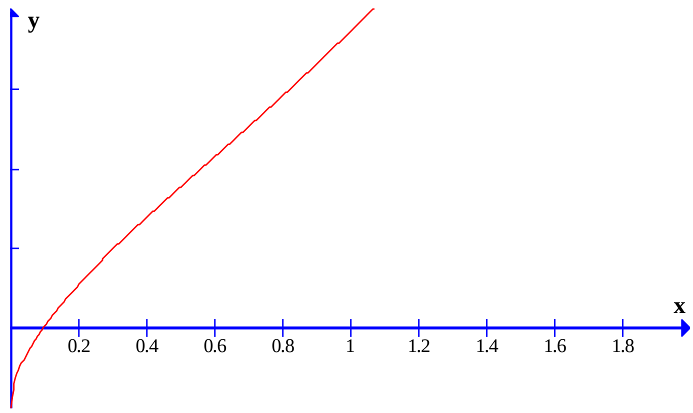

Figure 11 : Le graphe de de la fonction $f(\mathrm{x})$

<u>2- Condition de convergence :</u>

$f(x) = e^x + 3\sqrt{x} - 2$-=0

$\Rightarrow\ x = g_1(x) = \ln(2 - 3\sqrt{x})$

$\Rightarrow\ x = g_2(x) = \frac{(2-e^x)^2}{9}$

<u>Étude de la conctractance</u> :

$\rightarrow g_1(x) =\ \ln(2 - 3\sqrt{x})$

$$g_1'^{(x)} = -\frac{3}{4\sqrt{x} - 6x}$$

$Max|g_1'\ (x)|$ = $Max|g_1'\ (0), g_1'\ (0.75)|$ = $Max\left|\left(\frac{3}{0}\right), (-2.9)\right|$

<u>Conclusion :</u> $g_1(x)$ est non conctractante sur [0 – 0.75].

$\rightarrow g_2(x) =\ \frac{(2-e^x)^2}{9}$

$$g_2'^{(x)} = \frac{2}{9}\ (-e^x)(2 - e^x)$$

$Max|g_2'\ (x)|$ = $Max|g_2'\ (0), g_2'\ (0.75)|$ = $Max|\ (-0.22), (0.055)| = 0.22 < 1$

<u>Conclusion :</u> $g_2(x)$ est conctractante sur [0 – 0.75].

<u>Stabilité de $g_2(x)$:</u>

$g_2(x)$ est décroissante sur [0 - 0.75]

$\Rightarrow [g_2(0.75), g_2(0)] = [0.0015 - 0.11] \in\ [0 - 0.75]$

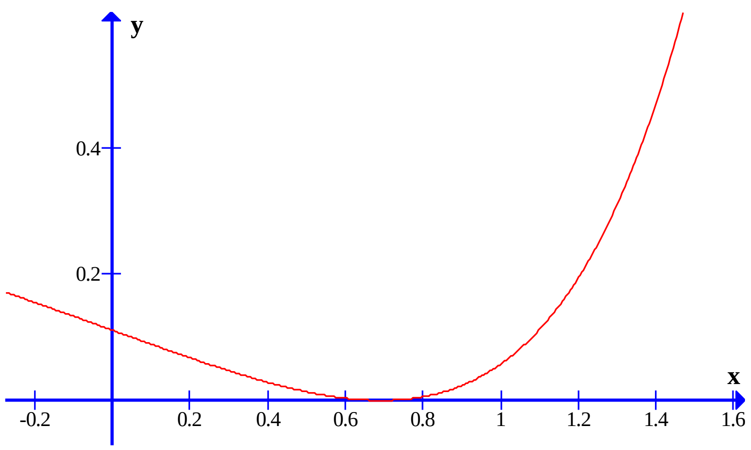

Figure 12 : Le graphe de de la fonction g_2(x)

<u>Conclusion :</u> g_2 est stable sur $[0 - 0.75]$

2- Calcul de la solution approchée :

Tableau 10 : Tableau des itérés xi du point fixe pour $x_0 = 0$

i	x_i	$g_2(x) = \frac{(2-e^x)^2}{9}$	$\|x_{i+1} - x_i\|$
0	0	0.11111	0.11111>10^{-4}
1	0.11111	0.08653	0.02458>10^{-4}
2	0.08653	0.09193	0.0054>10^{-4}
3	0.09193	0.09074	0.00119>10^{-4}
4	0.09074	0.09101	0.00027>10^{-4}
5	0.09101	0.09095	0.0001>10^{-4}
6	0.09095	0.09096	0.00001<10^{-4}

La solution approchée est : $\hat{x} = 0.09096$.

La solution exacte est : 0.09096$\pm 10^{-4}$

Exercice 1-11 :

Soit la fonction : $f(x) = \frac{e^{-x}-x^2}{4}$=0.

On se propose de trouver les racines réelles de *f* par la méthode des approximations successives sur [0 - 1] ; avec une précision de : $\varepsilon = 10^{-2}$

Solution :

1- Existence et unicité :

a) *f* est définie et continue sur [0 – 1].

b) $f(0) * f(1) = (0.25) * (-0.16) = -0.04 < 0$

Conclusion : f admet une solution sur [0 – 1].

c) *f* est décroissante sur [0 - 1], donc elle admet une solution unique sur [0 – 1].

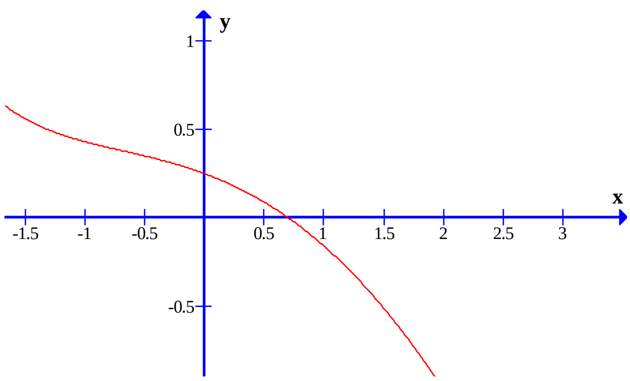

Figure 13 : Le graphe de de la fonction f(x)

2- Condition de convergence :

$f(x) = \frac{e^{-x}-x^2}{4}$ =0

$\Rightarrow\ x + \frac{e^{-x}-x^2}{4} = x$

$\Rightarrow\ x = g(x) = x + \frac{e^{-x}-x^2}{4}$

Étude de la conctractance :

$\rightarrow\ \ g(x) = x + \dfrac{e^{-x} - x^2}{4}$

$$g'^{(x)} = 1 + \frac{(-e^{-x} - 2x)}{4}$$

$Max|g'(x)|$ = $Max|g'\ (0), g'\ (1)|$ = $Max|\ (0.75), (0.4)| = 0.75 < 1$

Conclusion : $g(x)$ est conctractante sur [0 – 1].

Stabilité de $g(x)$:

$g(x)$ est croissante sur [0 - 1] $\Rightarrow [g(0), g(1)] = [0.25 - 0.84] \in\ [0 - 1]$

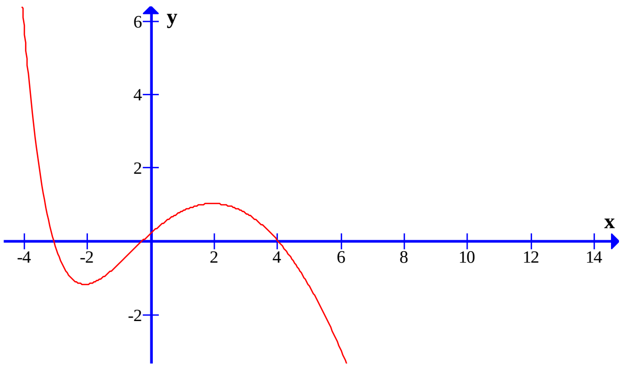

Figure 14 : Le graphe de de la fonction g(x)

Conclusion : g est stable sur $[0 - 1]$

5- Calcul de la solution approchée :

Tableau 11 : Tableau des itérés xi du point fixe pour $x_0 = 0$

i	x_i	$g_2(x) = \dfrac{(2-e^x)^2}{9}$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	0	0,25	0,25>10^{-2}
1	0.25	0.4291	0.1791>10^{-2}
2	0.4291	0.5458	0.1168>10^{-2}
3	0.5458	0.6162	0.0704>10^{-2}
4	0.6162	0.6563	0.0401>10^{-2}
5	0.6563	0.6783	0.0220>10^{-2}
6	0.6783	0.,6901	0.0119>10^{-2}
7	0.6901	0.6964	0.0063<10^{-2}

La solution approchée est : $\hat{x} = 0.6964$.

La solution exacte est : 0.6964 ± 10^{-2}

Exercice 1-12 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{x-1}\sqrt{x^2+1}; x \neq 1$

1- Montrer que $f'(x) = \frac{P(x)}{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}}; x \neq 1$; ou $P(x)$ est un polynôme de degré 3 à déterminer.

2- Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une racine réelle α et une seule dans tout R et que $\alpha \in]2-3[$.

3- On écrit $f'(x) = 0$ sous la forme équivalente $x = g(x) = (2x^2+1)^{1/3}$ pour $x \in [2-3]$. Montrer que l'itération $x_{n+1} = g(x_n) = (2x^2+1)^{1/3}; x \in]2-3[$.

4- Pour $x_0 = 2.5$; quel est le nombre d'itérations à effectuer pour atteindre la précision $|x_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.

Solution :

1- $f(x) = \frac{x}{x-1}\sqrt{x^2+1}; x \neq 1$

$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}\sqrt{x^2+1} + \frac{x}{x-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^3-2x^2+1}{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}} = \frac{P(x)}{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}}; x \neq 1$

2- Existence et unicité :

a) f' est définie et continue sur $]2-3[$.

b) $f'(2) * f'(3) = (-0.45) * (0.63) = -0.71 < 0$

Conclusion : f admet une solution α sur $]2-3[$.

c) f' est croissante sur $]2-3[$, donc elle admet α une solution unique sur $]2-3[$.

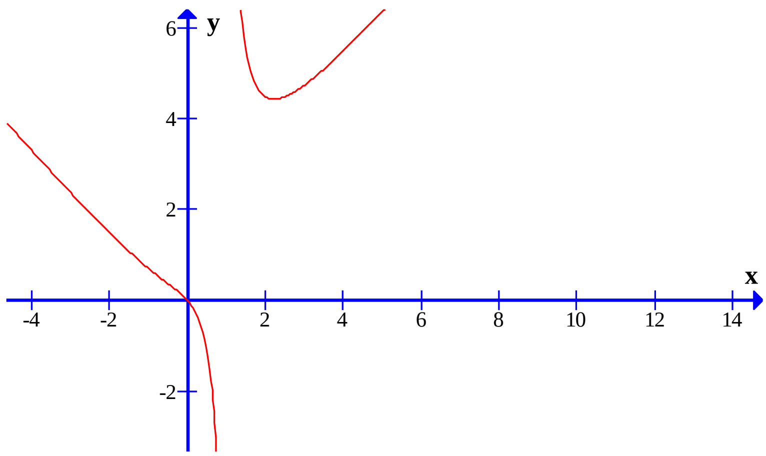

Figure 15 : Le graphe de de la fonction $f(x)$

3- $f'(x) = \frac{x^3-2x^2+1}{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}} = 0 \rightarrow x^3 - 2x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^3 = 2x^2 + 1$

$$\rightarrow x = g(x) = \sqrt{2x^2+1}^{1/3}$$

<u>Étude de la conctractance</u> :

$\rightarrow \quad g(x) = (2x^2+1)^{1/3}$

$$g'^{(x)} = \frac{4x}{3(2x^2+1)^{2/3}}$$

$Max|g'(x)| = Max|g'(2), g'(3)| = Max|(0.61), (0.56)| = 0.61 < 1$

<u>Conclusion :</u> $g(x)$ est conctractante sur [2 – 3].

<u>Stabilité de $g(x)$:</u>

$g(x)$ est croissante sur [2 - 3] $\Rightarrow [g(2), g(3)] = [2.08 - 2.67] \in [2-3]$

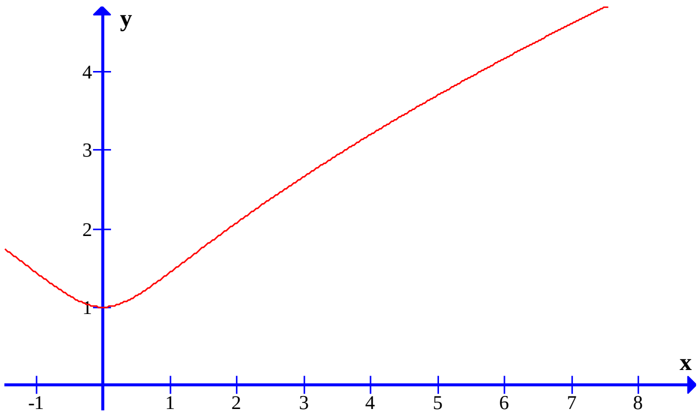

Figure 16 : Le graphe de de la fonction $g(\mathrm{x})$

<u>Conclusion :</u> g est stable sur $[2-3]$

6- <u>Calcul de la solution approchée :</u>

Tableau 12 : Tableau des itérés xi du point fixe pour $x_0 = 2.5$

i	x_i	$g\ (x) = (2x^2+1)^{1/3}$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	2.5	2.3811	0.1189>10^{-3}
1	2.3811	2.3108	0.0703>10^{-3}
2	2.3108	2.2689	0.0419>10^{-3}
3	2.2689	2.2437	0.0251>10^{-3}
4	2.2437	2.2286	0.0151>10^{-3}
5	2.2286	2.2195	0.0091>10^{-3}
6	2.2195	2.2140	0.0055>10^{-3}
7	2.2140	2.2106	0.0033>10^{-3}
8	2.2106	2.2086	0.0020>10^{-3}
9	2.2086	2.2074	0.0012>10^{-3}
10	2.2074	2.2067	0.0007<10^{-3}

La solution approchée est : $\hat{x} = 2.20669024$.

La solution exacte est : 2.20669024$\pm 10^{-3}$

Exercices non corrigés :

Exercice 1-13 :

Résoudre l'équation : $f(x) = \frac{x}{\cos x} + 1 = 0$, avec la méthode du point fixe, sur [-1,0] en prenant $x_0 = -0.5$ et évaluer l'erreur après 20 itérations.

Exercice 1-14 :

On considère la fonction : $f(x) = x^3 - 9x + 2$

- Montrer que l'équation $f(x)$ =0, admet une racine unique dans [0 - 1] .
- Donner la relation itérative de la forme $x_{n+1} = g(x_n)$.
- Etablir si cette méthode sera convergente.

Exercice 1-15 :

Résoudre l'équation : $f(x) = e^x - x - 2 = 0$, sur l'intervalle [1-2]. On se propose d'appliquer 2 méthodes de point fixe, basés sur les fonctions suivantes :

$$g_1(x) = e^x - 2$$
$$g_2(x) = \ln(x + 2)$$

- Comment ces deux fonctions ont elle obtenues ?
- On déduire si les methodes de point fixe utilisant g_1 et g_2 convergent.
- Faire 2 itérations à partir de $x_0 = 1$, pour chacune des 2 méthodes de point fixe.

1.3- La résolution de l'équation F(x)=0 par la méthode de Newton

Rappel

Soit $f(x)$ une fonction continue et deux fois dérivable sur $[a, b]$. Si :

- $f(a).f(b) < 0$
- $f'(x)$ et $f''(x)$ sont non nulles et gardent un signe constant sur l'intervalle $[a, b]$.

Alors, on peut écrire la $(n + 1)^{eme}$ itération approximant $\bar{x}$:

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$Si \ |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, la solution est x_{n+1} .

Le choix de x_0 : il faut vérifier la condition suivante : $f(x_0) * f''(x_0) > 0$

Exercice 1-16 :

Soit la fonction : $f(x) = lnx + x - 2 = 0$

1- Montrer que cette équation admet une solution unique dans l'intervalle [1 - 2].

2- Écrire la méthode de Newton pour l'équation proposée et proposer un bon choix d'initialisation x_0 de cette méthode.

Solution :

1- Existence et unicité :

a) f est définie et continue sur [1 - 2].

b) $f(1) * f(2) = (-1) * (0.693) = -0.693 < 0$

Conclusion : f admet une solution sur [1 - 2].

c) f est croissante sur [1 - 2], donc elle admet une solution unique sur [1 - 2].

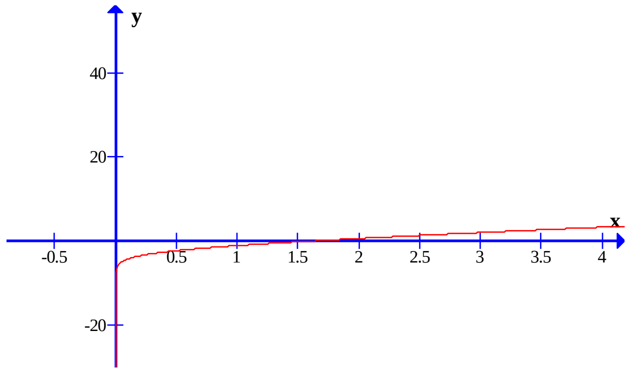

Figure 17 : Le graphe de de la fonction $f(\mathrm{x})$

2- Condition de convergence :

$f(x) = lnx + x - 2 = 0$

$\rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} + 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \ \forall \, x \ \in [1 - \ 2]$

$\rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) \neq 0 \ \forall \, x \ \in [1 - \ 2]$

$x_0 = 1 \rightarrow f(1) * f''(1) = (-1) * (-1) > 0$

3- Calcul de la solution approchée :

$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

$x_0 = 1$

Tableau 13 : Tableau des itérations de la méthode de Newton pour x_0= 1

i	x_i	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	1	1.5	0.5
1	1.5	1.5567	0.05672
2	1.5567	1.5571	0.00042
3	1.5571	1.5571	0.00000
4	1.5571	1.5571	0.00000

La solution approchée est : $\hat{x} = 1.5571$

<u>Exercice1-17 :</u>

Soit la fonction : $f(x) = x(1 + e^x) - e^x$=0.

Trouver les racines réelles de *f* par la méthode de Newton sur [0.5 - 1] avec une précision de : $\varepsilon = 10^{-3}$.

<u>Condition de convergence :</u>

$f(x) = x(1 + e^x) - e^x = 0$

$\rightarrow f'(x) = 1 + xe^x \Rightarrow f'(x) > 0 \; \forall \, x \in [0.5 - 1]$

$\rightarrow f''(x) = e^x(1 + x) \Rightarrow f''(x) \neq 0 \; \forall \, x \in [0.5 - 1]$

$- x_0 = 0.5 \rightarrow f(0.5) * f''(0.5) = (-0.3243) * (2.473) < 0$

- $x_0 = 0.8 \rightarrow f(0.8) * f''(0.8) = (0.355) * (4.006) > 0$

<u>3- Calcul de la solution approchée :</u>

$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

$x_0 = 0.8$

Tableau 14 : Tableau des itérations de la méthode de Newton pour x_0= 0.7

i	x_i	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	0.8	0.6724	0.1276>10^{-3}
1	0.6724	0.6592	0.0132>10^{-3}
2	0.6592	0.6590	0.0001<10^{-3}

La solution approchée est : $\hat{x} = 0.6590$

La solution exacte est : 0.6590 ± 10^{-3}

Exercice 1-18 :

Soit la fonction : $f(x) = x^2 - 6x + 8 = 0$

Résoudre la fonction $f(x)$; en utilisant la méthode de Newton et proposer un bon choix d'initialisation x_0 de cette méthode dans l'intervalle [1 – 2.75] ; avec une précision de : $\varepsilon = 10^{-3}$.

Solution :

1- Existence et unicité :

a) *f* est définie et continue sur [1 - 3].

b) $f(1) * f(2) = (3) * (-0.94) = -2.82 < 0$

Conclusion : f admet une solution sur [1 - 3].

c) *f* est décroissante sur [1 – 2.75], donc elle admet une solution unique sur [1 – 2.75].

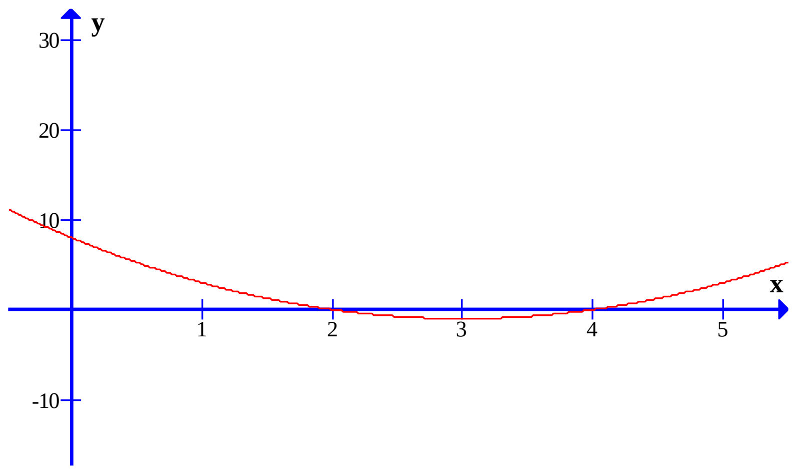

Figure 18 : Le graphe de de la fonction $f(x)$

2- Condition de convergence :

$f(x) = x^2 - 6x + 8 = 0$

$\rightarrow f'(x) = 2x - 6 \Rightarrow f'(x) \neq 0 \; \forall x \in [1 - 2.75]$

$\rightarrow f''(x) = 2 \Rightarrow f''(x) \neq 0 \; \forall x \in [1 - 2.75]$

$x_0 = 1.25 \rightarrow f(1.25) * f''(1.25) = (2.0625) * (2) > 0$

3- Calcul de la solution approchée :

$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

$x_0 = 1.25$

Tableau 15 : Tableau des itérations de la méthode de Newton pour x_0= 1.25

i	x_i	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	$\lvert x_{i+1} - x_i\rvert$
0	1.25	1.8393	0.5893>10^{-3}
1	1.8393	1.9889	0.1496>10^{-3}
2	1.9889	1.9999	0.0111>10^{-3}
3	1.9999	2.0000	0.0001<10^{-3}

La solution approchée est : $\hat{x} = 2.0000$

La solution exacte est : 2.0000 $\pm\, 10^{-3}$

Exercice 1-19 :

Montrer que l'équation $f(x) = x^3 - 3x + 2 - e^x = 0$ admet une racine dans $]0 - 1[$ et en déterminer une approximation à 10^{-6} par la méthode de Newton en commençant par $x_0 = 0.5$.

Solution :

1- Existence et unicité :

a) f est définie et continue sur $]0 - 1[$.

b) $f(0) * f(1) = (1) * (-2.72) = -2.72 < 0$

Conclusion : f admet une solution sur $]0 - 1[$.

c) f est décroissante sur $]0 - 1[$, donc elle admet une solution unique sur $]0 - 1[$.

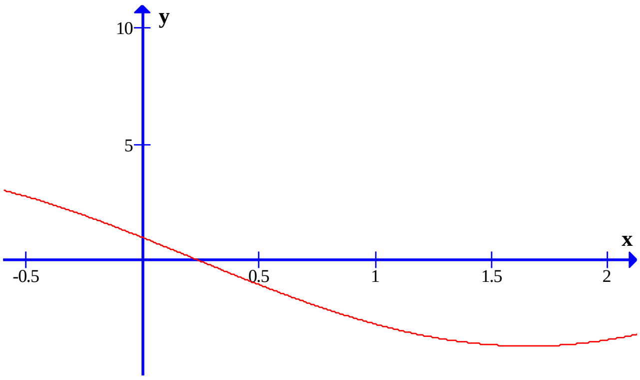

Figure 19 : Le graphe de de la fonction $f(\mathrm{x})$

2- Condition de convergence :

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 - e^x = 0$$

$\rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 - e^x \Rightarrow f'(x) \neq 0 \;\forall\, x \in]0 - 1[$.

$\rightarrow f''(x) = 6x \Rightarrow f''(x) \neq 0 \;\forall\, x \in]0 - 1[$.

3- Calcul de la solution approchée :

$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

$x_0 = 0.5$

Tableau 16 : Tableau des itérations de la méthode de Newton pour x_0= 0.5

i	x_i	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	0.5	0.2374213	0.2625787>10^{-6}
1	0.237421	0.2455075	0.0080862>10^{-6}
2	0.245507	0.2455088	0.0000014>10^{-6}
3	0.245509	0.2455088	0.0000000<10^{-6}
4	0.245509	0.2455088	0.0000000<>10^{-6}

La solution approchée est : $\hat{x} = 0.2455088$.

La solution exacte est : 0.2455088 ± 10^{-6}

Exercice 1-20 :

Montrer que l'équation $f(x) = (x+1)e^x - 2 = 0; x \in R$ admet une racine dans l'intervalle $[0 - 1]$ et déterminer une approximation à x_5 par la méthode de Newton en commençant par $x_0 = 1$.

Solution :

1- Existence et unicité :

a) f est définie et continue sur $[0 - 1]$.

b) $f(0) * f(1) = (-1) * (4.44) = -4.44 < 0$

Conclusion : f admet une solution sur $[0 - 1]$.

c) f est croissante sur $[0 - 1]$, donc elle admet une solution unique sur $[0 - 1]$.

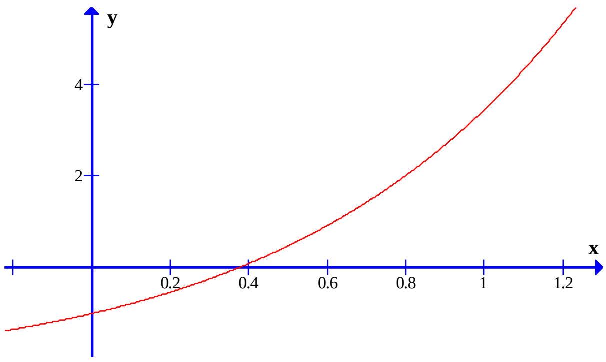

Figure 20 : Le graphe de de la fonction $f(\mathrm{x})$

<u>2- Condition de convergence :</u>

$$f(x) = (x+1)e^x - 2 = 0$$

$\rightarrow f'(x) = (x+2)e^x \Rightarrow f'(x) \neq 0 \; \forall \, x \in [0-1].$

$\rightarrow f''(x) = (x+3)e^x \Rightarrow f''(x) \neq 0 \; \forall \, x \in [0-1].$

<u>3- Calcul de la solution approchée :</u>

$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

$x_0 = 1$

Tableau 17 : Tableau des itérations de la méthode de Newton pour x_0= 1

i	x_i	$x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
0	1	0.6839
1	0.6839	0.5008
2	0.5008	0.4183
3	0.4183	0.3885
4	0.3885	0.3789
5	0.3789	0.3761

La solution approchée est : $\hat{x} = 0.3761$.

<u>Exercices non corrigés :</u>

<u>Exercice 1-21 :</u>

Trouver la racine de la fonction : $f(x) = x^2 - 4\sin x$, par la méthode de Newton, avec une précision :$\varepsilon = 10^{-4}$.

<u>Exercice 1-22 :</u>

On considere l'équation non linéaire suivante :

$$f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 = 0$$

Sur l'intervalle [-1 ,1] :

- Montrer que la fonction $f(x)$ admet une racine.
- Ecrire la méthode de Newton pour résoudre l'équation $f(x) = 0$

CHAPITRE 2

Interpolation polynomiale

2.1- Interpolation de Lagrange :

Rappel :

Le polynôme d'interpolation de Lagrange est donné par la formule de Lagrange :

$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n}[L_i(x) * f(x_i)]$; n : représente l'ordre du polynôme $P(x)$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right)$$

Exercice 2-1 :

On considère la fonction *f* représentant les valeurs de la teneur en eau par l'essai des limites d'Atterberg d'un échantillon de sol, définie par le tableau suivant :

Essai (i)	1	2	3	4
Nombre de coups (x_i)	x_1 =12	x_2 =20	x_3 =26	x_4 =28
Teneur en eau (ω%) ($f(x_i) = y_i$)	48.3	44	40	38.8

Solution :

⇒ n = 3

$P_3(x) = L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3) + L_4(x)f(x_4)$

$$L_1(x) = \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\right)\left(\frac{x - x_3}{x_1 - x_3}\right)\left(\frac{x - x_4}{x_1 - x_4}\right) = \left(\frac{x - 20}{12 - 20}\right)\left(\frac{x - 26}{12 - 26}\right)\left(\frac{x - 28}{12 - 28}\right)$$

$$= \frac{x^3 - 74\,x^2 + 1808\,x - 14560}{-1792}$$

$$L_2(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_3}{x_2 - x_3}\right)\left(\frac{x - x_4}{x_2 - x_4}\right) = \left(\frac{x - 12}{20 - 12}\right)\left(\frac{x - 26}{20 - 26}\right)\left(\frac{x - 28}{20 - 28}\right)$$

$$= \frac{x^3 - 66\,x^2 + 1376x - 8736}{384}$$

$$L_3(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_3 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_2}{x_3 - x_2}\right)\left(\frac{x - x_4}{x_3 - x_4}\right) = \left(\frac{x - 12}{26 - 12}\right)\left(\frac{x - 20}{26 - 20}\right)\left(\frac{x - 28}{26 - 28}\right)$$

$$= \frac{x^3 - 60\,x^2 + 1136x - 6720}{-168}$$

$$L_4(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_4 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_2}{x_4 - x_2}\right)\left(\frac{x - x_3}{x_4 - x_3}\right) = \left(\frac{x - 12}{28 - 12}\right)\left(\frac{x - 20}{28 - 20}\right)\left(\frac{x - 26}{28 - 26}\right)$$

$$= \frac{x^3 - 58\,x^2 + 1072x - 6420}{256}$$

$P_3(x) = L_1(x) * 48.3 + L_2(x) * 44 + L_3(x) * 40 + L_4(x) * 38.8$

$$P_3(x) = \frac{x^3 - 74\,x^2 + 1808\,x - 14560}{-1792} * 48.3 + \frac{x^3 - 66\,x^2 + 1376x - 8736}{384} * 44$$
$$+ \frac{x^3 - 60\,x^2 + 1136x - 6720}{-168} * 40 + \frac{x^3 - 58\,x^2 + 1072x - 6420}{256} * 38.8$$

Le polynôme de Lagrange est :

$$P_3(x) = 0.0011\,x^3 - 0.073\,x^2 + 0.934\,x + 45.7$$

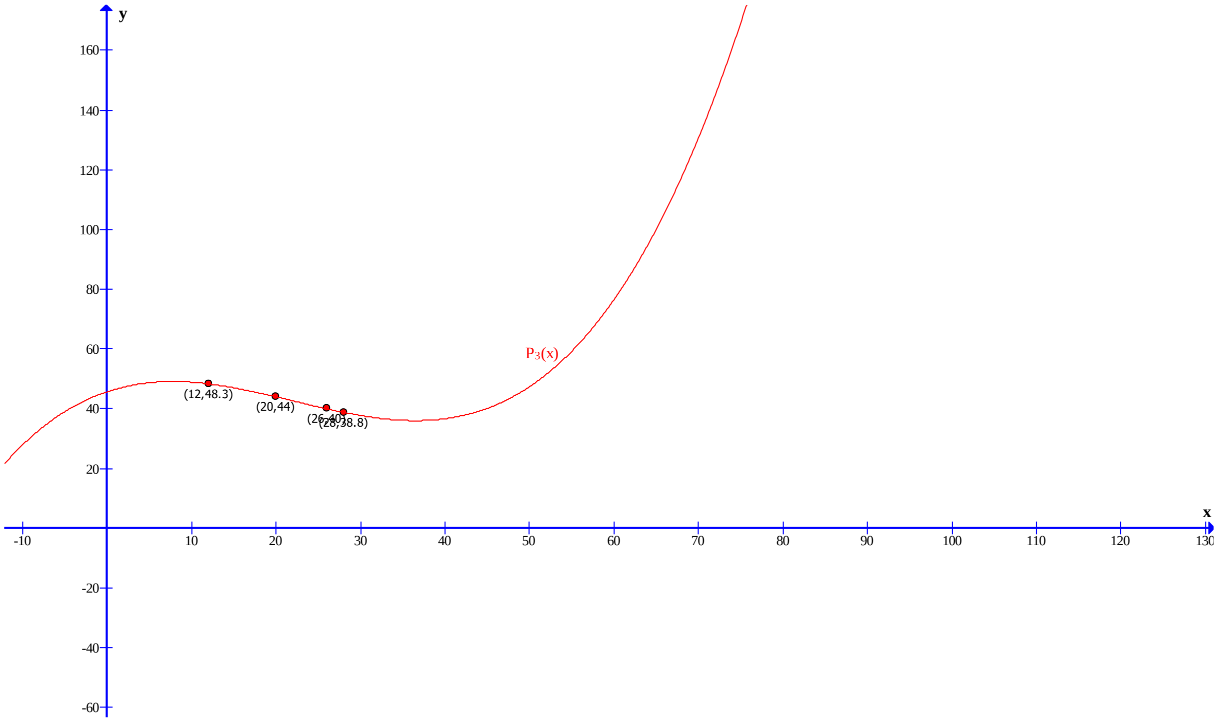

Figure 21 : Le polynôme de Lagrange de $P_3(x)$

<u>Exercice 2-2 :</u>

Soit les trois points d'appuis (0,1) ;(0,5) et (3,0.25) de la fonction $f(x)$. Déterminer :

1- Le polynôme de Lagrange passant par ces points.

2- Une approximation de $f(1.5)$.

<u>Solution :</u>

$\Rightarrow$ n = 2

(x_i)	x_1 =0	x_2 =1	x_3 =3
$(f(x_i) = y_i)$	1	0.5	0.25

1- $P_2(x) = L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3)$

$P_2(x) = L_1(x) * 1 + L_2(x) * 0.5 + L_3(x) * 40 + L_4(x) * 0.25$

$$L_1(x) = \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\right)\left(\frac{x - x_3}{x_1 - x_3}\right) = \left(\frac{x - 1}{0 - 1}\right)\left(\frac{x - 3}{0 - 3}\right) = \frac{1}{3}\,(x - 1)(x - 3)$$

$$L_2(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_3}{x_2 - x_3}\right) == \left(\frac{x - 0}{1 - 0}\right)\left(\frac{x - 3}{1 - 3}\right) = \frac{-1}{2}\, x\,(x - 3)$$

$$L_3(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_3 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_2}{x_3 - x_2}\right) = \left(\frac{x - 0}{3 - 0}\right)\left(\frac{x - 1}{3 - 1}\right) = \frac{1}{6}\, x(x - 1)$$

Le polynôme de Lagrange est :

$$P_2(x) = \frac{1}{3}\,(x - 1)(x - 3) - \frac{0.5}{2}\, x\,(x - 3) + \frac{0.25}{6}\, x(x - 1)$$

$$P_2(x) = 0.125\, x^2 - 0.625\, x + 1$$

3- approximation de $P_2(1.5) = 0.125\,(1.5)^2 - 0.625\,(1.5) + 1 = \; 0.344$

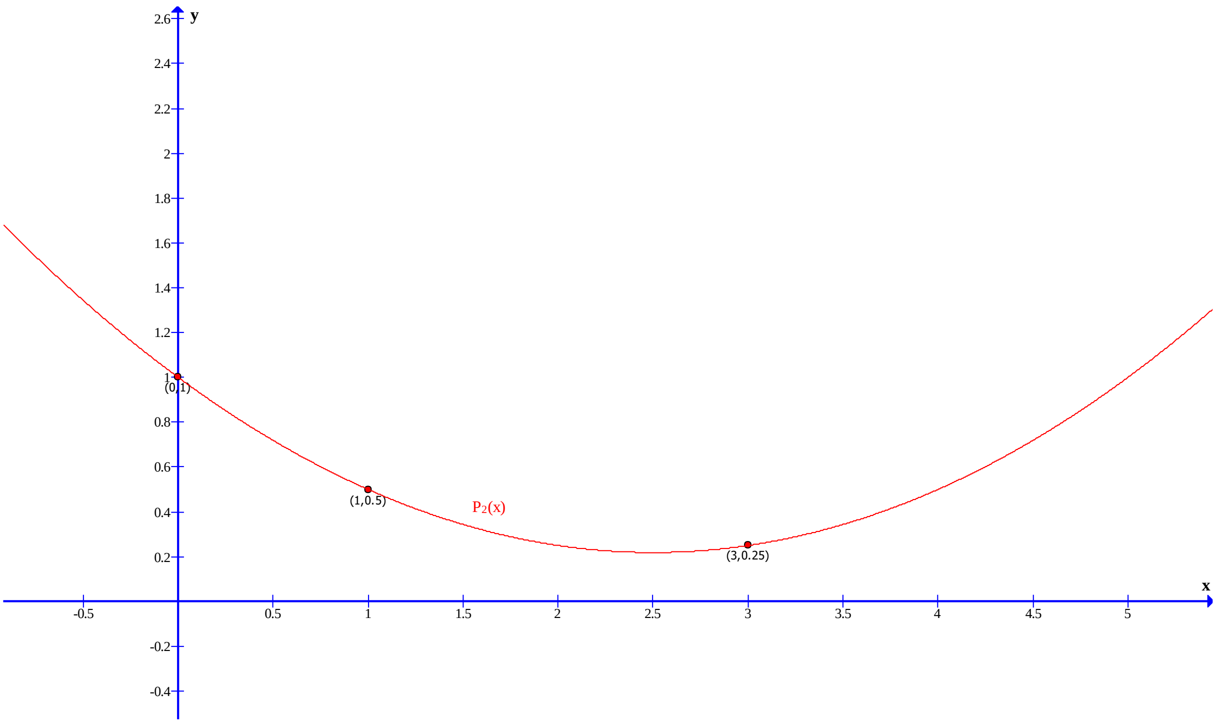

Figure 22 : Le polynôme de Lagrange de$P_2(x)$

<u>2.2- Interpolation de Newton</u> :

<u>Rappel :</u>

D'après la définition de la dérivée d'une fonction continue (x) :

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0}\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)$$

On pourra définir la différence divisée d'ordre 1 :

$$f[x - x_0]\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Pour $(x_i\,, y_i)$ donnés (x_i distincts), le concept de différence divisée se généralise par :

Tableau 18 : Tableau des différences divisées

Ordre	Différence divisée	
0	$f[x_0]$	
1	$f[x_1, x_0]$	$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$
2	$f[x_2, x_1, x_0]$	$\frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$
……….	…………………………………………	………………………………………………
n	$f[x_n \dots \dots \dots .., x_1, x_0]$	$\frac{f[x_{n\dots\dots}, x_1] - f[x_{n-1\dots\dots\dots}, x_0]}{x_n - x_0}$

Le polynôme d'interpolation de degré n qui passe par les n + 1 points (x_0, y_0); (x_1, y_1) ; … ; (x_n, y_n) ou les x_i sont distincts, est unique et donné par

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots \dots \dots \dots + a_n(x - x_0)(x - x_2) \dots \dots .(x - x_{n-1})$$

$$a_0 = f[x_0]$$

$$a_n = f[x_0, x_1, \dots \dots . x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}$$

Exercice 2-3 :

On considère la fonction f représentant l'évolution des paramètres géotechniques de cisaillement à partir d'un essai de cisaillement rectiligne réalisé au laboratoire sur un échantillon de sol, définie par le tableau suivant :

i	1er essai	2ème essai	3ème essai
Contrainte normale (kN/m²)	20	40	60
Contrainte tangentielle (kN/m²)	20.6	28	38.1

Obtenir le polynôme de Newton passant par ces points.

Solution :

h=cst = 20

Formule de Newton progressive :

Tableau 19 : Tableau des différences divisées

i	x_i	y_i	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$
0	20	20.6		
1	40	28	$\frac{28 - 20.6}{40 - 20} = 0.37$	
2	60	38.1	$\frac{38.1 + 28}{60 - 40} = 0.505$	$\frac{0.502 - 0.37}{60 - 20} = 0.0033$

$$P_0(x) = 20.6$$

$$P_1(x) = P_0(x) + f[x_0, x_1](x - x_0) = 20.6 + 0.37(x - 20)$$

$$P_2(x) = P_1(x) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$= 20.6 + 0.37(x - 20) + 0.0033(x - 20)(x - 40)$$

Le polynôme de Newton est :

$$P_2(x) = 15.84 + 0.172\,x + 0.0033\,x^2$$

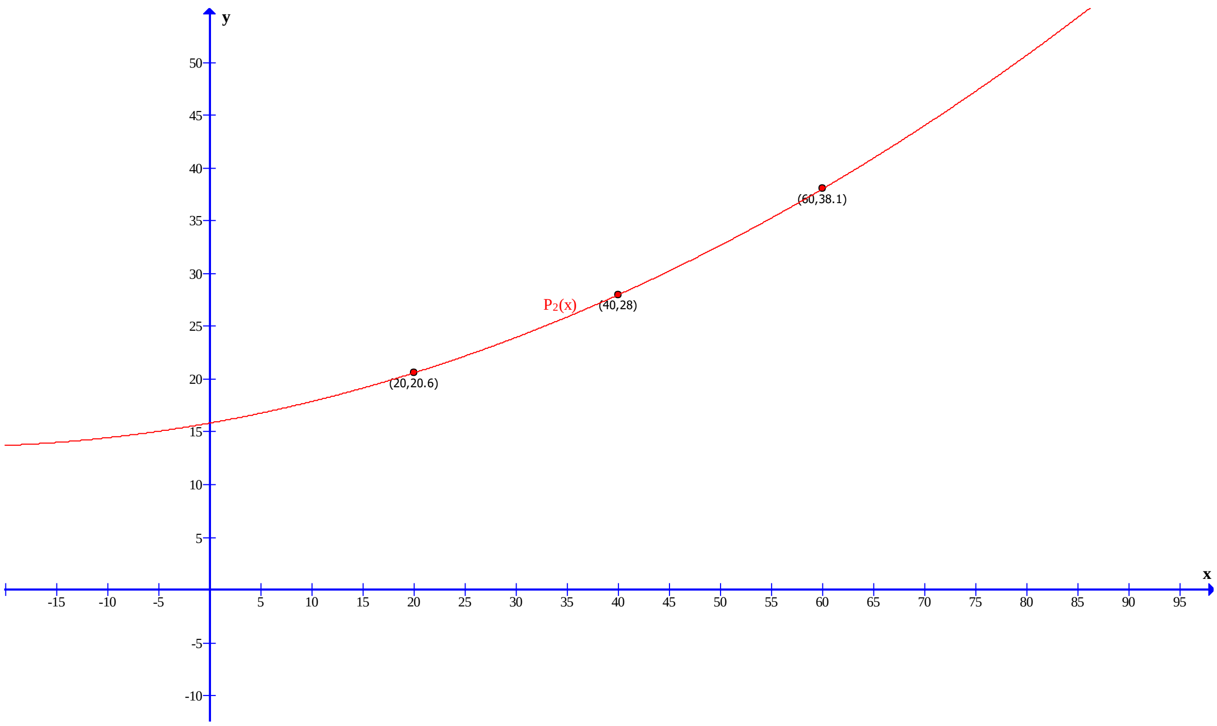

Figure 23 : Le polynôme de Newton de$P_2(x)$

Exercice 2- 4 :

On considère la fonction f définie par le tableau de valeurs suivant :

(x_i)	0	1	2	3
$f(x_i) = y_i$	1	4	9	16

Déterminer le polynôme d'interpolation de f ; de degré inferieur ou égale à 4, en utilisant la formule de Newton.

Solution :

Formule de Newton dégressive :

h=1

Tableau 20 : Tableau des différences divisées

x_i	y_i	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
0	1			
1	4	$=\frac{4-1}{1-0}=3$		
2	9	$=\frac{9-4}{2-1}=5$	$=\frac{5-3}{2-0}=1$	
3	16	$=\frac{16-9}{3-2}=7$	$=\frac{7-5}{3-1}=1$	$=\frac{1-1}{3-0}=0$

Le polynôme de Newton est :

$$P_3(x) = 16 + 7\,(x-3) + (x-3)\,(x-2)$$

$$P_3(x) = 1 + 2\,x\ +\ x^2$$

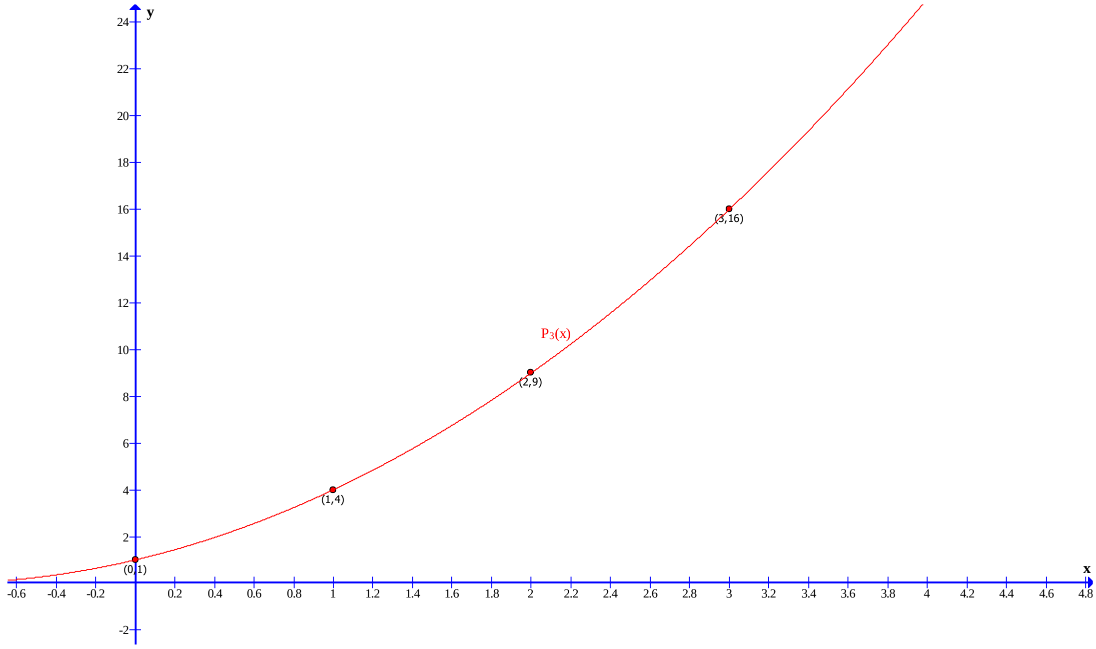

Figure 24 : Le polynôme de Newton de$P_3(x)$

<u>Exercice 2-5 :</u>

On considère la fonction *f* définie par le tableau de valeurs suivant :

(x_i)	1	2	4	5	7
$f(x_i) = y_i$	52	5	-5	-40	10

En utilisant la formule de Newton ; déterminer le polynôme d'interpolation de *f*.

<u>Solution :</u>

Formule de Newton dégressive :

Tableau 21 : Tableau des différences divisées

x_i	y_i	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$
1	52				
2	5	$=\frac{5-52}{2-1}=-47$			
4	-5	$=\frac{-5-5}{4-2}=-5$	$=\frac{-5+47}{4-1}=14$		
5	-40	$=\frac{-40+5}{5-4}=-35$	$=\frac{-35+5}{5-2}=-10$	$=\frac{-10-14}{5-1}=-6$	
7	10	$=\frac{10+40}{7-5}=25$	$=\frac{25+35}{7-4}=20$	$=\frac{20+10}{7-2}=6$	$=\frac{6+6}{7-1}=2$

Le polynôme de Newton est :

$$P_4(x) = 52 - 47\,(x-1) + 14\,(x-1)\,(x-2) - 6\,(x-1)\,(x-2)(x-4)$$
$$+\,2\,(x-1)\,(x-2)(x-4)(x-5)$$
$$P_4(x) = 2\,x^4 - 30\,x^3 + 154\,x^2 - 329\,x + 255$$

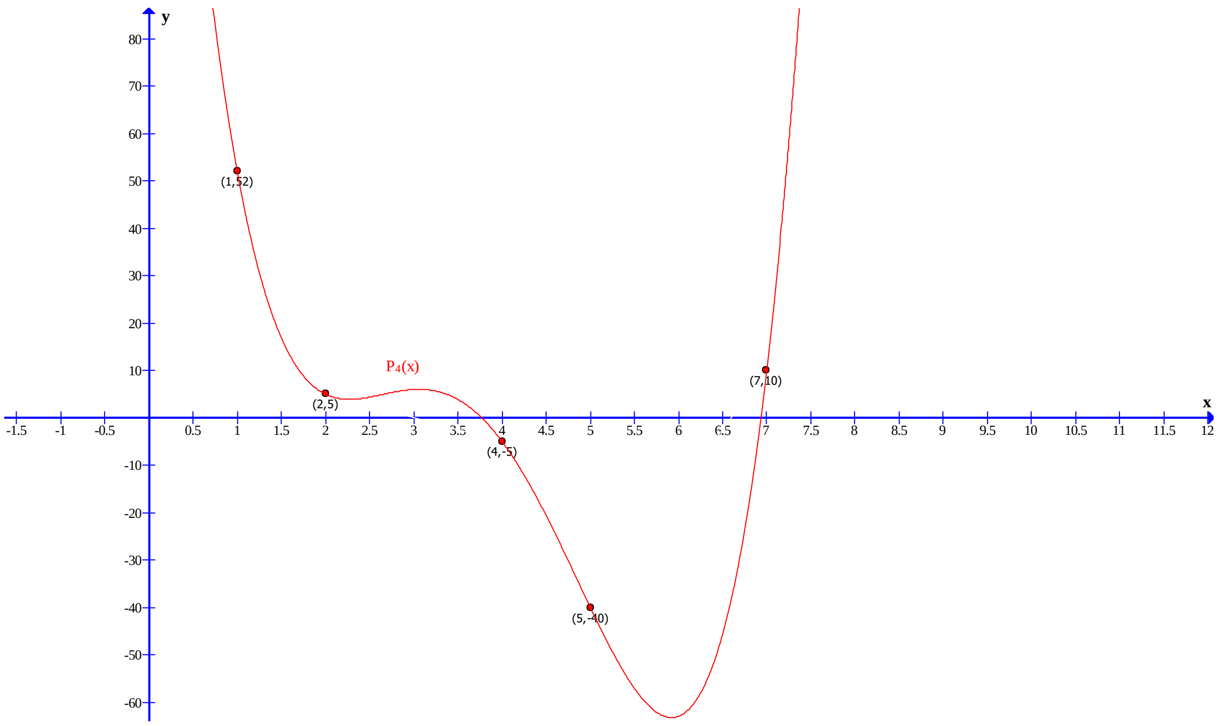

Figure 25 : Le polynôme de Newton de $P_4(x)$

<u>Exercice 2-6 :</u>

Soit $f(x) = \cos(\pi x); x \in [-1,1]$ et P le polynôme d'interpolation de Lagrange de $f(x)$ aux points -1 ;-1/3 ;1/3 ;1 sur $[-1,1]$.

Appliquer l'interpolation de Newton pour le calcul de P. En déduire l'expression de P.

Solution :

Tableau 22 : Tableau des différences divisées

i	x_i	y_i	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
0	-1	-1			
1	-1/3	1/2	$=\frac{\frac{1}{2}+1}{-\frac{1}{3}+1}=\frac{9}{4}$		
2	1/3	1/2	$=\frac{\frac{1}{2}-1/2}{\frac{1}{3}+1/3}=0$	$=\frac{0-\frac{9}{4}}{2-0}=-\frac{27}{16}$	
3	1	-1	$=\frac{-1-1/2}{1-1/3}=-\frac{9}{4}$	$=\frac{-\frac{9}{4}-0}{1-(-\frac{1}{3})}=-\frac{27}{16}$	$=\frac{-\frac{27}{16}-(-\frac{27}{16})}{1-(-1)}=0$

Le polynôme de Newton est :

$$P_3(x) = -1 + \frac{9}{4}(x+1) - \frac{27}{16}(x+1)(x+1/3)$$

$$P_3(x) = \frac{11}{16} - \frac{27}{16}x^2$$

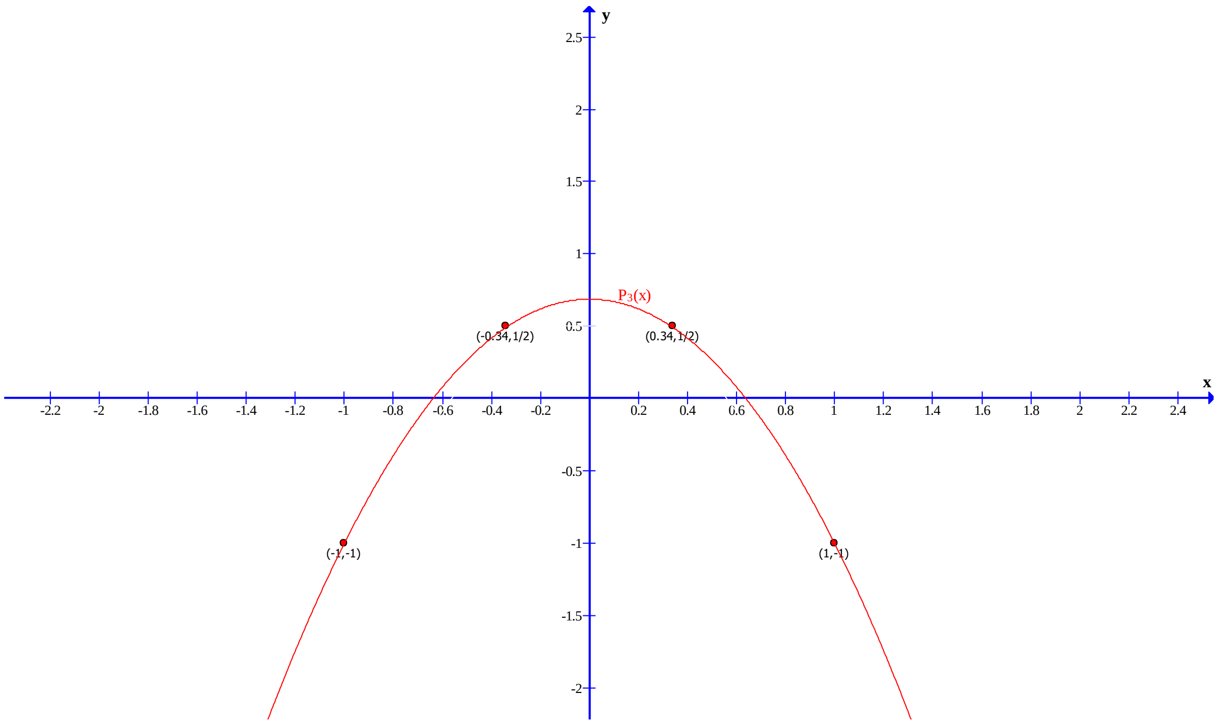

Figure 26 : Le polynôme de Newton de$P_3(x)$

2.3- Méthode des moindres carrés :

Rappel :

Soient n points d'appui : $(x_i\ ,\ y_i)$, y_i=$f(x_i)$ et (i=1,…,n). L'erreur moyenne quadratique se remplace par :

$$\varepsilon(P)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-g(x_i,P))^2$$

De même on cherche à minimiser $\varepsilon(P)$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial P_j}=0\ \rightarrow\sum_{i=1}^{n}(y_i-g(x_i,P))\frac{\partial g(x_i,P)}{\partial P_j}=0$$

On obtient un système d'équations à n inconnues P_i (i=1,…,n)

Exercice 2-7 :

Soit la fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle [0 – 4] aux points d'appuis suivants :

(0 ,2.05) ; (1 ,2.56) ; (2,5.88) ; (3,12.65).

En utilisant la méthode des moindres carrés, écrire le polynôme du second degré de (x) .

$g(x_i,P)=P_1+P_{2.}x+P_3x^2$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial P_j}=0\ \rightarrow\sum_{i=1}^{n}(y_i-g(x_i,P))\frac{\partial g(x_i,P)}{\partial P_j}=0$$

$\rightarrow\frac{\partial\varepsilon}{\partial P_1}=0\rightarrow[y_1-(P_1+P_{2.}x_1+P_3{x_1}^2)]+\cdots\dots\dots\dots\dots+[y_4-(P_1+P_{2.}x_4+P_3{x_4}^2)]=0$

$\rightarrow\frac{\partial\varepsilon}{\partial P_2}=0\rightarrow[y_1-(P_1+P_{2.}x_1+P_3{x_1}^2)]+\cdots\dots\dots\dots\dots+[y_4-(P_1+P_{2.}x_4+P_3{x_4}^2)]=0$

$\rightarrow\frac{\partial\varepsilon}{\partial P_3}=0\rightarrow[y_1-(P_1+P_{2.}x_1+P_3{x_1}^2)]+\cdots\dots\dots\dots\dots+[y_4-(P_1+P_{2.}x_4+P_3{x_4}^2)]=0$

$\Leftrightarrow\ 14P_3-6P_{2.}-4P_1+23.14=0$

$36P_3-14P_{2.}-6P_1+52.27=0$

$98P_3-36P_{2.}-14P_1+113.85=0$

$$\Leftrightarrow\ P_1=3.1341;\ P_2=0.24;\ P_3=-0.655$$

$$f(x_i)=y_i=3.1341+0.24x-0.655x^2$$

2.4- Méthode de Tchebychev :

Rappel :

Soit la fonction $f(x)$ continue sur [-1,+1] qu'on approxime par le polynôme de Tchebychev :

$$f(x)=a_0+a_{1.}T_1(x)+a_{2.}T_2(x)+\cdots\dots\dots\dots\dots+a_{n.}T_n(x)$$

Les coefficients a_i (i=0,…,n) égale à :

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,T_n(x)\,dx, \qquad x \neq 0$$

Exercice 2-8 :

On considère la fonction $f(x)$ définie sur [-1 ,1] pour :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \le x \le 0 \\ 1 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Donner le polynôme $P_2(x)$, de meilleure approximation de $f(x)$ au sens des moindres carrés, en utilisant la base discrète du polynôme de Tchebychev.

$\Longrightarrow f(x) = a_0 + a_{1.}T_1 + a_{2.}T_2$

$\rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \;=\; \frac{1}{\pi}\left[\int_{-1}^{0}\frac{(x+1)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-1}^{0}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right]$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[{}_{-1}^{\;0}\left|-\sqrt{1-x^2}\right| + {}_{-1}^{\;1}\left|\arcsin(x)\right|\right]$$

$\Rightarrow a_0 = 0$

$\rightarrow a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,T_n\,(x)dx; n \neq 0$

$$\rightarrow a_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,T_1\,(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x\,f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_{-1}^{0}\frac{x\,(x+1)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_{-1}^{0}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right]$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\,{}_{-1}^{\;0}\left|arcsinx - x\sqrt{1-x^2}\right| = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\left|\sqrt{1-x^2}\right| = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

$\rightarrow a_2 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,T_2\,(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,(2x^2-1)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\int_{-1}^{0}\frac{(x+1)}{\sqrt{1-x^2}}\,(2x^2-1)dx + \int_{0}^{1}\frac{(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right]$

$$\int_{-1}^{0} \frac{(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} (2x^2-1)dx = \int_{-1}^{0} \frac{2x^3+2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$= 2\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$+ \int_{-1}^{0} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx - \int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx - \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$= 2 \left|-\sqrt{1-x^2}\left(\frac{x^2+2}{3}\right)\right|_{-1}^{0} + 2 \left|\frac{1}{2} arcsinx - \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2}\right|_{-1}^{0} + 2 \left|-\sqrt{1-x^2}\right|_{-1}^{0} - {}_{-1}^{0}|arcsinx|$$

$$= -\frac{10}{3}$$

$$\int_{0}^{1} \frac{(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = 2\int_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx - \int_{0}^{1} \frac{(-1)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$= 2 \left|\frac{1}{2} arcsinx - \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2}\right|_{0}^{1} + {}_{0}^{1}|arcsinx| = 0$$

$$\Rightarrow a_2 = -\frac{20}{3\pi}$$

$$\rightarrow T_0(x) = 1;\ T_1(x) = x;\ T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

$$\Rightarrow T_0(x) = 1;\ T_1(x) = x;\ T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$\Longrightarrow f(x) = a_0 + a_{1.}T_1 + a_{2.}T_2 = \frac{1}{2}x - \frac{20}{3\pi}(2x^2-1) = \frac{1}{2}x - \frac{40}{3\pi}x^2 - \frac{20}{3\pi}$$

Exercices non corrigés :

Exercice 2-9 :

Soit la fonction :$f(x) = x^4 - x - 2$

Cette fonction admet une solution x^* dans [0 - 1]

a-trouver le polynôme d'interpolation de Lagrange $P(x)$ qui interpole $f(x)$ aux points : $x_0 = 0$; $x_1 = 0.5$ et $x_2 = 1$.

b-en résolvant $P(x) = 0$, donner une valeur approchée de x^*.

Exercice 2-10 :

Soit la fonction définie par :$f(x) = x^{1/4}$

- Construire la table des différences divisées à partir des données $(x_i, f(x_i)), i = 0$ à 3;avec $x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 81$; $x_3 = 625$.
- Ecrire le polynôme d'interpolation de $f(x)$, noté P_3 , en utilisant la formule de Newton.

- Calculer $P_3(256)$ et comparer les résultats avec $f(256)$.

Exercice 2-11 :

Calculer l'intégrale : $I = \int_0^1 x\, e^{2x}\, dx$ par la formule de Tchebychev pour n = 2.

Exercice 2-12 :

On cherche le polynôme $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ qui minimise l'expression :

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - P_2(x))^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Calculer$T_2;\ T_3, T_4$.
- On prend$f(x) = 2x^3 + x^4$. Déterminer $P_2(x)$ et déduire les valeurs de a_0, a_1 et a_2.
- Evaluer l'erreur commise.

Exercice 2-13 :

Soit la fonction :$f(x) = \sqrt[4]{2x+1}$

- Construire la droite d'interpolation de $f(x)$ aux points x_0 = 2 et x_1 = 5/2.
- Calculer une approximation de $f(2.2)$ et estimer le nombre de chiffres significatifs du résultat.
- Reprendre la première question entre x_0 = 5/2 et x_0 = 3.
- Donner une approximation de f (2.9) et estimer le nombre des chiffres significatifs.

CHAPITRE 3

Intégration numérique

3.1- Méthode de Trapèze :

Rappel :

On approche à calculer :

$\int_{a_i}^{b_i} f(x)dx$

par $(b_i - a_i)\frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}$.

Géométriquement, cela signifie qu'on approche l'intégrale de f par l'aire des trapèzes :

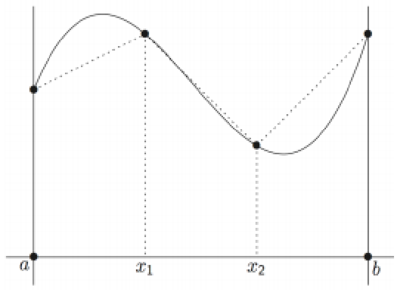

Figure 27 : Une division d'un intervalle en sous-intervalles par la méthode de Trapèze

-La valeur approchée de l'intégrale f sur $[a, b]$ par la méthode des trapèzes est alors donnée par :

$$I_{Trapéze} = \frac{b-a}{n}(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i))$$

3.2- Méthode de Simpson :

Rappel :

La méthode d'intégration de Simpson est basé sur une division de l'intervalle de dérivation $[a, b]$ en sous intervalles de taille fixe : $h = \frac{b-a}{2n}$. Ensuite de diviser la longueur h en 3.

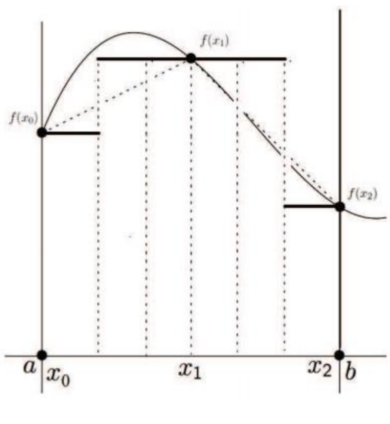

Figure 28 : Une division d'un intervalle en sous-intervalles par la méthode de Simpson

La valeur approchée de l'intégrale f sur $[a, b]$ par la méthode de Simpson est donnée par :

$$I_{Silmpson} = \frac{h}{3}(f(x_0) + f(x_{2n}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}).$$

Exercice 3-1 :

Soit la fonction $f(x)$: $f(x) = x\,e^{-x^2}$

Sur la base du tableau des points d'appuis suivant :

x_i	0	0.5	1	1.5
y_i	0	0.38940039	0.36787944	0.15809884

- Approximer l'intégrale de la fonction $f(x)$ par la méthode des Trapèzes puis par celle de Simpson,

- Calculer l'erreur et conclure.

Solution :

1- Méthode de Trapèze :

$$I_1(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \cdots \ldots + y_{n-1})]$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1.5-0}{3} = 0.5$$

$$I_1(f) = \frac{0.5}{2}[(0 + 0.15809884) + 2(0.38940039 + 0.36787944)]$$

$I_1(f)$ =0.41816463

2- Méthode de Simpson :

$$I_2(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \cdots \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots \ldots + y_{n-2})]$$

$$I_2(f) = \frac{0.5}{3}[(0 + 0.15809884) + 4 * (0.38940039) + 2 * (0.36787944)]$$

$I_2(f)$ =0.40857655

3- Calcul de l'intégrale :

$\int_0^{1.5} x\,e^{-x^2}dx = \left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_0^{1.5}$ =0.44730039

Erreur de Trapèze = $|I_{exact} - I_1|$ = 0.029136

Erreur de Simpson = $|I_{exact} - I_2|$ = 0.038724

Conclusion : On constate donc que l'approximation donnée par la méthode de trapèzes est meilleure que celle par Simpson.

Exercice 3-2 :

1 - Calculer les valeurs approchées de l'intégrale : $I = \int_1^3 f(x)\,dx$, par la méthode des Trapèzes puis par celle de Simpson. On donne :

$f(x) = \frac{1}{5+3x}$

x_i	1	1.5	2	2.5	3
y_i	0.1.25	0.10526	0.09091	0.08	0.0714

2 – Soit $\ln(5 + 3x)$ la primitive de $f(x)$. Calculer la valeur exacte de I puis en déduire l'erreur $|I_{exact} - I_{approchée}|$

Solution :

1- Calcule des valeurs approchées

Méthode de Trapèze :

$$I_1(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \cdots \ldots + y_{n-1})]$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{4} = 0.5$$

$$I_1(f) = \frac{0.5}{2}[(0.125 + 0.0714) + 2(0.10526 + 0.09091 + 0.08)]$$

$I_1(f) =$ 0.149748

Méthode de Simpson :

$$I_2(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \cdots \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots \ldots + y_{n-2})]$$

$$I_2(f) = \frac{0.5}{3}[(0.125 + 0.0714) + 4 * (0.10526 + 0.08) + 2 * (0.09091)]$$

$I_2(f) =$0.18654333

2 - Calcul de l'intégrale :

$\int_1^3 \frac{1}{5+3x} dx = [\ln(5 + 3x)]_1^3$ =0.55961579

Erreur de Trapèze = $|I_{exact} - I_1|$ = 0.40986779

Erreur de Simpson = $|I_{exact} - I_2|$ = 0.37307246

Exercice 3-3 :

On considère l'intégrale suivant :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

1- Calculer la valeur exacte de cette intégrale.

2- Evaluer numériquement cette intégrale en utilisant :

a) La méthode des trapèzes en 5 intervalles.

b) La méthode de Simpson avec 2 intervalles.

Solution :

1- $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\, dx = {}_0^1|arctg(x)| = arctg\ (1) = 0.7854.$

2- Méthode de Trapèze :

$$I_1(f) = \int_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{2}[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \cdots \ldots + y_{n-1})]$$

n=5 $\qquad h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0.2$

x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8
$y_i = \frac{1}{1+x^2}$	1	0.96154	0.86207	1.85	0.61

$$I_1(f) = \frac{0.2}{2}[(1 + 0.61) + 2(0.96154 + 0.86207 + 1.85)] = 0.896$$

$I_1(f) = 0.896$

3- Méthode de Simpson :

$$I_2(f) = \int_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \cdots \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots \ldots + y_{n-2})]$$

→n=2

$h = \frac{b-a}{2} = \frac{1-0}{2} = 0.5$

x_i	0	0.5	1
$y_i = \frac{1}{1+x^2}$	1	0.8	0.5

$$I_2(f) = \frac{0.5}{3}[(1+0.5)+4*(0.8))]$$

$I_2(f)$ =0.784

3.3- Formules de quadrature :

Rappel

Formules de Newton-Cotes :

Soient (x_i ; y_i= $f(x_i)$), i = 0 , : : : , n, n + 1 points d'interpolation tel que :
$a \le x_0 < x_1 < \cdots \ldots \ldots .. < x_n \le b.$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)dx = \sum_{i=0}^{n} y_i \int_a^b l_i(x)dx$$

$P(x)$: est le polynôme de Lagrange de la fonction$f(x)$.

$l_i(x)$ est le i-ième polynôme de Lagrange associé aux points (x_i) i=1,...,n+1.

Formules de Newton-Cotes fermé :

On interpole $f(x_i)$ aux point a et b (i = 0; : : : ; n), on aura :

$$x_0 = a, x_n = b, x_i = a + ih$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx$$

$$I = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} \frac{(b-a)}{(b-a)} y_i l_i(x) = (b-a) \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(b-a)} \quad (\int_a^b l_i(x)dx\,)y_i$$

Cas n = 0, formule des rectangles :

→ **Formule de rectangle à gauche :**

$$I = \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a)$$

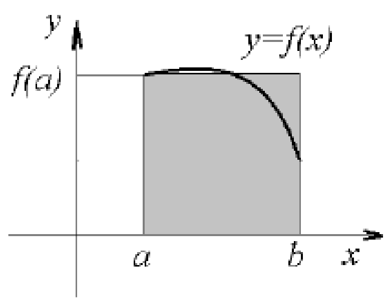

Figure 29 : Rectangle à gauche

→ Formule de rectangle à droite :

$$I = \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(b)$$

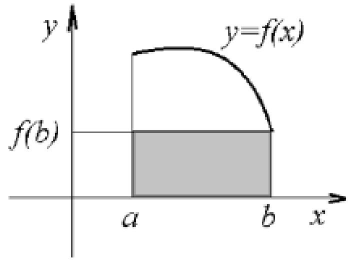

Figure 30 : Rectangle à droite

Cas n = 1, formule des trapèzes :

$$x_1 = a, x_2 = b$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx$$

$$P_1(x)dx = f_0 l_0(x)dx + f_1 l_1(x)dx = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} = f(a)\frac{x-b}{a-b} - f(b)\frac{x-a}{a-b}$$

$$= \frac{f(a)(x-b) - f(b)(x-a)}{a-b}$$

$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx$=

$$\int_a^b \frac{f(a)(x-b) - f(b)(x-a)}{a-b}\, dx = \frac{f(a)}{a-b}\int_a^b (x-b)dx - \frac{f(b)}{a-b}\int_a^b (x-a)dx$$

$$= (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Cas n = 2, formule de Simpson :

$$x_1 = a, x_2 = \frac{a+b}{2}, x_3 = b$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx = (b-a)(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b))$$

<u>Formules de Newton-Cotes ouvert :</u>

On interpole $f(x_i)$ aux point a et b (i = 0; : : : ; n)

$$x_0 = a, x_n = b, x_i = a + (i+1)h$$

$$h = \frac{b-a}{n+2}$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(b-a)} (\int_a^b l_i(x)dx)y_i$$

Formules de Gauss-Legendre :

Considérons que la fonction $y = f(t)$, est définie sur $[-1,1]$. Les formules de quadratures ont la forme :

$$\int_a^b f(x)dt = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i\, f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \int_{-1}^{1} l_i(x)dx$$

$$w_i\ = \int_{-1}^{1} l_i(x)dx$$

Où :les poids d'intégration w_i et les points d'intégration x_i sont choisi pour maximiser le degré de précision. Qui soit exacte pour tout polynôme dont le degré est le plus grand possible.

Pour f définie sur un intervalle $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$, on considère le changement de variable suivant :

$$t = \frac{b-a}{2}\ x + \frac{b+a}{2}$$

pour $x\ \in\ [-1,1]$.

Donc on peut écrire que :

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}\ x + \frac{b+a}{2}\right)dx = \ \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i\, f(x_i)$$

Pour tout $i = \overline{1,n}$

$$t_i = \frac{b-a}{2}\ x_i + \frac{b+a}{2};\ x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}};\ \ x_n = -\ \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Exercice 3-4 :

Calculer $I =\ \int_1^2 \sqrt{x}dx$,en utilisant les formules de quadratures simples suivantes,:

1) Rectangle à droite
2) Rectangle à gauche
4) Trapèze
5) Simpson

Solution :

Calcul de l'intégrale exact :

$$I_{exact} =\ \int_1^2 \sqrt{x}dx\ \ = \left(\frac{2^{3/2}-1}{3/2}\right) = 1.21895$$

Rectangle à droite :

$I_d = (b-a)f(b) = (2-1) = 1$

Erreur = $|I_d - I_{exact}| = 0.21895$

Rectangle à gauche :

$I_g = (b-a)f(a) = (2-1)\sqrt{2} = 1.414213$

Erreur = $|I_g - I_{exact}| = 0.414213$

Trapèze :

$$I_T = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = (2-1)\frac{1+\sqrt{2}}{2} = 1.207107$$

Erreur = $|I_T - I_{exact}| = 0.207107$

Simpson :

$$I_S = (b-a)\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) = (2-1)\left(1 + 4\sqrt{1.5} + \sqrt{2}\right) == 1.21886$$

Erreur = $|I_S - I_{exact}| = 0.21886$

Conclusion :
L'approximation donnée par la méthode des trapèzes est la plus du calcul exact.

Exercice 3-5 :

En utilisant la formule de quadrature de Gauss-Legendre, calculer l'intégrale :

$I = \int_0^4 t\, e^{2t} dt.$

Sachant que $I_{exact} = 5216.926477$, calculer l'erreur.

Solution :

Changement de variable :

$$I = \int_0^4 t\, e^{2t} dt$$

$$t = \frac{b-a}{2}\, x + \frac{b+a}{2} = \frac{4-0}{2}\, x + \frac{4+0}{2} = 2x + 2$$

$$dt = \frac{b-a}{2}\, dx = \frac{4-0}{2}\, dx = 2dx$$

$$I = \int_0^4 t\, e^{2t} dt = \int_{-1}^{1} (2x+2) e^{2(2x+2)}\, 2dx = \int_{-1}^{1} (4x+4) e^{(4x+4)}\, dx$$

$f(x) = (4x+4)e^{(4x+4)}$

→ n =2

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{2} w_i\, f(x_i) = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}};\ \ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$w_i = \int_{-1}^{1} l_i(x)dx$$

$$w_1 = \int_{-1}^{1} l_1(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}dx = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{3}}{2}(x + \frac{1}{\sqrt{3}})dx = 1$$

$$w_2 = \int_{-1}^{1} l_2(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}dx = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{3}}{2}(x + \frac{1}{\sqrt{3}})dx = 1$$

$$I = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3477.54396$$

Erreur = $|I_{exact} - I| = |5216.926477 - 3477.54396| = 1739.382541$

→ n =3

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{3} w_i\, f(x_i) = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}};\ x_2 = 0;\ \ x_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$w_i = \int_{-1}^{1} l_i(x)dx$$

$$w_1 = \int_{-1}^{1} l_1(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}dx = \int_{-1}^{1} \frac{(x - 0)(x + \frac{1}{\sqrt{3}})}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 0\right)(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}})}dx = 5/9$$

$$w_2 = \int_{-1}^{1} l_2(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}dx = \int_{-1}^{1} \frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}})(x + \frac{1}{\sqrt{3}})}{\left(0 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(0 + \frac{1}{\sqrt{3}})}dx = 8/5$$

$$w_3 = \int_{-1}^{1} l_3(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}dx = \int_{-1}^{1} \frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}})(x - 0)}{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(-\frac{1}{\sqrt{3}} - 0)}dx = 5/9$$

$$I = \frac{5}{9}f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{8}{5}f(0) + \frac{5}{9}f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 4967.106689$$

Erreur = $|I_{exact} - I| = |5216.926477 - 4967.106689| = 249.819785$

On constate que plus le nombre n ; augmente plus l'erreur diminue et on s'approche du calcul exact.

Exercices non corrigés :

Exercice 3-6 :

Calculer l'intégrale de la fonction ci-dessous par la méthode des Trapèzes et de Simpson. : $f(x) = -x\, e^{(-x)}$

On donne les bornes de l'intégrale [a-b] = [0-3]. N= 5 sous intervalles.

Exercice 3-7 :

On considère trois fonctions f, g, h suffisamment dérivable dans l'intervalle I = [-1,1].

- Soit le tableau

x_i	-1	-1/2	1/2
$f(x_i)$	1	-1	1

Calculer le polynôme d'interpolation P(x) de *f* au points x_i sous la forme de Lagrange.

- On considère le tableau

x_i	-1/2	1/2	1
$g(x_i)$	-1	1	-1

Calculer le polynôme d'interpolation de Q(x) de g aux points x_i sous la forme de Newton.

- On considère la table :

x_i	-1	-1/2	0	1/2	1
$h(x_i)$	1	-1	0	1	-1

Montrer, sans le calculer explicitement, que le polynôme $R(x)$ est le polynôme d'interpolation de h aux pointsx_i. On donne : $R(x) = \frac{1}{2}((x+1)Q(x) - (x-1)P(x))$

- Ecrire l'erreur d'interpolation en ces 4 points et en déduire une majoration de l'erreur d'interpolation E(x) = h(x) – R(x).

Exercice 3-8 :

Soit l'intégrale : $I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x+2} dx$

a- Calculer, en se limitant à quatre chiffres décimaux, l'intégrale I , par les méthodes de Simpson avec h=5 et Gauss-Legendre à deux points.

b- Evaluer les erreurs correspondantes.

c- Déterminer les erreurs réelles. Que peut-on conclure ?

CHAPITRE 4

Méthode de résolution directe des systèmes d'équations linéaires

4.1-Méthode de Gauss :

Rappel :

On considère un système : $A\,x = b$. Pour passer de $A^{(k)}; b^{(k)}$a $A^{(k+1)}; b^{(k+1)}$, l'étape de factorisation s'écrit :

pour k=j,………………n.

$$a_{k,j}^{(i+1)} = a_{k,j}^{(i)} - \frac{a_{k,j}^{(i)}}{a_{i,i}^{(i)}} a_{i,k}^{(i)}$$

$$b_{k,j}^{(i+1)} = b_{k}^{(i)} - \frac{a_{k,i}^{(i)}}{a_{i,i}^{(i)}} b_{i}^{(i)}$$

- à la k iéme étape $(1 \leq k \leq n-1)$ d'élimination de Gauss le pivot partiel est choisi parmi les coefficients $(a\ )_{k\leq i\leq n}$ tel que sa valeur absolue soit la plus grande.

Soit $a_{i0k}^{(k)}$ cet élément $\left|a_{i0k}^{(k)}\right| = \max\limits_{k\leq i\leq n}\left|a_{i,k}^{(k)}\right|$. On permute ensuite si $i \neq k$ la k iéme ligne et la ligne i_0.

- à la k iéme étape $(1 \leq k \leq n-1)$ d'élimination de Gauss le pivot total est choisi parmi les coefficients $(a_{i,j}^{(k)}\ )_{k\leq i,j\leq n}$ tel que sa valeur absolue soit la plus grande.

Soit $a_{i0j0}^{(k)}$ cet élément $\left|a_{i0j0}^{(k)}\right| = \max\limits_{k\leq i,j\leq n}\left|a_{i,j}^{(k)}\right|$, puis on fait les permutations des lignes et des colonnes correspondantes. Cette technique n'est utilisée que dans de rares cas pratiques.

Exercice 4-1 :

Déterminer la solution du système ci-dessous par la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

Solution :

Ax = b

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{vmatrix}$$

<u>1ère élimination :</u>

1^{er} pivot $a_{11} = 1$

$$A = \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{1}} & \underline{\mathbf{2}} & \underline{\mathbf{3}} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad b= \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{4}} \\ 5 \\ 6 \end{vmatrix}$$

**On élimine la $2^{ème}$ ligne par rapport à la première :

$1 - \frac{1}{1}1 = 0$

$1 - \frac{1}{1}2 = -1$

$2 - \frac{1}{1}3 = -1$

$5 - \frac{1}{1}4 = 1$

$$i = 1,\ A^{(1)} = \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{1}} & \underline{\mathbf{2}} & \underline{\mathbf{3}} \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad b^{(1)}= \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{4}} \\ 1 \\ 6 \end{vmatrix}$$

**On élimine la $3^{ème}$ ligne par rapport à la première :

$1 - \frac{1}{1}1 = 0$

$1 - \frac{1}{1}2 = -1$

$1 - \frac{1}{1}3 = -2$

$6 - \frac{1}{1}4 = 2$

$$i = 1,\ A^{(1)} = \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{1}} & \underline{\mathbf{2}} & \underline{\mathbf{3}} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \quad b^{(1)}= \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{4}} \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

<u>2ème élimination :</u>

$2^{ème}$ pivot $a_{22} = -1$

$$i = 2,\ A^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{-1}} & \underline{\mathbf{-1}} \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \quad b^{(2)}= \begin{vmatrix} 4 \\ \underline{\mathbf{1}} \\ 2 \end{vmatrix}$$

On élimine la $3^{ème}$ ligne par rapport à la $2^{ème.}$

$0-\frac{(-1)}{(-1)}0=0$

$-1-\frac{(-1)}{(-1)}(-1)=0$

$-2-\frac{(-1)}{(-1)}(-1)=-1$

$2-\frac{(-1)}{(-1)}1=1$

$$i = 2,\ A^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad b^{(2)} = \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$0*x_1+0*x_2+(-1)*x_3 = 1 \rightarrow x_3 = -1$

$0*x_1 + (-1)*x_2+(-1)*x_3 = 1 \rightarrow x_2 = 0$

$1*x_1 +2*x_2+3*x_3 = 4 \rightarrow x_1 = 7$

La solution est :

$$X = \begin{vmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$$

Exercice 4-2 :

Considérons la résolution par la méthode d'élimination de Gauss sans échange du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14 \end{cases}$$

Solution :

À la première étape, le pivot a_{11}vaut 1 et on soustrait de la deuxième (respectivement. troisième (respectivement. quatrième)) équation la première équation multipliée par 2 (respectivement. 3 (respectivement. 4)) pour obtenir :

$$A = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad b= \begin{vmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{vmatrix}$$

……

1

$2 - \frac{2}{1} 1 = 0$

$3 - \frac{3}{1} 1 = 0$

$4 - \frac{4}{1} 1 = 0$

11

……

2

$3 - \frac{2}{1}\ 2=-1$

$4 - \frac{3}{1}\ 2=-2$

$1 - \frac{4}{1}\ 2=-7$

$12 - \frac{2}{1}\ 11=-10$

……

3

$4 - \frac{2}{1}\ 3=-2$

$1 - \frac{3}{1}\ 3=-8$

$2 - \frac{4}{1}\ 3=-10$

$13 - \frac{3}{1}\ 11=-20$

……

4

$1 - \frac{2}{1}\ 4=-7$

$2- \frac{3}{1}\ 4=-10$

$3 - \frac{4}{1}\ 4=-13$

$14 - \frac{4}{1}11 = -30$

$$
i = 1,\ A^{(1)} = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{array}\right| \quad b^{(1)} = \left|\begin{array}{c} 11 \\ -10 \\ -20 \\ -30 \end{array}\right|
$$

Le pivot a_{22} vaut -1 à la deuxième étape. On retranche alors à la troisième (resp. quatrième) équation la deuxième équation multipliée par -2 (resp. -7), d'où le système :

$$
i = 2,\ A^{(2)} = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & -7 \\ 0 & -2 - \frac{-2}{-1}(-1) & -8 - \frac{-2}{-1}(-2) & -10 - \frac{-2}{-1}(-7) \\ 0 & -7 - \frac{-7}{-1}(-1) & -10 - \frac{-7}{-1}(-2) & -13 - \frac{-7}{-1}(-7) \end{array}\right| \quad b^{(2)} = \left|\begin{array}{c} 11 \\ -10 \\ -20 - \frac{-2}{-1}(-10) \\ -30 - \frac{-7}{-1}(-10) \end{array}\right|
$$

$$
i = 2,\ A^{(2)} = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & -7 \\ 0 & 0 & \mathbf{-4} & +4 \\ 0 & 0 & +4 & 36 \end{array}\right| \quad b^{(2)} = \left|\begin{array}{c} 11 \\ -10 \\ 0 \\ 40 \end{array}\right|
$$

À la dernière étape, le pivot est égal à -4 et on soustrait à la dernière équation l'avant-dernière multipliée par -1 pour arriver à :

$$
i = 3,\ A^{(3)} = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & +4 \\ 0 & 0 & +4 - \frac{4}{-4}(-4) & 36 - \frac{4}{-4}4 \end{array}\right| \quad b^{(3)} = \left|\begin{array}{c} 11 \\ -10 \\ 0 \\ 40 - \frac{4}{-4}0 \end{array}\right|
$$

$$
i = 3,\ A^{(3)} = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & +4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{array}\right| \quad b^{(3)} = \left|\begin{array}{c} 11 \\ -10 \\ 0 \\ 40 \end{array}\right|
$$

La solution du système d'origine est :

$x_4 = \frac{40}{40} = 1$

$-4\,x_3 + 4\,x_4 = 0 \rightarrow x_3 = 1$

$-x_2 - 2\,x_3 - 7\,x_4 = -10 \rightarrow x_2 = 1$

$x_1 + 2x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4 = 11 \rightarrow x_1 = 2$

$$X = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

<u>Exercice 4-3 :</u>

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -6 \end{cases}$$

1- Résoudre par élimination.

2- Résoudre par pivot partiel à partir de l'étape 2.

3- Résoudre par pivot total à partir de l'étape 2.

<u>Solution :</u>

On note :

Ax = b

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{vmatrix}$$

<u>1ère élimination :</u>

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \end{array}\right|$$

2ème élimination :

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{array}\right|$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 2 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ 7x_3 &= -7 \end{aligned}$$

La solution est :

$$X = \left|\begin{array}{c} 5 \\ -1 \\ -1 \end{array}\right|$$

2-

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{-7}{3} & \frac{7}{3} \end{array}\right|$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 3x_2 + 4x_3 &= -7 \\ \frac{-7}{3}x_3 &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

La solution est :

$$X = \left|\begin{array}{c} 5 \\ -1 \\ -1 \end{array}\right|$$

3-

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & -7 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{-7}{4} \end{array}\right|$$

$$2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2$$
$$4x_2 + 3x_3 = -7$$
$$\frac{7}{4}x_3 = \frac{-7}{4}$$

La solution est :

$$X = \left|\begin{array}{c} 5 \\ -1 \\ -1 \end{array}\right|$$

Exercice 4-4 :

Résoudre le système suivant en utilisant la méthode de Gauss avec pivot partiel :

$$A = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 8 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 10 \end{array}\right| \quad X = \left|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\right| \quad b = \left|\begin{array}{c} 6 \\ -2 \\ -8 \\ 4 \end{array}\right|$$

Solution :

On a une matrice (4x4), on aura donc 3 étapes d'éliminations :

1ère élimination :

$$Max(|1|; |8|; |2|; |2|) = 8$$

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 8 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 6 & 2 & 6 \\ 2 & 9 & 1 & 3 & -8 \\ 2 & 1 & -3 & 10 & 4 \end{array}\right|$$

1 -$\frac{1}{8}$ $8 = 0$

2 -$\frac{1}{8}$ $(-1) = \frac{17}{8}$

6 -$\frac{1}{8}$ $(-2) = \frac{25}{4}$

2 -$\frac{1}{8}$ $(-2) = \frac{9}{4}$

6 -$\frac{1}{8}$ $(-2) = \frac{25}{4}$

…………………….

2 -$\frac{2}{8}$ $8 = 0$

9 -$\frac{2}{8}$ $(-1) = \frac{37}{4}$

1 -$\frac{2}{8}$ $(-2) = \frac{3}{2}$

3 -$\frac{2}{8}$ $(-2) = \frac{13}{4}$

-8 -$\frac{2}{8}$ $(-2) = -\frac{31}{4}$

…………………….

2 -$\frac{2}{8}$ $8 = 0$

1 -$\frac{2}{8}$ $(-1) = \frac{5}{4}$

-3 -$\frac{2}{8}$ $(-2) = -\frac{11}{4}$

10 -$\frac{2}{8}$ $(-2) = \frac{41}{4}$

4 -$\frac{2}{8}$ $(-2) = \frac{17}{4}$

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 8 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & \frac{17}{8} & \frac{25}{4} & \frac{9}{4} & \frac{25}{4} \\ 0 & \frac{37}{4} & \frac{3}{2} & \frac{13}{4} & -\frac{31}{4} \\ 0 & \frac{5}{4} & -\frac{11}{4} & \frac{41}{4} & \frac{17}{4} \end{array}\right|$$

<u>2ème élimination :</u>

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 8 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & \frac{17}{8} & \frac{25}{4} & \frac{9}{4} & \frac{25}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{437}{17} & -\frac{445}{68} & -\frac{2377}{68} \\ 0 & 0 & -\frac{437}{68} & \frac{607}{68} & \frac{39}{68} \end{array}\right|$$

3éme élimination

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 8 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & \frac{17}{8} & \frac{25}{4} & \frac{9}{4} & \frac{25}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{437}{17} & -\frac{445}{68} & -\frac{2377}{68} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{48841}{4624} & \frac{43061}{4624} \end{array}\right|$$

La solution est :

$$X=\left|\begin{array}{c} 0.087 \\ -1.346 \\ 1.14 \\ 0.882 \end{array}\right|$$

Exercice 4-5 :

Résoudre le système suivant en utilisant la méthode de Gauss avec pivot total :

$$A=\left|\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 5 \\ 7 & -2.249 & -3 \\ 10 & 15 & 20 \end{array}\right| \quad X=\left|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right| \quad b=\left|\begin{array}{c} 9 \\ 1.751 \\ 45 \end{array}\right|$$

Solution :

On a une matrice (3x3), on aura donc 2 étapes d'éliminations :

1ère élimination :

$$Max(|1| \dots\dots\dots\dots ; |20|) = 20$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 5 & 9 \\ 7 & -2.249 & -3 & 1.751 \\ 10 & 15 & 20 & 45 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 3 & 9 \\ -3 & -2.249 & 7 & 1.751 \\ 20 & 15 & 10 & 45 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 20 & 15 & 10 & 45 \\ -3 & -2.249 & 7 & 1.751 \\ 5 & 1 & 3 & 9 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 20 & 15 & 10 & 45 \\ 0 & 0.001 & 8.5 & 8.501 \\ 0 & -2.75 & 0.5 & -2.25 \end{array}\right|$$

2ème élimination :

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 20 & 15 & 10 & 45 \\ 0 & 0.001 & 8.5 & 8.501 \\ 0 & 0 & 23375.5 & 23375.4 \end{array}\right|$$

La solution est :

$$X=\left|\begin{array}{c} 0.9625 \\ 1.05 \\ 0.9999 \end{array}\right|$$

4.2- Méthode LU :

Rappel :

On considère un système : $A\,x = b$. Il s'écrit sous ma forme : $LU\,x = b$. Avec : $L\,y\; = b$ et $U\,x = y$.

A = L U

- L est une matrice triangulaire inferieure (Lower), dont les éléments de la diagonale sont égaux à l'unité ($L_{ii} = 1$ et $L_{ij} = 0$; $i<j$).
- U (Upper) est une matrice triangulaire supérieure ($U_{ij} = 0$; $i>j$).

Exercice 4-6 :

En utilisant la méthode de factorisation LU résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2 \end{cases}$$

$$A=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix} \quad X=\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \quad b=\begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{vmatrix}$$

Solution :

On note :

****A = L U**

N = 3

$$L=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{vmatrix} \qquad U=\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{vmatrix}$$

$1^* U_{11}+0^*0+0^*0 =2 \rightarrow U_{11}=2$

$L_{21}^* U_{11}+1^*0+0^*0=4 \rightarrow L_{21}=2$

$L_{31}^* U_{11}+ L_{32}^*0+1^*0=-2 \rightarrow L_{31}=-1$

……

$1^* U_{12}+0^* U_{22}+0^*0=3 \rightarrow U_{12}= 3$

$L_{21}^* U_{12}+1^* U_{22}+0^*0=4 \rightarrow U_{22}=-2$

$L_{31}^* U_{12}+ L_{32}^* U_{22}+1^*0=3 \rightarrow L_{32}=-3$

……

$1^* U_{13}+0^* U_{23}+0^* U_{33}=-1 \rightarrow U_{13}=-1$

$L_{21}^* U_{13}+1^* U_{23}+0^* U_{33}=-3 \rightarrow U_{23}=-1$

$L_{31}^* U_{13}+ L_{32}^* U_{23}+1^* U_{33}=-4 \rightarrow U_{33}=-7$

$$L=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \qquad U=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

****Ly = b**

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$1^*y_1+0^*y_2+ 0^*y_3 =1 \Rightarrow 1^*y_1=1$

$2^*y_1+1^*y_2+ 0^*y_3 = 4 \Rightarrow 2^*1+1^*y_2=4$

$-1*y_1-3*y_2+1*y_3 = -2 \Rightarrow -1*1-3*2+1*y_3 = -2$

$$Y = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{vmatrix}$$

** **UX = y**

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{vmatrix}$$

$2*x_1+3*x_2-1*x_3= 1 \rightarrow x_1=1.0461$

$0*x_1-2*x_2-1*x_3= 2 \rightarrow x_2=-0.6423$

$0*x_1+0*x_2-7*x_3= 5 \rightarrow x_3=-\frac{5}{7}= -0.7143$

La solution est :

$$X = \begin{vmatrix} 1.0461 \\ -0.643 \\ -0.7143 \end{vmatrix}$$

Exercice 4-7 :

Considérons la matrice : A x= b. En utilisant la méthode de factorisation LU résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \quad b= \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{vmatrix}$$

Solution :

On note :

****A = L U**

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & 1 \end{vmatrix} \quad U = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{vmatrix}$$

$1* U_{11}+0*0+0*0+0*0$

$L_{21}* U_{11}+1*0+0*0+0*0$

$L_{31}* U_{11}+ L_{32}*0+1*0+0*0$

$L_{41}* U_{11}+ L_{42}*0+ L_{43}*0+1*0$

………

$1* U_{12}+0* U_{22}+0*0+0*0$

$L_{21}* U_{12}+1* U_{22}+0*0+0*0$

$L_{31}* U_{12}+ L_{32}* U_{22}+1*0+0*0$

$L_{41}* U_{12}+ L_{42}* U_{22}+ L_{43}*0+1*0$

………

$1* U_{13}+0* U_{23}+0* U_{33}+0*0$

$L_{21}* U_{13}+1* U_{23}+0* U_{33}+0*0$

$L_{31}* U_{13}+ L_{32}* U_{23}+1* U_{33}+0*0$

$L_{41}* U_{13}+ L_{42}* U_{23}+ L_{43}* U_{33}+1*0$

………

$1* U_{14}+0* U_{24}+0* U_{34}+0* U_{44}$

$L_{21}* U_{14}+1* U_{24}+0* U_{34}+0* U_{44}$

$L_{31}* U_{14}+ L_{32}* U_{24}+1* U_{34}+0* U_{44}$

$L_{41}* U_{14}+ L_{42}* U_{24}+ L_{43}* U_{34}+1* U_{44}$

………

$1* U_{11} = 1 \rightarrow U_{11} = 1$

$L_{21}* U_{11}= L_{21}* 1=2$

$L_{31}* U_{11} =L_{31}* 1=3$

$L_{41}* U_{11}= L_{41}*1=-1$

………

$1* U_{12} = 1\rightarrow U_{12}=1$

$L_{21}* U_{12}+1* U_{22}\rightarrow 2* 1+1* U_{22}=1$

$L_{31}* U_{12}+ L_{32}* U_{22} \rightarrow 3* 1+ L_{32}*(-1)=-1$

$L_{41}* U_{12}+ L_{42}* U_{22}\rightarrow(-1)* 1+ L_{42}* (-1)=2$

………

$1* U_{13}= 0\rightarrow U_{13} = 0$

$L_{21}*U_{13}+1*U_{23} \rightarrow 2*0+1*U_{23}=-1$

$L_{31}*U_{13}+L_{32}*U_{23}+1*U_{33} \rightarrow 3*0+4*(-1)+1*U_{33}=-1$

$L_{41}*U_{13}+L_{42}*U_{23}+L_{43}*U_{33} \rightarrow (-1)*0+(-3)*(-1)+L_{43}*3=3$

………

$1*U_{14}=3 \rightarrow U_{14}=3$

$L_{21}*U_{14}+1*U_{24} \rightarrow 2*3+1*U_{24}=1$

$L_{31}*U_{14}+L_{32}*U_{24}+1*U_{34} \rightarrow 3*3+4*(-5)+1*U_{34}=2$

$L_{41}*U_{14}+L_{42}*U_{24}+L_{43}*U_{34}+1*U_{44} \rightarrow (-1)*3+(-3)*(-5)+0*13+1*U_{44}=-1$

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad U = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{vmatrix}$$

****Ly = b**

$$l = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$1*y_1+0*y_2+0*y_3+0*y_4=4 \Rightarrow 1*y_1=4$

$2*y_1+1*y_2+0*y_3+0*y_4=1 \Rightarrow 2*4+1*y_2=1$

$3*y_1+4*y_2+1*y_3+0*y_4=-3 \Rightarrow 3*4+4*(-7)+1*y_3=-3$

$-1*y_1+(-3)*y_2+0*y_3+1*y_4=4 \Rightarrow -1*4+(-3)*(-7)+0*13+1*y_4=4$

$$Y = \begin{vmatrix} 4 \\ -7 \\ 13 \\ -13 \end{vmatrix}$$

**** UX = y**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ -7 \\ 13 \\ -13 \end{vmatrix}$$

$1*x_1+1*x_2+0*x_3+3*x_4 = 4 \rightarrow x_1+2+0+3*1=4 \rightarrow x_1=-1$

$0*x_1-1*x_2-1*x_3-5*x_4 = -7 \rightarrow -x_2-0-5*1=-7 \rightarrow x_2=2$

$0*x_1+0*x_2+3*x_3+13*x_4 = 13 \rightarrow 3*x_3+13=13 \rightarrow x_3=0$

$0*x_1+0*+0*x_3-13*x_4 = -13 \rightarrow x_4 = 1$

La solution est :

$$X = \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

4.3- <u>Méthode de Cholesky :</u>

<u>Rappel :</u>

On résout alors le système $A\ x = b$, avec A une matrice symétrique ($\forall$i,j $a_{ij}=a_{ji}$) et définie positive (Det $a_{ii}>0$). il existe une matrice triangulaire inférieure $A = L\,L^T$. En résolvant d'abord $Ly = b$ puis le système $L^T\ x = y$.

<u>Exercice 4-8 :</u>

Soit le système d'équations :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 14 \\ x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$$

1) Montrer que ce système peut être résolu par la méthode de Cholesky.

2) En utilisant la méthode de Cholesky résoudre ce système.

<u>Solution :</u>

$$A= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad X= \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \quad b= \begin{vmatrix} 4 \\ 14 \\ 12 \end{vmatrix}$$

** Vérifions si A est symétrique : $A^T = A$ ($A_{IJ} = A_{JI}$)

$$A^T = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

1) ** Vérifions si A est positive :

Det $a_{ii}>0$

- Det 1 = a_{11} = 2

- Det 2 = $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$

Det 2 = (2*6)-(3*3)=3

Det 2 = 3

- Det 3 = 2*(6*2-1*1)-3*(3*2-1*0)+0* (3*1+6*0)=4

Det 3 = 4

2)**Notons A = L L^T / matrice triangulaire inferieure

$$L * L^T = \begin{vmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$L_{11}^2 + 0*0+0*0 = 2 \rightarrow L_{11} = \sqrt{2}$

$L_{11}* L_{21}+ 0* L_{22}+0*0 = 3 \rightarrow \sqrt{2} * L_{21} = 3 \rightarrow L_{21} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$L_{11}* L_{31}+ 0* L_{32}+0* L_{33} = 0 \rightarrow \sqrt{2} * L_{31} = 0 \rightarrow L_{31} = 0$

………………………………………………………………………………………………………

$L_{21}* L_{11}+ L_{22}*0+0*0 = 3$

$L_{21}* L_{21}+ L_{22}* L_{22}+0*0 = 6 \rightarrow L_{21}{}^2 + L_{22}{}^2 = 6 \rightarrow (\frac{3}{\sqrt{2}})^2 + L_{22}{}^2 = 6 \rightarrow L_{22} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$L_{21}* L_{31}+ L_{22}* L_{32}+0* L_{33} = 1 \rightarrow \frac{3}{\sqrt{2}} * 0 + \sqrt{\frac{3}{2}} * L_{32} = 1 \rightarrow L_{32} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

………………………………………………………………………………………………………

$L_{31}* L_{11} + L_{32}*0+ L_{33}*0=0$

$L_{31}* L_{21} + L_{32}* L_{22}+ L_{33}* 0=1$

$L_{31}* L_{31} + L_{32}* L_{32}+ L_{33}* L_{33}=2 \rightarrow 0* 0 + \sqrt{\frac{2}{3}} * \sqrt{\frac{2}{3}} + L_{33}^2 = 2 \rightarrow L_{33} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$L=\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} \qquad L^T=\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}$$

** **Ly = b**

$$L=\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 14 \\ 12 \end{vmatrix}$$

$\sqrt{2} * y_1 + 0 * y_2 + 0 * y_3 = 4 \rightarrow y_1 = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2.82843$

$\frac{3}{\sqrt{2}} * y_1 + \sqrt{\frac{3}{2}} * y_2 + 0 * y_3 = 14 \rightarrow y_2 = 6.532$

$0 * y_1 + \sqrt{\frac{2}{3}} * y_2 + * \frac{2}{\sqrt{3}} * y_3 = 12 \rightarrow y3 = 5.7735$

$$Y=\begin{vmatrix} 2.82843 \\ 6.532 \\ 5.7735 \end{vmatrix}$$

****L^T^ x = y**

$0 * x_1 + 0 * x_2 + \frac{2}{\sqrt{3}} * x_3 = 5.7735 \rightarrow x_3 = 5$

$0 * x_1 + \sqrt{\frac{3}{2}} * x_2 + \sqrt{\frac{2}{3}} * x_3 = 6.532 \rightarrow x_2 = 2$

$\sqrt{2} * x_1 + \frac{3}{\sqrt{2}} * x_2 + 0 * x_3 = 2.82843 \rightarrow x_1 = -1$

$$L^T=\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2.82843 \\ 6.532 \\ 5.7735 \end{vmatrix}$$

La solution est :

$$X = \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{vmatrix}$$

Exercice 4-9 :

Considérons la matrice : A x= b. En utilisant la méthode de Cholesky ; résoudre ce système.

On donne :

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Solution :

** Vérifions si A est symétrique : $A^T = A$

$$A^T = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

** Vérifions si A est positive :

Det $a_{ii} > 0$

- Det 1 = a_{11} = 3

- Det 2 = $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

Det 2 = (3*1)-((-1)*(-1))=2

Det 2 = 2

- Det 3 = 3*(1*1-0*0)- (-1)*(-1*1-1*0)+1*(-1*0-1*1)=1

Det 3 =1

**Notons A = L L^T / matrice triangulaire inferieure

$$L * L^T = A \Rightarrow \begin{vmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$L_{11}^2 + 0*0+0*0 = 3 \rightarrow L_{11} = \sqrt{3}$

$L_{11}* L_{21}+ 0* L_{22}+0*0 = -1 \rightarrow \sqrt{3} * L_{21} = -1 \rightarrow L_{21} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$L_{11}* L_{31}+ 0* L_{32}+0* L_{33} = 1 \rightarrow \sqrt{3} * L_{31} = 1 \rightarrow L_{31} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

……………………………………………………………………………………………………

$L_{21}* L_{11}+ L_{22}*0+0*0 = -1$

$L_{21}* L_{21}+ L_{22}* L_{22}+0*0 = 1 \rightarrow L_{21}{}^2 + L_{22}{}^2 = 1 \rightarrow (\frac{-1}{\sqrt{3}})^2 + L_{22}{}^2 = 1 \rightarrow L_{22} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$L_{21}* L_{31}+ L_{22}* L_{32}+0* L_{33} = 0 \rightarrow \frac{-1}{\sqrt{3}} * \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}} * L_{32} = 0 \rightarrow L_{32} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$

……………………………………………………………………………………………………

$L_{31}* L_{11} + L_{32}*0+ L_{33}*0=1$

$L_{31}* L_{21} + L_{32}* L_{22}+ L_{33}* 0=0$

$L_{31}* L_{31} + L_{32}* L_{32}+ L_{33}* L_{33}=1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} + L_{33}{}^2 = 1 \rightarrow L_{33} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$L= \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \qquad L^T = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

** **Ly = b**

$$L = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$\sqrt{3} * y1 +0* y2+0* y3= 1 \rightarrow y1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.57735$

$\frac{-1}{\sqrt{3}} * y1 + \sqrt{\frac{2}{3}} * y2 +0* y3 = 2 \rightarrow y2 =2.85773$

$\frac{1}{\sqrt{3}} * y1 + \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} * y2+\frac{1}{\sqrt{2}} * y3 = 1 \rightarrow y3 =-0.70710$

$$Y = \begin{vmatrix} 0.57735 \\ 2.85773 \\ -0.70710 \end{vmatrix}$$

****L^T x = y**

$$L^T = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.57735 \\ 2.85773 \\ -0.70710 \end{vmatrix}$$

$0*x_1+0*x_2+\frac{1}{\sqrt{2}} * x_3 = -0.70710 \rightarrow x_3 = -1$

$0*x_1+\sqrt{\frac{2}{3}} * x_2 + \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} * x_3 = 2.85773 \rightarrow x_2 = 4$

$\sqrt{3}*x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}*x_2 +\frac{1}{\sqrt{3}}*x_3 = 0.57735 \rightarrow x_1 = 2$

La solution est :

$$X = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{vmatrix}$$

<u>Exercice 4-10 :</u>

On considère la matrice A et le vecteur b suivant :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha^2 & 0 & \alpha^2 \end{vmatrix} \quad b= \begin{vmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha \end{vmatrix}$$

1- Pour quelle valeur de α la matrice A est symétrique définie positive.
2- Pour une valeur de $= \frac{1}{2}$, donner la decomposition Cholesky et resoudre le système en utilisant cette decomposition.

<u>Solution :</u>

1-

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha^2 & 0 & \alpha^2 \end{vmatrix} \quad b= \begin{vmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha \end{vmatrix}$$

** Vérifions si A est symétrique : $A^T = A / \forall \alpha \in R$

$$A^T = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha^2 & 0 & \alpha^2 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha^2 & 0 & \alpha^2 \end{vmatrix}$$

** Vérifions si A est positive :

Det a_{ii}>0; i=1;2;3

- Det 1 = a_{11} = 1>0

- Det 2 = $\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix}$

Det 2 = $(1\text{-}\alpha) - \alpha^2 = \alpha(1\text{-}\alpha)$

- Det 3 = $1*(\alpha^3)\text{-}\alpha*(\alpha^3)+\alpha^2*(\alpha^3) = \alpha^3 - \alpha^4+\alpha^5 = \alpha^3(1 - \alpha+\alpha^2)$

α_1=0; $\alpha_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $\alpha_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Det 3 = $(1 - \alpha+\alpha^2)$>0 si $\alpha \in]-\infty, \alpha_3[\sqcup]0, \alpha_2[$

Donc A est symétrique si $\alpha \in \left]0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[$

2- Pour $\alpha = \frac{1}{2}$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{vmatrix}$$

**Notons $A = L\,L^T$ / matrice triangulaire inferieure

$$L * L^T = \begin{vmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{vmatrix}$$

$$L=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 1/2\sqrt{2} \end{vmatrix} \qquad L^T=\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/2\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

La solution est :

$$X=\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Exercice 4-11 :

Considérons la matrice : A x= b. En utilisant la méthode de Cholesky résoudre ce système :

$$A=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad b=\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$$

Solution :

$$L=\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{vmatrix} \qquad L^T=\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{vmatrix}$$

La solution est :

$$X=\begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

4.4- Méthode Tri diagonal :

Rappel :

On considère le système tri diagonal : $A\,x=b$, de n équations avec N inconnus, avec : $a1 = 0$ et $C_n = 0$.

Dans ce cas, les matrices L et U de la factorisation LU de A sont des matrices bi-diagonales de la forme : A = L U, avec : L est une matrice triangulaire, dont les éléments de la diagonale sont égaux à l'unité ($L_{ii} = 1$).

$$
A = \left|\begin{array}{cccccccc}
b1 & c1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\
a2 & b2 & c2 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & a3 & b3 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & & & & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & & & & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & an-1 & bn-1 & cn-1 \\
 & & & & & & an & bn
\end{array}\right|
\left|\begin{array}{c}
x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ \\ \\ x_{n-1} \\ x_n
\end{array}\right|
=
\left|\begin{array}{c}
b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \\ \\ \\ b_{n-1} \\ b_n
\end{array}\right|
$$

$$L_{n,n-1} = \frac{a_n}{U_{n-1,n-1}}$$

$$U_{n-1,n} = C_{n-1}$$

$$U_{n,n} = b_n - L_{n,n-1}U_{n-1,n}$$

Pour k = 1, n :

$$L_{k,k-1} = \frac{a_k}{U_{k-1,k-1}}$$

$$U_{k-1,k} = C_{k-1}$$

$$U_{k,k} = b_k - L_{k,k-1}U_{k-1,k}$$

Si : L U x = b. Posons : Ly = b,

avec : $y_1 = b_1$

Pour k = 2, n : $y_k = b_k - L_{k,k-1}y_{k-1}$

Posons U x = y : $x_n = \frac{y_n}{U_{n,n}}$

Pour k = n-1, 1 :

$$x_k = \frac{y_k - \sum_{j=k+1}^{n} U_{kj}x_j}{U_{k,k}}$$

Exercice 4-12 :

En utilisant la méthode Thomas résoudre le système d'équations tri diagonal linéaires suivant :

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \\ -x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$$

Solution :

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \\ 7 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} b1 = 3 & c1 = -1 & 0 & 0 \\ a2 = -1 & b2 = 3 & c2 = -1 & 0 \\ 0 & a3 = -1 & b3 = 3 & c3 = -1 \\ 0 & 0 & a4 = -1 & b4 = 3 \end{vmatrix} \quad d \quad \begin{vmatrix} d1 = -1 \\ d2 = 7 \\ d3 = 1 \\ d4 = 7 \end{vmatrix}$$

Avec : N = 4, a1 = 0, c4 = 0

A= L U

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & L_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & L_{43} & 1 \end{vmatrix}$$

$$U = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & 0 & 0 \\ 0 & U_{22} & U_{23} & 0 \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{vmatrix}$$

$$L_{n,n-1} = \frac{a_n}{U_{n-1,n-1}}$$

$$U_{n-1,n} = c_{n-1}$$

$$U_{n,n} = b_n - L_{n,n-1} U_{n-1,n}$$

U_{11} = b1 = 3

Pour : k = 2

$L_{21} = \frac{a_2}{U_{11}} = -\frac{1}{3}$

U_{12} = c1 = -1

$U_{22} = b2 - L_{21} * U_{12} = 3 - (-\frac{1}{3}) * (-1) = \frac{8}{3}$

Pour : k = 3

$L_{32} = \frac{a_3}{U_{22}} = -\frac{1}{\frac{8}{3}} = -\frac{3}{8}$

U_{23} = c2 = -1

$U_{33} = b3 - L_{32} * U_{23} = 3 - (-\frac{3}{8}) * (-1) = \frac{21}{8}$

Pour : k = 4

$L_{43} = \frac{a_4}{U_{33}} = -\frac{1}{\frac{21}{8}} = -\frac{8}{21}$

U_{34} = c3 = -1

$U_{44} = b4 - L_{43} * U_{34} = 3 - (-\frac{8}{21}) * (-1) = +\frac{55}{21}$

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{21} & 1 \end{vmatrix} \qquad U = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{8}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{21}{8} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{55}{21} \end{vmatrix}$$

Ou bien on procède par le calcule classique pour déterminer les éléments des deux matrices L et U.

A = L U

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & L_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & L_{43} & 1 \end{vmatrix} \qquad U = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & 0 & 0 \\ 0 & U_{22} & U_{23} & 0 \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{vmatrix}$$

$1 * U_{11} + 0*0 + 0*0 + 0*0 = 3 \rightarrow U_{11} = 3$

$1 * U_{12} + 0 * U_{22} + 0*0 + 0*0 = -1 \rightarrow U_{12} = -1$

$1 * 0 + 0 * U_{23} + 0 * U_{33} + 0*0 = 0$

$1*0 + 0*0 + 0 * U_{34} + 0 * U_{44} = 0$

…………………………….

$L_{21} * U_{11} + 1*0+0*0+0*0= -1 \rightarrow L_{21} = -\frac{1}{3}$

$L_{21} * U_{12} + 1* U_{22} + 0*0+0*0 = 3 \rightarrow U_{22} = \frac{8}{3}$

$L_{21} * 0 + 1* U_{23} + 0* U_{33} + 0*0 = -1 \rightarrow U_{23} = -1$

$L_{21} * 0 + 1*0+0* U_{34} + 0* U_{44} = 0$

………………………………………………….

$0* U_{11} + L_{32} *0+1*0+0*0 = 0$

$0* U_{12} + L_{32} * U_{22} + 1*0+0*0 = -1 \rightarrow L_{32} = -\frac{3}{8}$

$0* 0 + L_{32} * U_{23} + 1* U_{33} + 0*0= 3 \rightarrow U_{33} = \frac{21}{8}$

$0* 0 + L_{32} *0+ 1* U_{34} + 0* U_{44} = -1 \rightarrow U_{34} = -1$

…………………………………………………………………….

$0* U_{11} + 0*0+ L_{43} *0+1*0 = 0$

$0* U_{12} + 0* U_{22} + L_{43} *0+1*0 = 0$

$0* 0 + 0* U_{23} + L_{43} * U_{33} + 1*0= -1 \rightarrow L_{43} = -\frac{8}{21}$

$0* 0 + 0*0+ L_{43} * U_{34} + 1* U_{44} = 3 \rightarrow U_{44} = \frac{55}{21}$

Posons : **Ly = d**

avec :

y1 = d1= -1

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{21} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d1= -1 \\ d2 = 7 \\ d3 = 1 \\ d4 = 7 \end{vmatrix}$$

Pour : k = 2, 3,4

$y_k = d_k - L_{k,k-1} \, y_{k-1}$

$y_2 = d2 - L_{21} \, y_1 = 7 -(-\frac{1}{3}) (-1) = 6.7$

$y_3 = d3 - L_{32} \, y_2 = 1 -(-\frac{3}{8}) 6.7 = 3.5125$

$y_4 = d4 - L_{43} \, y_3 = 7 - (-\frac{8}{21}) 3.5125 = 8.34$

$$Y = \begin{vmatrix} -1 \\ 6.7 \\ 3.5125 \\ 8.34 \end{vmatrix}$$

Posons : **U x = y**

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{8}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{21}{8} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{55}{21} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 6.7 \\ 3.5125 \\ 8.34 \end{vmatrix}$$

$$x_k = \frac{y_N}{U_{N,N}}$$

$$x_k = \frac{y_k - \sum_{j=k+1}^{N} U_{kj} x_j}{U_{k,k}}$$

$$x_4 = \frac{y4}{U_{44}} = \frac{8.34}{\frac{55}{21}} = 3.2$$

Pour : k = 3

$$x_3 = \frac{y_3 - U_{34} x_4}{U_{33}} = \frac{3.5125 - (-1) * 3.2}{\frac{21}{8}} = 2.55$$

Pour : k = 2

$$x_2 = \frac{y_2 - \sum_{j=3}^{4} U_{kj} x_j}{U_{22}} = \frac{y_2 - (U_{23} x_3 + U_{24} x_4)}{U_{22}} = \frac{6.7 - ((-1) * 2.55 + 0 * 3.2)}{(+\frac{8}{3})} = 3.5$$

Pour : k = 1

$$x_1 = \frac{y_1 - \sum_{j=2}^{4} U_{kj} x_j}{U_{11}} = \frac{y_1 - (U_{12} x_2 + U_{13} x_3 + U_{14} x_4)}{U_{11}}$$

$$= \frac{(-1) - ((-1) * 3.5 + 0 * 2.55 + 0 * 3.2)}{3} = 0.833$$

La solution est :

$$X = \begin{vmatrix} 0.833 \\ 3.5 \\ 2.55 \\ 3.2 \end{vmatrix}$$

Exercice 4-13 :

Considérons le système tri diagonal suivant : **Ax = d.** En utilisant la méthode Thomas résoudre le système d'équations tri diagonal linéaires suivant :

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{vmatrix}$$

Solution :

$$A = \begin{vmatrix} b1 = 2 & c1 = 1 & 0 \\ a2 = 1 & b2 = 2 & c2 = 1 \\ 0 & a3 = 1 & b3 = 2 \end{vmatrix} \quad d \quad \begin{vmatrix} d1 = 4 \\ d2 = 8 \\ d3 = 8 \end{vmatrix}$$

Avec : N = 3, a1 = 0, c3 = 0

A= L U

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ 0 & L_{32} & 1 \end{vmatrix} \quad U = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & 0 \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{vmatrix}$$

$$L_{n,n-1} = \frac{a_n}{U_{n-1,n-1}}$$

$$U_{n-1,n} = c_{n-1}$$

$$U_{n,n} = b_n - L_{n,n-1} U_{n-1,n}$$

U_{11} = b1 = 2

Pour : k = 2

$L_{21} = \frac{a_2}{U_{11}} = \frac{1}{2}$

U_{12} = c1 = 1

$U_{22} = b2 - L_{21} * U_{12} = 2 - \frac{1}{2} * 1 = \frac{3}{2}$

Pour : k = 3

$L_{32} = \frac{a_3}{U_{22}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

U_{23} = c2 = 1

$U_{33} = b3 - L_{32} * U_{23} = 2 - \frac{2}{3} * 1 = \frac{4}{3}$

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{vmatrix} \qquad U = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{vmatrix}$$

Ou bien on procède par le calcule classique pour déterminer les éléments des deux matrices L et U.

A = L U

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ 0 & L_{32} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & 0 \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{vmatrix}$$

$1^* U_{11} +0^*0+0^*0 = 2 \rightarrow U_{11} =2$

$1^* U_{12} +0^* U_{22}+0^*0 = 1 \rightarrow U_{12} =1$

$1^* 0 +0^* U_{23}+0^* U_{33} = 0$

……………………………

$L_{21}^* U_{11} +1^*0+0^*0 = 1 \rightarrow L_{21} = \frac{1}{2}$

$L_{21}^* U_{12} +1^* U_{22} +0^*0 = 2 \rightarrow U_{22} = \frac{3}{2}$

$L_{21}^* 0 +1^* U_{23} +0^* U_{33} = 1 \rightarrow U_{23} = 1$

…………………………………………………

$0^* U_{11} + L_{32}^*0+1^*0 = 0$

$0^* U_{12} + L_{32}^* U_{22} +1^*0 = 1 \rightarrow L_{32} = \frac{2}{3}$

$0^* 0 + L_{32}^* U_{23} +1^* U_{33} = 2 \rightarrow U_{23} = \frac{4}{3}$

Posons : **Ly = d**

Avec :

y1 = d1= 4

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{vmatrix}$$

Pour : k = 2, N

$y_k = d_k - L_{k,k-1}\, y_{k-1}$

$y_2 = d2 - L_{21}\, y_1 = 8 - \frac{1}{2}\, 4 = 6$

$y_3 = d3 - L_{32}\, y_2 = 8 - \frac{2}{3}\, 6 = 4$

$$Y = \begin{vmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{vmatrix}$$

Posons : **U x = y**

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$x_N = \frac{y_N}{U_{N,N}}$

$$x3 = \frac{y3}{U_{33}} = \frac{4}{\frac{4}{3}} = 3$$

Pour : k = 2, 1 :

$$x_k = \frac{y_k - \sum_{j=k+1}^{N} U_{kj} x_j}{U_{k,k}}$$

$$x_2 = \frac{y_2 - U_{23} x_3}{U_{22}} = \frac{6 - 1 * 3}{\frac{3}{2}} = 2$$

$$x_1 = \frac{y_1 - (U_{12} x_2 + U_{13} x_3)}{U_{11}} = \frac{4 - (1 * 2 + 0 * 3)}{2} = 1$$

La solution est :

$$X = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

4.5- Méthode de Cramer :

Rappel :

On considère des systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues $(x_1; x_2)$ de la forme :

$$\begin{cases} a_1\, x_1 + \; b_1\, x_2 = \; c_1 \\ a_2\, x_1 + \; b_2\, x_2 = \; c_2 \end{cases}$$

Où :

$a_1 b_1 c_1 a_2 b_2 c_2$ sont des constantes fixées.

Le déterminant du système est défini par :

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Dans ce cas, les formules de Cramer pour le système donnent l'expression des solutions en fonction des coefficients du système :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Exercice 4-14 :

Résoudre avec la méthode de Cramer le système suivant :

$$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 = 2 \\ -3x_1 - 3x_2 = -5 \end{cases}$$

Solution :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-6 + 35}{-27 + 21} = -\frac{29}{6}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-45 + 6}{-27 + 21} = \; 6.5$$

La solution est :

$$X = \begin{vmatrix} -29/6 \\ 6.5 \end{vmatrix}$$

Exercice 4-15 :

Résoudre avec la méthode de Cramer le système suivant :

$$\begin{cases} 9x_1 + x_2 = 7 \\ -3x_1 + x_3 = -8 \\ x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$$

Solution :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{7*(-1)-(-16+3)}{2*(-1)-(-6)} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -3 & -8 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2*(-16+3)-7*(-6)}{2*(-1)—6} = 4$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -3 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2*8-(-3*-3)+7*(-3)}{2*(-1)-(-6)} = -7/2$$

La solution est :

$$x = \begin{vmatrix} 3/2 \\ 4 \\ -7/2 \end{vmatrix}$$

Exercices non corrigés :

Exercice 4-17 :

Soit le système $A\,x = b$:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & a \\ -3 & 10 & 3 & -3a \\ 0 & 3 & 10 & 0 \\ a & -3a & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

- Calculer la matrice de Gauss-Seidel associée en précisant les valeurs de a pour lesquelles :

a- Cette décomposition est possible.

b- A est définie positive.

- Utiliser la décomposition LU pour calculer la matrice R de Cholesky.

- Pour a= 4/3. Déterminer la matrice R en utilisant l'algorithme de Cholesky. En déduire la solution de $\mathrm{A\ x = b}$:

- Comparer les deux méthodes (Gauss et Cholesky) dans le cas d'un système linéaire d'ordre n=4.

- Déterminer la matrice de Jacobi associée à la sous matrice d'ordre 3 ($A_{[3]}$) de A.

- Soit la matrice carrée d'ordre 4, $\mathrm{A} = \mathrm{a_{ij}}_{1\leq i,j\leq 4}$

$\forall i \in \{1,2,3,4\}\ \mathrm{a_{ii}} = (i-1)^2 + 1$

$\forall i \in \{1,2,3\}\ \mathrm{a_{i,i+1}} = \mathrm{a_{i+1,i}} = 1$

Déterminer la matrice de Cholesky associée à la matrice A.

CHAPITRE 5

Méthode de résolution approximative des systèmes d’équations linéaires

5.1- Méthode de Jacobi :

Rappel :

Etant donnes ; $[a,b]$; $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ et la précision ε :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\ x_j^{(k)}\right)}{a_{ii}} \quad \forall\ i = 1,2,\ldots\ldots,n$$

Exercice 5-1 :

Résoudre le système d'équations linéaires en utilisant la méthode de Jacobi avec une tolérance de $\varepsilon = 10^{-1}$:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Solution :

La méthode itérative converge si A est à diagonale strictement dominante :

$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$, $1 \leq i \leq n$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \qquad \begin{matrix} |2| \geq |-1| + |0| \\ |2| \geq |-1| + |-1| \\ |2| \geq |0| + |-1| \end{matrix}$$

$\rightarrow$ A est une matrice à diagonale strictement dominante

$$x_1^{(k+1)} = \frac{\left(b_1 - a_{12}\ x_2^{(k)} - a_{13}\ x_3^{(k)}\right)}{a_{11}} = \frac{\left(1 - (-1)x_2^{(k)} - 0\ x_3^{(k)}\right)}{2} = \frac{\left(1 + x_2^{(k)}\right)}{2}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{\left(b_2 - a_{21}\ x_1^{(k)} - a_{23}\ x_3^{(k)}\right)}{a_{22}} = \frac{\left(0 - (-1)x_1^{(k)} - (-1)\ x_3^{(k)}\right)}{2} = \frac{\left(x_1^{(k)} + x_3^{(k)}\right)}{2}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{\left(b_3 - a_{31}\ x_1^{(k)} - a_{32}\ x_2^{(k)}\right)}{a_{33}} = \frac{\left(1 - 0\ x_1^{(k)} - (-1)\ x_2^{(k)}\right)}{2} = \frac{\left(1 + x_2^{(k)}\right)}{2}$$

$X^{(0)} = (0,0,0)$

Itération 1, k=0 :

$$x_1^{(1)} = \frac{\left(1 + x_2^{(0)}\right)}{2} = \frac{(1+0)}{2} = 0.5$$

$$x_2^{(1)} = \frac{\left(x_1^{(0)} + x_3^{(0)}\right)}{2} = \frac{(0 + 0)}{2} = 0$$

$$x_3^{(1)} = \frac{\left(1 + x_2^{(0)}\right)}{2} = \frac{(1 + 0)}{2} = 0.5$$

$$X^{(1)} = \begin{vmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{vmatrix}$$

Test d'arrêt :

$\left| X^{(i+1)} - X^{(i)} \right| < \varepsilon$

$X^{(0)} - X^{(1)} =$

$|0.5 - 0| = |0.5| = 0.5 > \varepsilon = 10^{-1}$

$|0 - 0| = |0| = 0 < \varepsilon = 10^{-1}$

$|0.5 - 0| = |0.5| = 0.5 > \varepsilon = 10^{-1}$

Itération 2, k=1 :

$$x_1^{(2)} = \frac{\left(1 + x_2^{(1)}\right)}{2} = \frac{(1+0)}{2} = 0.5$$

$$x_2^{(2)} = \frac{\left(x_1^{(1)} + x_3^{(1)}\right)}{2} = \frac{(0.5 + 0.5)}{2} = 0.5$$

$$x_3^{(2)} = \frac{\left(1 + x_2^{(1)}\right)}{2} = \frac{(1 + 0)}{2} = 0.5$$

$$X^{(2)} = \begin{vmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{vmatrix}$$

$X^{(2)} - X^{(1)} =$

$|0.5 - 0.5| = |0| = 0 < \varepsilon = 10^{-1}$

$|0.5 - 0| = |0.5| = 0.5 > \varepsilon = 10^{-1}$

$|0.5-0.5|$=$|0|=0$< ε= 10^{-1}

Itération 3, k=2 :

$$x_1^{(3)} = \frac{\left(1 + x_2^{(2)}\right)}{2} = \frac{(1 + 0.5)}{2} = 0.75$$

$$x_2^{(3)} = \frac{\left(x_1^{(2)} + \ x_3^{(2)}\right)}{2} = \frac{(0.5 + \ 0.5)}{2} = 0.5$$

$$x_3^{(3)} = \frac{\left(1 + \ x_2^{(2)}\right)}{2} = \frac{(1 + \ 0.5)}{2} = 0.75$$

$$X^{(3)} = \begin{vmatrix} 0.75 \\ 0.5 \\ 0.75 \end{vmatrix}$$

$X^{(3)}$ - $X^{(2)}$ =

$|0.75-0.5|$=$|0.25|=0.25$> ε= 10^{-1}

$|0.5-0.5|$=$|0|=0$< ε= 10^{-1}

$|0.75-0.5|$=$|0.25|=0.25$> ε= 10^{-1}

Itération 4, k=3 :

$$x_1^{(4)} = \frac{\left(1 + x_2^{(3)}\right)}{2} = \frac{(1 + 0.5)}{2} = 0.75$$

$$x_2^{(4)} = \frac{\left(x_1^{(3)} + \ x_3^{(3)}\right)}{2} == \frac{(0.75 + \ 0.75)}{2} = 0.75$$

$$x_3^{(4)} = \frac{\left(1 + \ x_2^{(3)}\right)}{2} = \frac{(1 + \ 0.5)}{2} = 0.75$$

$$X^{(4)} = \begin{vmatrix} 0.75 \\ 0.75 \\ 0.75 \end{vmatrix}$$

$X^{(4)}$ - $X^{(3)}$ =

$|0.75-0.75|$=$|0|=0$< ε= 10^{-1}

$|0.75-0.5|$=$|0.25|=0.25$> ε= 10^{-1}

$|0.75-0.75|$=$|0|=0$< ε= 10^{-1}

Itération 5, k=4 :

$$x_1^{(5)} = \frac{\left(1 + x_2^{(4)}\right)}{2} == \frac{(1 + 0.75)}{2} = 0.875$$

$$x_2^{(5)} = \frac{\left(x_1^{(4)} + x_3^{(4)}\right)}{2} = \frac{(0.75 + 0.75)}{2} = 0.75$$

$$x_3^{(5)} = \frac{\left(1 + x_2^{(4)}\right)}{2} = \frac{(1 + 0.75)}{2} = 0.875$$

$$X^{(5)} = \begin{vmatrix} 0.875 \\ 0.75 \\ 0.875 \end{vmatrix}$$

$X^{(5)} - X^{(4)} =$

$|0.875 - 0.75| = |0.125| = 0.125 > \varepsilon = 10^{-1}$

$|0.75 - 0.75| = |0| = 0 < \varepsilon = 10^{-1}$

$|0.875 - 0.75| = |0.125| = 0.125 > \varepsilon = 10^{-1}$

Itération 6, k=5 :

$$x_1^{(6)} = \frac{\left(1 + x_2^{(5)}\right)}{2} = \frac{(1 + 0.75)}{2} = 0.875$$

$$x_2^{(6)} = \frac{\left(x_1^{(5)} + x_3^{(5)}\right)}{2} = \frac{(0.875 + 0.875)}{2} = 0.875$$

$$x_3^{(6)} = \frac{\left(1 + x_2^{(5)}\right)}{2} = \frac{(1 + 0.75)}{2} = 0.875$$

$$X^{(6)} = \begin{vmatrix} 0.875 \\ 0.875 \\ 0.875 \end{vmatrix}$$

$X^{(6)} - X^{(5)} =$

$|0.875 - 0.875| = |0| = 0 < \varepsilon = 10^{-1}$

$|0.875 - 0.75| = |0.125| = 0.125 > \varepsilon = 10^{-1}$

$|0.875 - 0.875| = |0| = 0 < \varepsilon = 10^{-1}$

Itération 7, k=6 :

$$x_1^{(7)} = \frac{\left(1 + x_2^{(6)}\right)}{2} = \frac{(1 + 0.875)}{2} = 0.9375$$

$$x_2^{(7)} = \frac{\left(x_1^{(6)} + x_3^{(6)}\right)}{2} = \frac{(0.875 + 0.875)}{2} = 0.875$$

$$x_3^{(7)} = \frac{\left(1 + x_2^{(6)}\right)}{2} = \frac{(1 + 0.875)}{2} = 0.9375$$

$$X^{(7)} = \begin{vmatrix} 0.9375 \\ 0.875 \\ 0.9375 \end{vmatrix}$$

$X^{(7)} - X^{(6)} =$

$|0.9375 - 0.875| = |0.0625| = 0.0625 < \varepsilon = 10^{-1}$

$|0.875 - 0.875| = |0| = 0 < \varepsilon = 10^{-1}$

$|0.9375 - 0.875| = |0.0625| = 0.0625 < \varepsilon = 10^{-1}$

5.2- Méthode de Gauss-Seidel :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right)}{a_{ii}} \quad \forall\, i = 1,2,\ldots\ldots,n$$

Exercice 5-2 :

En utilisant la méthode de Gauss-Seidel résoudre ce système à quatre décimales exactes; soit l'approximation initiale

$$X^{(0)} = \begin{vmatrix} 1.2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 7 \end{cases}$$

Solution :

$$A = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 10 \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 12 \\ 4 \\ 7 \end{vmatrix}$$

$$A=\begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow & |10| \geq |1| + |1| \\ \rightarrow & |10| \geq |2| + |1| \\ \rightarrow & |10| \geq |2| + |2| \end{matrix}$$

$\rightarrow$ A est une matrice à diagonale strictement dominante

$$x_1^{(k+1)} = \frac{\left(b_1 - a_{12}\ x_2^{(k)} - a_{13}\ x_3^{(k)}\right)}{a_{11}} = \frac{\left(12 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right)}{10}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{\left(b_2 - a_{21}\ x_1^{(k+1)} - a_{23}\ x_3^{(k)}\right)}{a_{22}} = \frac{\left(4 - 2x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}\right)}{10}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{\left(b_3 - a_{31}\ x_1^{(k+1)} - a_{32}\ x_2^{(k+1)}\right)}{a_{33}} = \frac{\left(7 - 2\ x_1^{(k+1)} - 2\ x_2^{(k+1)}\right)}{10}$$

$$X^{(0)}=\begin{vmatrix} 1.2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Itération 1, k=0 :

$$x_1^{(1)} = \frac{\left(12 - x_2^{(0)} - x_3^{(0)}\right)}{10} = \frac{(12 - 0 - 0)}{10} = 1.2$$

$$x_2^{(1)} = \frac{\left(4 - 2x_1^{(1)} - x_3^{(0)}\right)}{10} = \frac{(4 - 2*1.25 - 0)}{10} = 0.15$$

$$x_3^{(1)} = \frac{\left(7 - 2\ x_1^{(1)} - 2\ x_2^{(1)}\right)}{10} = \frac{(7 - 2*1.2 - 2*0.15)}{10} = 0.43$$

$$X^{(1)}=\begin{vmatrix} 1.2 \\ 0.15 \\ 0.43 \end{vmatrix}$$

Itération 2, k=1 :

$$x_1^{(2)} = \frac{\left(12 - x_2^{(1)} - x_3^{(1)}\right)}{10} = \frac{(12 - 0.15 - 0.43)}{10} = 1.142$$

$$x_2^{(2)} = \frac{\left(4 - 2x_1^{(2)} - x_3^{(1)}\right)}{10} = \frac{(4 - 2 * 1.142 - 0.43)}{10} = 0.1286$$

$$x_3^{(2)} = \frac{\left(7 - 2\,x_1^{(2)} - 2\,x_2^{(2)}\right)}{10} = \frac{(7 - 2 * 1.142 - 2 * 0.1286)}{10} = 0.4459$$

$$X^{(2)} = \begin{vmatrix} 1.142 \\ 0.1286 \\ 0.4459 \end{vmatrix}$$

Itération 3, k=2 :

$$x_1^{(3)} = \frac{\left(12 - x_2^{(2)} - x_3^{(2)}\right)}{10} = \frac{(12 - 0.1286 - 0.4459)}{10} = 1.1426$$

$$x_2^{(3)} = \frac{\left(4 - 2x_1^{(3)} - x_3^{(2)}\right)}{10} = \frac{(4 - 2 * 1.1426 - 0.4459)}{10} = 0.1269$$

$$x_3^{(3)} = \frac{\left(7 - 2\,x_1^{(3)} - 2\,x_2^{(3)}\right)}{10} = \frac{(7 - 2 * 1.1426 - 2 * 0.1269)}{10} = 0.4461$$

$$X^{(3)} = \begin{vmatrix} 1.1426 \\ 0.1269 \\ 0.4461 \end{vmatrix}$$

Itération 4, k=3 :

$$x_1^{(4)} = \frac{\left(12 - x_2^{(3)} - x_3^{(3)}\right)}{10} = \frac{(12 - 0.1269 - 0.4461)}{10} = 1.1427$$

$$x_2^{(4)} = \frac{\left(4 - 2x_1^{(4)} - x_3^{(3)}\right)}{10} = \frac{(4 - 2 * 1.1427 - 0.4461)}{10} = 0.1269$$

$$x_3^{(4)} = \frac{\left(7 - 2\,x_1^{(4)} - 2\,x_2^{(4)}\right)}{10} = \frac{(7 - 2 * 1.1427 - 2 * 0.1269)}{10} = 0.4461$$

$$X^{(3)} = \begin{vmatrix} 1.1427 \\ 0.1269 \\ 0.4461 \end{vmatrix}$$

Exercice 5-3 :

Déterminer la solution du système ci-dessous par la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel (les 3 premières itérations) :

$$\begin{cases}5x_1+2x_2-x_3=6\\x_1+6x_2-3x_3=4\\2x_1+x_2+4x_3=7\end{cases}$$

$$A=\begin{vmatrix}5&2&-1\\1&6&-3\\2&1&4\end{vmatrix}\quad X=\begin{vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{vmatrix}\quad b=\begin{vmatrix}6\\4\\7\end{vmatrix}$$

On prend : $X^{(0)}=(0,0,0)$

Solution :

$$A=\begin{vmatrix}5&2&-1\\1&6&-3\\2&1&4\end{vmatrix}\begin{matrix}\rightarrow\quad |5|\geq|2|+|-1|\\\rightarrow\quad |6|\geq|1|+|-3|\\\rightarrow\quad |4|\geq|2|+|1|\end{matrix}$$

→ A est une matrice à diagonale strictement dominante

1- Méthode de Jacobi :

$$x_1^{(k+1)}=\frac{\left(b_1-a_{12}\;x_2^{(k)}-a_{13}\;x_3^{(k)}\right)}{a_{11}}=\frac{\left(6-2\,x_2^{(k)}+x_3^{(k)}\right)}{5}$$

$$x_2^{(k+1)}=\frac{\left(b_2-a_{21}\,x_1^{(k)}-a_{23}\,x_3^{(k)}\right)}{a_{22}}=\frac{\left(4-x_1^{(k)}+3\,x_3^{(k)}\right)}{6}$$

$$x_3^{(k+1)}=\frac{\left(b_3-a_{31}\,x_1^{(k)}-a_{32}\,x_2^{(k)}\right)}{a_{33}}=\frac{\left(7-2\,x_1^{(k)}-x_2^{(k)}\right)}{4}$$

Itération 1, k=0 :

$X^{(0)}=(0,0,0)$

$$x_1^{(1)}=\frac{\left(6-2\,x_2^{(0)}+x_3^{(0)}\right)}{5}=\frac{(6-2*0+0)}{5}=\frac{6}{5}=1.2$$

$$x_2^{(1)}==\frac{\left(4-x_1^{(0)}+3\,x_3^{(0)}\right)}{6}=\frac{(4-0-3*0)}{6}=\frac{4}{6}=0.67$$

$$x_3^{(1)}==\frac{\left(7-2\,x_1^{(0)}-x_2^{(0)}\right)}{4}=\frac{(7-2*0-0)}{4}=\frac{7}{4}=1.75$$

…………………………………………………….

Itération 2, k=1 :

$$x_1^{(2)} = \frac{\left(6 - 2\,x_2^{(1)} + x_3^{(1)}\right)}{5} = \frac{(6 - 2 * 0.67 + 1.75)}{5} = 1.283$$

$$x_2^{(2)} == \frac{\left(4 - x_1^{(1)} + 3\,x_3^{(1)}\right)}{6} = \frac{(4 - 1.2 + 3 * 1.75)}{6} = 1.342$$

$$x_3^{(2)} == \frac{\left(7 - 2\,x_1^{(1)} - x_2^{(1)}\right)}{4} = \frac{(7 - 2 * 1.2 - 0.67)}{4} = 0.983$$

……………………………………………………..

Itération 3, k=2 :

$$x_1^{(3)} = \frac{\left(6 - 2\,x_2^{(2)} + x_3^{(2)}\right)}{5} = \frac{(6 - 2 * 1.342 + 0.983)}{5} = 0.860$$

$$x_2^{(3)} == \frac{\left(4 - x_1^{(2)} + 3\,x_3^{(2)}\right)}{6} = \frac{(4 - 1.283 + 3 * 0.983)}{6} = 0.944$$

$$x_3^{(3)} == \frac{\left(7 - 2\,x_1^{(2)} - x_2^{(2)}\right)}{4} = \frac{(7 - 2 * 1.283 - 1.342)}{4} = 0.773$$

La solution est :

$$X = \begin{vmatrix} 0.860 \\ 0.944 \\ 0.773 \end{vmatrix}$$

2- Méthode de Gauss-Seidel :

$$x_1^{(k+1)} = \frac{\left(b_1 - a_{12}\ x_2^{(k)} - a_{13}\ x_3^{(k)}\right)}{a_{11}} = \frac{\left(6 - 2\,x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right)}{5}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{\left(b_2 - a_{21}\,x_1^{(k+1)} - a_{23}\,x_3^{(k)}\right)}{a_{22}} = \frac{\left(4 - x_1^{(k+1)} + 3\,x_3^{(k)}\right)}{6}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{\left(b_3 - a_{31}\,x_1^{(k+1)} - a_{32}\,x_2^{(k+1)}\right)}{a_{33}} = \frac{\left(7 - 2\,x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}\right)}{4}$$

Itération 1, k=0 :

$X^{(0)} = (0,0,0)$

$$x_1^{(1)} = \frac{\left(6 - 2\,x_2^{(0)} + x_3^{(0)}\right)}{5} = \frac{(6 - 2*0 + 0)}{5} = \frac{6}{5} = 1.2$$

$$x_2^{(1)} = \frac{\left(4 - x_1^{(1)} + 3\,x_3^{(0)}\right)}{6} = \frac{(4 - 1.2 - 3*0)}{6} = 0.467$$

$$x_3^{(1)} = \frac{\left(7 - 2\,x_1^{(1)} - x_2^{(1)}\right)}{4} = \frac{(7 - 2*1.2 - 0.467)}{4} = 1.033$$

……………………………………………………..

Itération 2, k=1 :

$$x_1^{(2)} = \frac{\left(6 - 2\,x_2^{(1)} + x_3^{(1)}\right)}{5} = \frac{(6 - 2*0.467 + 1.033)}{5} = 1.22$$

$$x_2^{(2)} == \frac{\left(4 - x_1^{(2)} + 3\,x_3^{(1)}\right)}{6} = \frac{(4 - 1.22 + 3*1.033)}{6} = 0.980$$

$$x_3^{(2)} == \frac{\left(7 - 2\,x_1^{(2)} - x_2^{(2)}\right)}{4} = \frac{(7 - 2*1.22 - 0.980)}{4} = 0.895$$

……………………………………………………..

Itération 3, k=2 :

$$x_1^{(3)} = \frac{\left(6 - 2\,x_2^{(2)} + x_3^{(2)}\right)}{5} = \frac{(6 - 2*0.980 + 0.895)}{5} = 0.860$$

$$x_2^{(3)} == \frac{\left(4 - x_1^{(3)} + 3\,x_3^{(2)}\right)}{6} = \frac{(4 - 0.860 + 3*0.895)}{6} = 0.950$$

$$x_3^{(3)} == \frac{\left(7 - 2\,x_1^{(3)} - x_2^{(3)}\right)}{4} = \frac{(7 - 2*0.860 - 0.950)}{4} = 1.019$$

La solution est :

$$X = \begin{vmatrix} 0.860 \\ 0.950 \\ 1.019 \end{vmatrix}$$

5.3- <u>Methode de Ralaxtion :</u>

La méthode de relaxation consiste en le schéma suivant :

$$x_i^{(k+1)} \rightarrow x_i^{(k)} + \omega\,(x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})$$

En injectant cette expression dans l'algorithme de Gauss-Seidel, on trouve l'algorithme suivant :

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \frac{\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\ x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}\ x_j^{(k)}\right)}{a_{ii}} \ \forall\ i = 1,2,\ldots\ldots,n$$

Exercice 5-4 :

Utiliser la méthode de relaxation avec ω = 1.2 pour résoudre le système suivant, avec 3 itérations :

$$X^{(0)} = \begin{vmatrix} 1.2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 7 \end{cases}$$

Solution :

$$A = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 10 \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 12 \\ 4 \\ 7 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow & |10| \geq |1| + |1| \\ \rightarrow & |10| \geq |2| + |1| \\ \rightarrow & |10| \geq |2| + |2| \end{matrix}$$

→ A est une matrice à diagonale strictement dominante

$$x_i^{(k+1)} = \omega\ \hat{x}_i^{(k+1)} + (1-\omega)x_i^{(k)} = \omega \frac{\left(b_i - \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} + \sum_{\substack{j=i+1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right)\right)}{a_{ii}} + (1-\omega)x_i^{(k)}$$

$$\rightarrow x_1^{(k+1)} = \omega \frac{\left(b_1 - a_{12}\ x_2^{(k)} - a_{13}\ x_3^{(k)}\right)}{a_{11}} + (1-\omega)x_1^{(k)}$$

$$= \omega \frac{\left(12 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right)}{10} + (1-\omega)x_1^{(k)}$$

$$\rightarrow x_2^{(k+1)} = \omega \frac{\left(b_2 - \ a_{21}\, x_1^{(k+1)} - a_{23}\, x_3^{(k)}\right)}{a_{22}} + (1-\omega)x_2^{(k)}$$

$$= \omega \frac{\left(4 - 2\, x_1^{(k+1)} - \ x_3^{(k)}\right)}{10} + (1-\omega)x_2^{(k)}$$

$$\rightarrow x_3^{(k+1)} = \omega \frac{\left(b_3 - \ a_{31}\, x_1^{(k+1)} - a_{32}\, x_2^{(k+1)}\right)}{a_{33}} + (1-\omega)x_3^{(k)}$$

$$= \omega \frac{\left(7 - \ 2\, x_1^{(k+1)} - \ 2\, x_2^{(k+1)}\right)}{10} + (1-\omega)x_3^{(k)}$$

$$X^{(0)} = \begin{vmatrix} 1.2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Itération 1, k=0 :

$$x_1^{(1)} = \omega \frac{\left(12 - \ \ x_2^{(0)} - \ x_3^{(0)}\right)}{10} + (1-\omega)x_1^{(0)} = 1.2 * \frac{(12 - \ \ 0 - \ 0)}{10} \ + \ (1-1.2) * 1.2 = 1.2$$

$$x_2^{(1)} = \omega \frac{\left(4 - \ 2x_1^{(1)} - \ x_3^{(0)}\right)}{10} + (1-\omega)x_2^{(0)} = 1.2 * \frac{(4 - \ 2 * 1.25 - \ 0)}{10} \ + \ (1-1.2) * 0$$

$$= 0.18$$

$$x_3^{(1)} = \omega \frac{\left(7 - \ 2\, x_1^{(1)} - \ 2\, x_2^{(1)}\right)}{10} + (1-\omega)x_3^{(0)} = \frac{(7 - \ 2 * 1.2 - \ 2 * 0.15)}{10} \ + \ (1-1.2) * 0$$

$$= 0.516$$

$$X^{(1)} = \begin{vmatrix} 1.2 \\ 0.18 \\ 0.516 \end{vmatrix}$$

Itération 2, k=1 :

$$x_1^{(2)} = \omega \frac{\left(12 - \ \ x_2^{(1)} - \ x_3^{(1)}\right)}{10} + (1-\omega)x_1^{(1)} = 1.2 * \frac{(12 - \ \ 0.18 - \ 0.516)}{10} \ + \ (1-1.2) * 1.2$$

$$= 1.1165$$

$$x_2^{(2)} = \omega \frac{\left(4 - 2x_1^{(2)} - x_3^{(1)}\right)}{10} + (1-\omega)x_2^{(1)}$$

$$= 1.2 * \frac{(4 - 2 * 1.1165 - 0.516)}{10} + (1-1.2) * 0.18 = 0.1141$$

$$x_3^{(2)} = \omega \frac{\left(7 - 2\,x_1^{(2)} - 2\,x_2^{(2)}\right)}{10} + (1-\omega)x_3^{(1)}$$

$$= 1.2 * \frac{(7 - 2 * 1.1165 - 2 * 0.1141)}{10} + (1-1.2) * 0.516 = 0.43$$

$$X^{(2)} = \begin{vmatrix} 1.1165 \\ 0.1141 \\ 0.43 \end{vmatrix}$$

Itération 3, k=2 :

$$x_1^{(3)} = \omega \frac{\left(12 - x_2^{(2)} - x_3^{(2)}\right)}{10} + (1-\omega)x_1^{(2)}$$

$$= 1.2 * \frac{(12 - 0.1141 - 0.43)}{10} + (1-1.2) * 1.1165 = 1.1514$$

$$x_2^{(3)} = \omega \frac{\left(4 - 2x_1^{(3)} - x_3^{(2)}\right)}{10} + (1-\omega)x_2^{(2)}$$

$$= 1.2 * \frac{(4 - 2 * 1.1514 - 0.43)}{10} + (1-1.2) * 0.1141 = 0.1292$$

$$x_3^{(3)} = \omega \frac{\left(7 - 2\,x_1^{(3)} - 2\,x_2^{(3)}\right)}{10} + (1-\omega)x_3^{(2)}$$

$$= 1.2 * \frac{(7 - 2 * 1.1514 - 2 * 0.1292)}{10} + (1-1.2) * 0.43 = 0.4467$$

$$X^{(3)} = \begin{vmatrix} 1.1514 \\ 0.1292 \\ 0.4467 \end{vmatrix}$$

Exercice 5-5:

Déterminer la solution du système ci-dessous par la méthode de relaxation (les 3 premières itérations) avec ω = 1.2 :

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{vmatrix}$$

On prend : $X^{(0)} = (0,0,0)$

Solution :

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow & |5| \geq |2| + |-1| \\ \rightarrow & |6| \geq |1| + |-3| \\ \rightarrow & |4| \geq |2| + |1| \end{matrix}$$

$\rightarrow$ A est une matrice à diagonale strictement

$$x_i^{(k+1)} = \omega\, \hat{x}_i^{(k+1)} + (1-\omega)x_i^{(k)} = \omega \frac{\left(b_i - \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} + \sum_{\substack{j=i+1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right)\right)}{a_{ii}} + (1-\omega)x_i^{(k)}$$

$$\rightarrow x_1^{(k+1)} = \omega \frac{\left(b_1 - a_{12}\, x_2^{(k)} - a_{13}\, x_3^{(k)}\right)}{a_{11}} + (1-\omega)x_1^{(k)}$$

$$= \omega \frac{\left(6 - 2\, x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right)}{5} + (1-\omega)x_1^{(k)}$$

$$\rightarrow x_2^{(k+1)} = \omega \frac{\left(b_2 - a_{21}\, x_1^{(k+1)} - a_{23}\, x_3^{(k)}\right)}{a_{22}} + (1-\omega)x_2^{(k)}$$

$$= \omega \frac{\left(4 - x_1^{(k+1)} + 3\, x_3^{(k)}\right)}{6} + (1-\omega)x_2^{(k)}$$

$$\rightarrow x_3^{(k+1)} = \omega \frac{\left(b_3 - a_{31}\, x_1^{(k+1)} - a_{32}\, x_2^{(k+1)}\right)}{a_{33}} + (1-\omega)x_3^{(k)}$$

$$= \omega \frac{\left(7 - 2\, x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}\right)}{4} + (1-\omega)x_3^{(k)}$$

Itération 1, k=0 :

$X^{(0)} = (0,0,0)$

$$x_1^{(1)} = \omega \frac{\left(6 - \ 2\, x_2^{(0)} + \ x_3^{(0)}\right)}{5} + (1-\omega)x_1^{(0)} = 1.2 * \frac{(6 - \ 2*0 + \ 0)}{5} + (1-1.2)*0 = 1.44$$

$$x_2^{(1)} = \omega \frac{\left(4 - \ x_1^{(1)} + 3\, x_3^{(0)}\right)}{6} + (1-\omega)x_2^{(0)} = 1.2 * \frac{(4 - 1.2 - 3*0)}{6} + (1-1.2)*0 = 0.56$$

$$x_3^{(1)} = \omega \frac{\left(7 - \ 2\, x_1^{(1)} - \ x_2^{(1)}\right)}{4} + (1-\omega)x_3^{(0)} = 1.2 * \frac{(7 - \ 2*1.2 - 0.467)}{4} + (1-1.2)*0$$
$$= 1.24$$

……………………………………………………

Itération 2, k=1 :

$$x_1^{(2)} = \omega \frac{\left(6 - \ 2\, x_2^{(1)} + \ x_3^{(1)}\right)}{5} + (1-\omega)x_1^{(1)}$$
$$= 1.2 * \frac{(6 - \ 2*0.56 + \ 1..24)}{5} + (1-1.2)*1.44 = 1.18$$

$$x_2^{(2)} = \omega \frac{\left(4 - \ x_1^{(2)} + 3\, x_3^{(1)}\right)}{6} + (1-\omega)x_2^{(1)} = \ 1.2 * \frac{(4 - 1.18 + 3*1.24)}{6} + (1-1.2)*0.56$$
$$= 1.2$$

$$x_3^{(2)} = \omega \frac{\left(7 - \ 2\, x_1^{(2)} - \ x_2^{(2)}\right)}{4} + (1-\omega)x_3^{(1)} = 1.2 * \frac{(7 - \ 2*1..18 - \ 1.2)}{4} + (1-1.2)*1.24$$
$$= 0.78$$

……………………………………………………

Itération 3, k=2 :

$$x_1^{(3)} = \omega \frac{\left(6 - \ 2\, x_2^{(2)} + \ x_3^{(2)}\right)}{5} + (1-\omega)x_1^{(2)} = 1.2 * \frac{(6 - \ 2*1.2 + \ 0.78)}{5} + (1-1.2)*1.18$$
$$= \ \ 1.078$$

$$x_2^{(3)} = \omega \frac{\left(4 - \ x_1^{(3)} + 3\, x_3^{(2)}\right)}{6} + (1-\omega)x_2^{(2)} = \ 1.2 * \frac{(4 - 1.078 + 3*0.78)}{6} + (1-1.2)*1.2$$
$$= 0.81$$

$$x_3^{(3)} = \omega \frac{\left(7 - \ 2\, x_1^{(3)} - \ x_2^{(3)}\right)}{4} + (1-\omega)x_3^{(2)}$$
$$= 1.2 * \frac{(7 - \ 2*1.078 - \ 0.81)}{4} + (1-1.2)*0.78 = 1.054$$

La solution est :

$$X = \begin{vmatrix} 1.078 \\ 0.81 \\ 1.054 \end{vmatrix}$$

Exercices non corrigés :

Exercice 5-6 :

On considère le système $A\,x = b$:

$$A = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 10 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 12 \\ 4 \\ 7 \end{vmatrix}$$

- Calculer la matrice de Gauss-Seidel associée.

- Déterminer le nombre d'itérations à partir du quel $|x^k - \bar{x}| \leq 10^{-2}$.

Exercice 5-7 :

Etudier la convergence de la méthode de relaxation (pour la résolution du système $A\,x = b$ lorsque :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$