

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université d'Oran des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf

USTO-MB



Faculté du Génie Electrique
Département d'électronique



Electrotechnique Fondamentale 1 **(Cours et applications)**

Dr. Mohammed Amine ZAFRANE

Année universitaire 2019/2020

Document pédagogique élaboré dans le cadre des dispositifs du décret exécutif n° 90-365 du 10/11/1990 relatif à l'élaboration des supports pédagogiques et didactiques

Plan Pédagogique du cours

Matière : Electrotechnique Fondamentale

Filière : Electronique, Télécommunications, Génie Biomédical

Niveau : 2^{ème} année Licence (ELN, TC, GB)²

Volume Horaire : (Cours: 1h30, TD: 1h30, TP : 1h30)

Crédits : 4

Coefficient : 2

Evaluation : Contrôle continu : 40% ; Examen : 60%.

Objectif général du cours:

L'objectif général de ce cours est de permettre aux étudiants d'aborder les principes de base de l'électrotechnique, de Comprendre le principe de fonctionnement des transformateurs et des machines électriques.

Table des matières

Chapitre 1. Rappels mathématiques sur les nombres complexes (NC)	4
Chapitre 2. Rappels sur les lois fondamentales de l'électricité	10
Chapitre 3. Circuits et puissances électriques	31
Chapitre 4. Circuits magnétiques	46
Chapitre 5. Transformateurs	63
Chapitre 6. Introduction aux machines électriques	85
Références Bibliographiques	92

Avant propos

Ce support de cours commence d'abord par un rappel des notions de bases en mathématiques (nombres complexes) et des lois fondamentales de l'électricité. Nous abordons par la suite, l'analyse des circuits électriques à courant continu, à circuits alternatifs monophasés et à circuits alternatifs triphasés. Les circuits magnétiques et les transformateurs électriques sont ensuite présentés de manière très pédagogique. Nous terminons ce support, par des descriptions technologiques de quelques machines électriques.

Le contenu de ce support correspond au programme enseigné au département d'électronique destiné aux étudiants en licence de 2^{ème} (LMD) en électronique.

Chapitre 1 : Rappels mathématiques sur les nombres complexes (NC)

1.1 Nombres complexes (NC)

L'équation $x^2+1=0$ n'a pas de solution dans l'espace des réels \mathbb{R} . Elle doit faire appel aux racines carrées d'un nombre négatif, c'est ce qui conduit à l'invention des nombres complexes. Dans \mathbb{C} , ensemble des nombres complexes, elle en a deux solutions : i et $-i$ avec $i^2 = -1$.

La notation i fut introduite par Euler, le grand mathématicien suisse. Dans ce document, on notera j à la place de i . En électricité, i est une notation utilisée pour l'intensité du courant [1].

1.2 Représentation algébrique d'un NC

Soit un nombre complexe $z = a + jb$, avec a et b réels.

L'écriture $a + jb$ est appelée la forme algébrique de z , avec :

$a = \text{Re}(z)$: qui représente la partie réelle de z

et $b = \text{Im}(z)$, est la partie imaginaire de z .

On peut prendre ces deux valeurs (a et b) comme coordonnées dans le plan cartésien (voir figure 1.1).

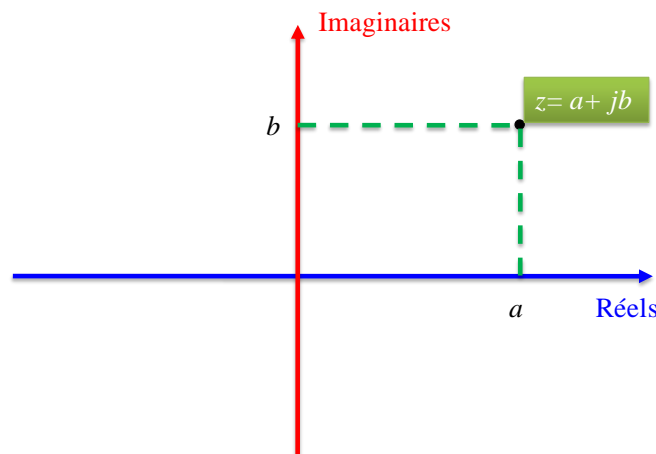


Figure 1.1 Représentation cartésienne d'un nombre complexe (z).

1.3 Représentation géométrique d'un NC

Dans un plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) , on associe à tout nombre complexe $z = a + jb$, le point $P(a, b)$ et réciproquement à tout point dans le plan, on peut lui associer un nombre complexe.

$P(a, b)$ est l'image de $z = a + jb$ et z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{au} + \overrightarrow{bv}$.

1.4 Représentation trigonométrique d'un NC

Soit P l'image de $z = a + jb$ dans le plan rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

- **Module** de z est le réel positif $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- **Argument** de z ($z \neq 0$) est le nombre θ défini à $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) avec :

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{b}{r} \\ \cos \theta = \frac{a}{r} \\ \theta = \text{tang}^{-1}(b/a) \end{cases} \quad (1.1)$$

Géométriquement θ est, à $2k\pi$ près la mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OP})$. La forme trigonométrique de z est alors :

$$z = \rho(\cos \theta + j \sin \theta) \quad (1.2)$$

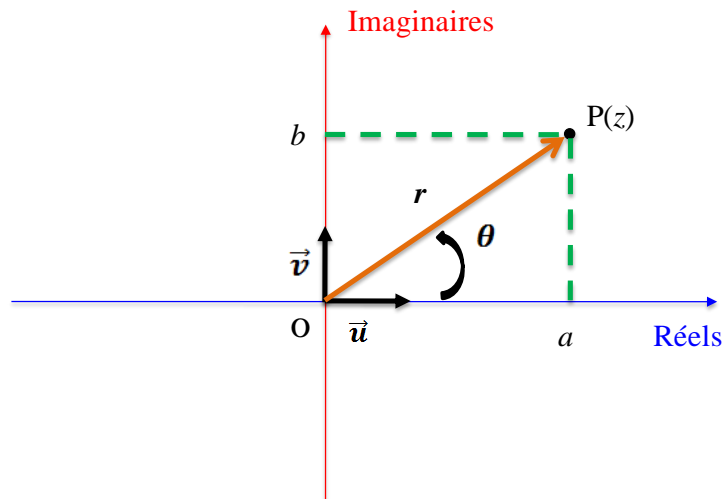


Figure 1.2 Représentation trigonométrique d'un NC (Z).

1.4.1 Représentation polaire d'un NC

Soit un nombre complexe z ($z \neq 0$), avec r, θ le module et l'argument respectivement. La représentation polaire est donnée sous la forme suivante :

$$z = [r, \theta] \quad (1.3)$$

1.4.2 Représentation exponentielle d'un NC

La formule d'Euler relie l'exponentielle complexe avec le cosinus et le sinus dans le plan complexe :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (1.4)$$

Théorème

Soit θ un nombre réel, la formule d'Euler est exprimée:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \\ \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \end{cases} \quad (1.5)$$

Démonstration

Nous avons $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ et $e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j \sin(-\theta) = \cos \theta - j \sin \theta$.

On a donc :

$$\begin{cases} e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \\ e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta \end{cases} \quad (1.6)$$

En additionnant, puis en soustrayant les deux égalités membres à membres, on obtient les formules d'Euler.

Un nombre complexe peut alors s'écrire sous la forme exponentielle, représentée sur la figure 1.3 :

$$z = re^{j\theta} \quad (1.7)$$

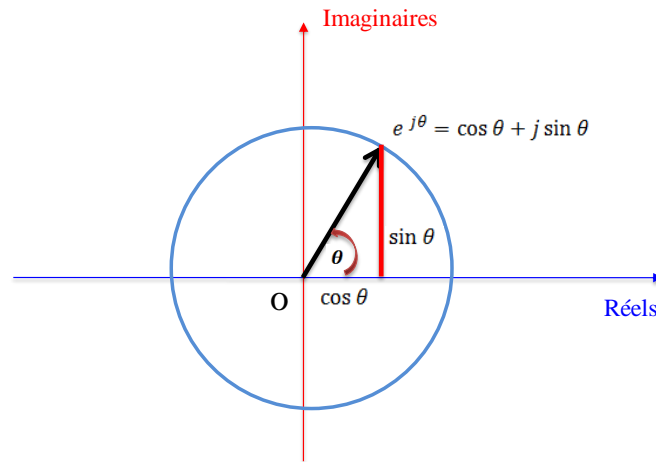


Figure 1.3 Forme exponentielle d'un NC $Z = re^{j\theta}$.

1.5 Formule de Moivre

La puissance n -ième d'un nombre complexe z , est donnée la formule de Moivre :

$$(\cos \theta + j \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + j \sin(n\theta) \quad (1.8)$$

Démonstration

Pour un nombre complexe de module $r = 1$, on peut écrire z sous la forme :

$$z = e^{j\theta} \quad (1.9)$$

Pour un entier naturel n :

$$\begin{aligned}(z)^n &= (\cos \theta + j \sin \theta)^n = (e^{j\theta})^n = e^{jn\theta} \\ &= \cos(n\theta) + j \sin(n\theta), \text{ ainsi} \\ (\cos \theta + j \sin \theta)^n &= \cos(n\theta) + j \sin(n\theta)\end{aligned}\quad (1.10)$$

Exemples 1

Soit un nombre complexe donné sous la forme algébrique $z = 3 + j4$. La représentation géométrique est illustrée par la figure 1.4.

Le module de z est une grandeur réelle positive :

$$r = \sqrt{(\text{partie réelle})^2 + (\text{partie imaginaire})^2}$$

$$r = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{25}$$

$$r = 5.$$

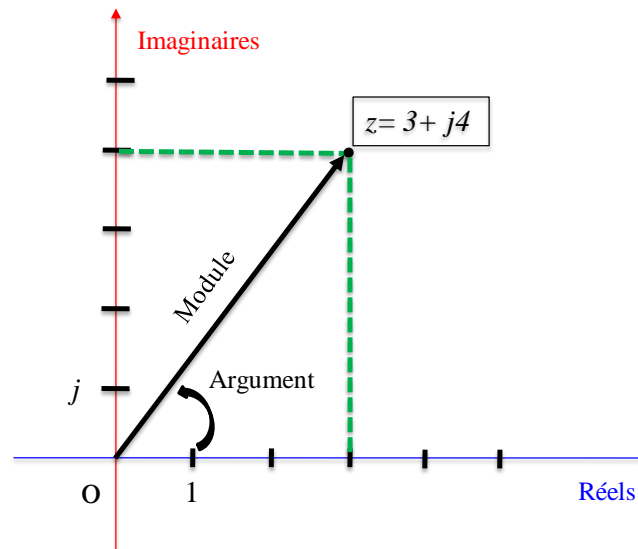


Figure 1.4 Représentation géométrique du $z = 3 + j4$.

L'argument de $z = 3 + j4$ est un angle et se note :

$$\arg(\underline{z}) = \arg(3 + j4)$$

$$\arg(\underline{z}) = \arg(3 + j4) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53.13^\circ$$

$$\begin{cases} \arg(\underline{z}) \approx 53.13^\circ \\ \arg(\underline{z}) \approx 0,92 \text{ rad} \end{cases}$$

Exercice à résoudre

Calculez le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = -1 - j4, \quad z_2 = j6, \quad z_3 = -j7, \quad z_4 = -3.5$$

1.6 Opérations sur les NC

1.6.1 Complexe conjugué

Soit un nombre complexe $z = a + jb$. Le complexe conjugué de z est noté \bar{z} . C'est le même nombre mais avec une partie imaginaire opposée $\bar{z} = a - jb$.

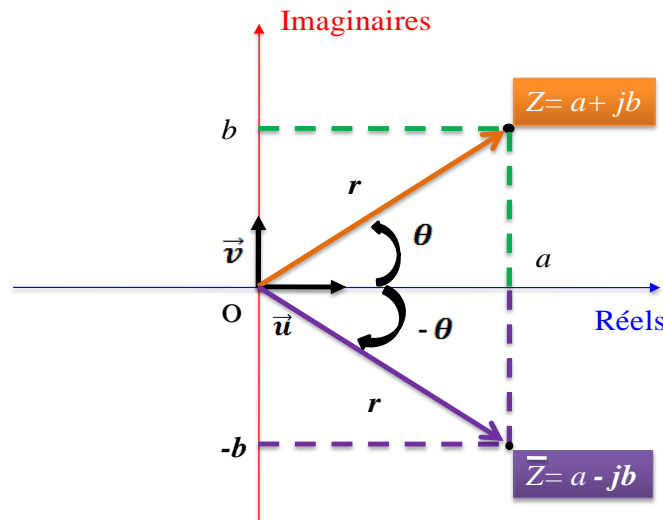


Figure 1.5 Complexe conjugué.

1.6.2 Addition

L'addition de deux nombres complexes sous forme algébrique $z = a + jb$ et $\acute{z} = \acute{a} + j\acute{b}$. Consiste à additionner la partie réelle avec la partie réelle, et les parties imaginaires entre elles.

$$z + \acute{z} = (a + \acute{a}) + j(b + \acute{b}) \quad (1.11)$$

On applique le raisonnement, la soustraction de nombres complexe est donnée par :

$$z - \acute{z} = (a - \acute{a}) + j(b - \acute{b}) \quad (1.12)$$

1.6.3 Produit

Soient deux nombres complexes z et \acute{z} :

$$\begin{cases} z = a + jb \\ \acute{z} = \acute{a} + j\acute{b} \end{cases} \quad (1.13)$$

Le produit de ces deux nombres est :

$$\begin{aligned} z * \acute{z} &= (a + jb) * (\acute{a} + j\acute{b}) \\ &= (a\acute{a} - b\acute{b}) + j(a\acute{b} + \acute{a}b) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Pour le produit, Il est souvent plus intéressant d'utiliser la forme polaire.

$$\begin{cases} z = [r_1, \theta_1] \\ \acute{z} = [r_2, \theta_2] \end{cases} \quad (1.15)$$

Le produit de ces deux nombres sous la forme polaire est alors :

$$z * \acute{z} = [(r_1 * r_2), (\theta_1 + \theta_2)] \quad (1.16)$$

1.6.4 Division

Le calcul de la division de deux (02) nombres complexes z et \acute{z} sous la forme algébrique fait appel au conjugué du dénominateur.

$$\frac{a+jb}{\acute{a}+j\acute{b}} = \frac{(a+jb) \times (\acute{a}-j\acute{b})}{(\acute{a}+j\acute{b}) \times (\acute{a}-j\acute{b})} = \frac{(a\acute{a}+b\acute{b})+j(\acute{a}b-a\acute{b})}{\acute{a}^2+\acute{b}^2} \quad (1.17)$$

Pour la division, Il est souvent plus intéressant d'utiliser la forme polaire.

$$\begin{cases} z = [r_1, \theta_1] \\ \acute{z} = [r_2, \theta_2] \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\frac{z}{\acute{z}} = \frac{[r_1, \theta_1]}{[r_2, \theta_2]} = \left[\frac{r_1}{r_2}, (\theta_1 - \theta_2) \right] \quad (1.19)$$

Exemple 2

Soient deux nombre complexe :

$$\begin{cases} z_1 = 5 + j7 \\ z_2 = -2 + j \end{cases}$$

$$z_1 + z_2 = 3 + j8 \text{ et } z_1 - z_2 = 7 + j6$$

Exercice à résoudre

Additionnez les nombres complexes suivants : $9 + j3$ et $-5 + j5$. Soustraire les nombres complexes suivants : $7 + j6$ et $7 - j6$

1.7 Application des NC à l'électricité

Soit un courant alternatif sinusoïdal $i(t)$ dont l'expression en fonction du temps est donnée par :

$$i(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.20)$$

A cette grandeur sinusoïdale, nous associons un vecteur de Fresnel. Nous pouvons alors associer à $i(t)$ une représentation complexe

$$\underline{I} = [I, \varphi] = I(\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (1.21)$$

De même pour la tension appliquée, on peut écrire

$$\underline{U} = [U, \varphi] = U(\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (1.22)$$

Notons que, la représentation complexe est très efficace pour le calcul des paramètres des circuits électriques [2].

Chapitre 2 : Rappels sur les lois fondamentales de l'électricité

Après un rappel des lois mathématiques sur les nombres complexes. Dans ce chapitre, on va aborder les principaux dipôles électrique ainsi les lois fondamentales qui les régissent.

2.1 Régime permanent

En régime continu, les grandeurs courant et tension sont constantes dans le temps.

2.1.1 Dipôle électrique

Un dipôle électrique est un composant unique ou un ensemble de composants, connectés à deux (02) bornes (voir figure 2.1).

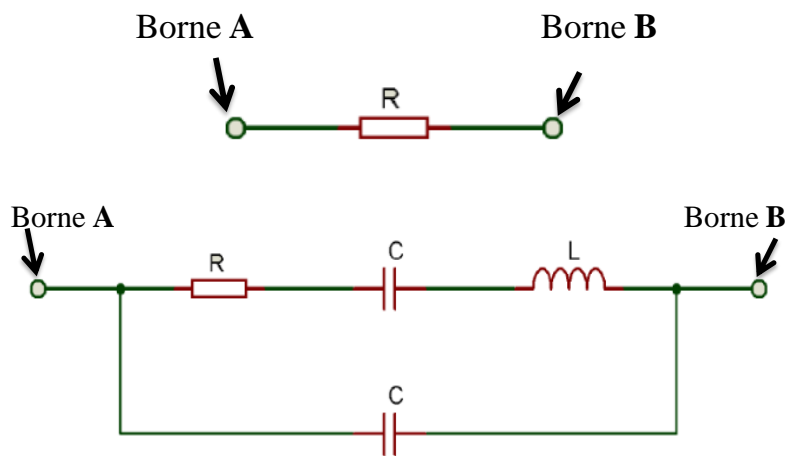


Figure 2.1 Dipôles électriques.

On y place un sens pour le courant.

- **Convention récepteur** : le courant i et la tension u sont orientés en sens opposés.

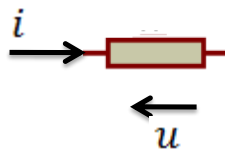


Figure 2.2 Convention récepteur.

- **Convention générateur** : le courant i et la tension u sont orientés dans le même sens.

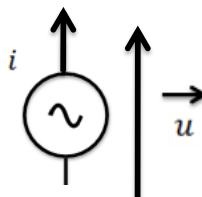


Figure 2.3 Convention générateur.

En régime continu, on classe les dipôles, en deux (02) catégories :

- **Dipôle passif** : C'est un dipôle qui consomme de l'énergie électrique et ne comporte aucune source d'énergie. On citera par exemples : résistance, inductance, ampoule.

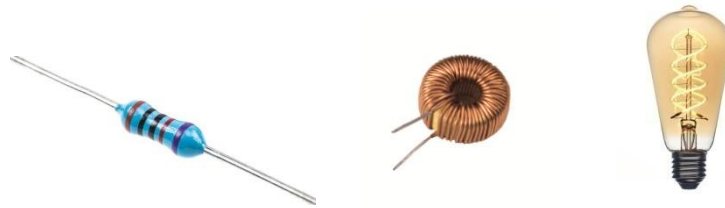


Figure 2.4 Dipôles passifs.

- **Dipôle actif** : C'est un dipôle qui comporte une source d'énergie. Par exemple, on peut citer pile, ou moteur électrique à courant continu.

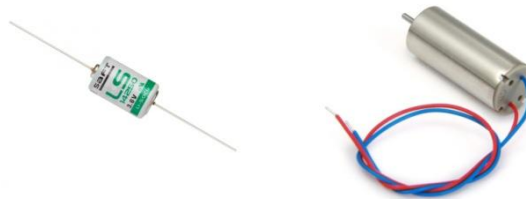


Figure 2.5 Dipôles actifs.

2.1.2 Propriétés des dipôles

A- Polarité

Un dipôle est polarisé lorsqu'on ne peut pas permuter ses bornes, comme exemple : condensateur chimique, générateur de courant continu, diode... .En cas d'inversion des bornes, on peut perturber le fonctionnement du circuit. Pour un dipôle non polarisé, la permutation de leurs bornes n'influe pas sur le fonctionnement du circuit. La résistance est un dipôle non-polarisé.

B- Linéarité

Un dipôle est linéaire lorsqu'il répond aux critères mathématiques de linéarité. La caractérisation courant/tension est une droite. Une résistance pure est un dipôle linéaire, par contre la diode est un dipôle non linéaire.

2.1.3 Association de dipôles

Dans un circuit électrique, les dipôles peuvent être associés en série ou en parallèle. Ces deux associations ont des avantages et aussi inconvénients.

- **Dipôles en série** : Les dipôles sont associés en série lorsqu'ils sont branchés les uns à la

suite des autres. Le courant i est commun à tous les dipôles. La tension u est la somme des tensions aux bornes de chaque dipôle.

- **Dipôles en parallèle :**

La tension u est commune à tous les dipôles. Le courant total i est la somme des courants aux bornes de chaque dipôle.

2.1.4 Association de dipôles élémentaires R, L et C

A- Association des résistances (R)

En série

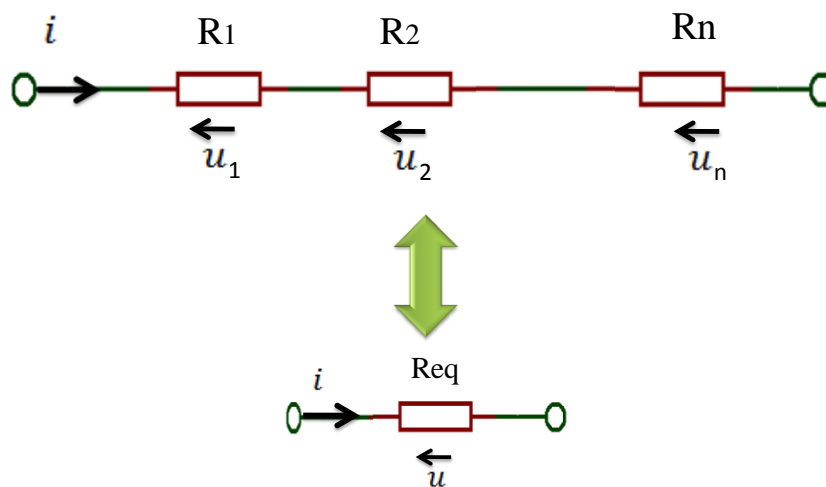


Figure 2.6 Association des résistances en série.

Le courant est commun à toutes les résistances. La tension aux bornes de l'ensemble est égale à :

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \\ &= (R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n)i = R_{eq}i \end{aligned} \quad (2.1)$$

La résistance équivalente est alors égale à la somme des résistances placées en série. Son unité est Ω .

$$R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n = \sum_1^n R_n \quad (2.2)$$

En parallèle

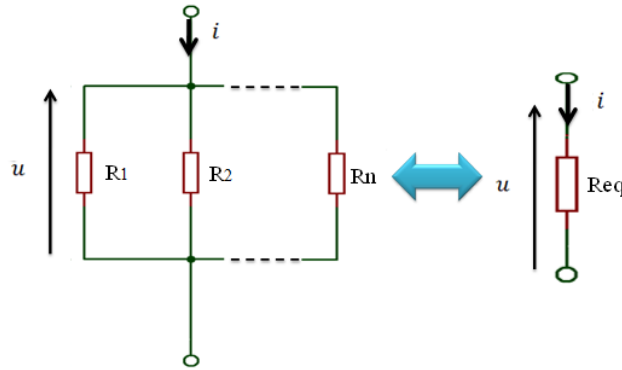


Figure 2.7 Association des résistances en parallèle.

En parallèle, la tension est commune à toutes les résistances. Le courant qui entre dans l'ensemble est donné, selon la loi des nœuds, par:

$$\begin{aligned}
 i &= i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n \\
 &= \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} + \frac{u}{R_2} + \dots + \frac{u}{R_n} \\
 &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) u \\
 &= \frac{1}{R_{eq}} \cdot u
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

L'admittance équivalente est égale à la somme des inverses des résistances placées en parallèle. Son unité est Ω^{-1} .

$$Y_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_1^n \frac{1}{R_n} \tag{2.4}$$

- Cas de 2 résistances placées en parallèle

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{2.5}$$

- Cas de n résistances identiques :

$$R_{eq} = \frac{R}{n} \tag{2.6}$$

B- Association des inductances (L)

En série

Associer des inductances en série revient à augmenter le nombre total de spires. La tension aux bornes d'une inductance traversée par un courant d'intensité variable en fonction du temps est donnée par :

$$u_L = L \frac{di}{dt} \tag{2.7}$$

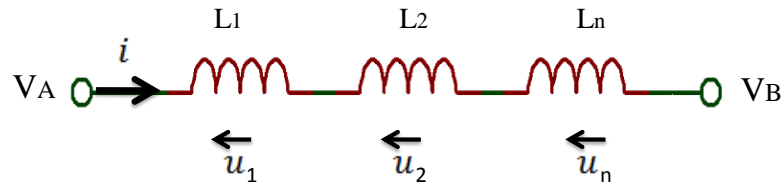


Figure 2.8 Association des inductances en série.

$$\begin{aligned}
 V_A - V_B &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \\
 &= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + L_3 \frac{di}{dt} + \dots + L_n \frac{di}{dt} \\
 &= (L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n) \frac{di}{dt} = L_{eq} \frac{di}{dt} \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

L'inductance équivalente est alors égale à la somme des inductances placées en série. (On suppose que le courant a le même sens de circulation dans les bobines).

$$L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n = \sum_1^n L_n \quad (2.9)$$

En parallèle

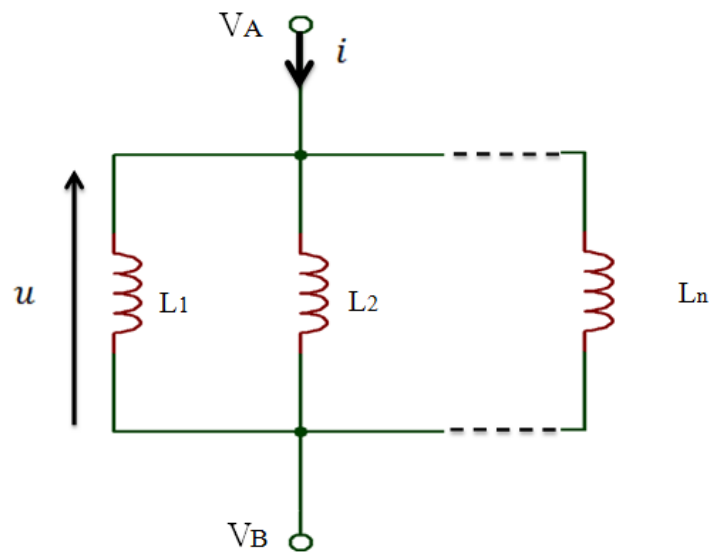


Figure 2.9 Association inductances en parallèle.

En parallèle la tension est commune à toutes les inductances. Le courant qui entre dans l'ensemble est (loi des nœuds):

$$\begin{aligned}
 i &= i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt} + \dots + \frac{di_n}{dt} \\
 &= \frac{V_A - V_B}{L_1} + \frac{V_A - V_B}{L_2} + \frac{V_A - V_B}{L_3} + \dots + \frac{V_A - V_B}{L_n} \\
 &= (V_A - V_B) \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_n} \right)
 \end{aligned}$$

$$= (V_A - V_B) \frac{1}{L_{eq}} \quad (2.10)$$

L'admittance équivalente est égale à la somme des inductances placées en parallèle :

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_n} = \sum_1^n \frac{1}{L_n} \quad (2.11)$$

On arrive donc à la même formule que pour des résistances.

C- Association des condensateurs (C)

En série

Un condensateur est caractérisé par sa capacité, notée C et exprimée en Farads (symbole F).

La tension aux bornes d'un condensateur traversé par un courant d'intensité variable en fonction du temps est :

$$u_c = \frac{1}{C} \int i dt \quad (2.12)$$

Ici, le courant est commun à tous les condensateurs. La tension aux bornes de l'ensemble est :

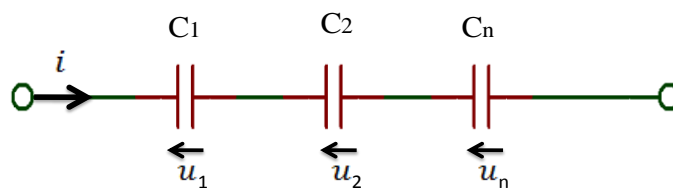


Figure 2.10 Association des condensateurs en série.

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \\ &= \frac{1}{C_1} \int i \cdot dt + \frac{1}{C_2} \int i \cdot dt + \frac{1}{C_3} \int i \cdot dt + \dots + \frac{1}{C_n} \int i \cdot dt \\ &= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) \cdot \int i \cdot dt \end{aligned} \quad (2.13)$$

Il vient alors :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum_1^n \frac{1}{C_n} \quad (2.14)$$

En parallèle

En parallèle la tension est commune à tous les condensateurs. Le courant (voir figure 2.11) qui entre dans l'ensemble est (loi des nœuds):

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n \\ &= C_1 \frac{du}{dt} + C_2 \frac{du}{dt} + C_3 \frac{du}{dt} + \dots + C_n \frac{du}{dt} \end{aligned}$$

$$= (C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n) \frac{du}{dt}$$

$$C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n = \sum_1^n C_n \quad (2.15)$$

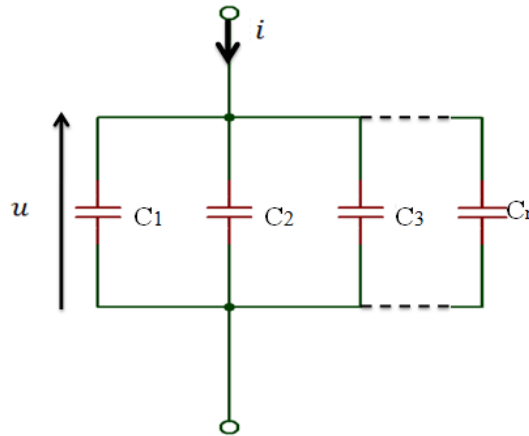


Figure 2.11 Association des condensateurs en parallèle.

2.2 Régime sinusoïdal

Aujourd'hui, tous les réseaux d'énergie fonctionnent avec des courants et tensions alternatifs et de formes sinusoïdales. Les grandeurs sinusoïdales sont des grandeurs périodiques particulières dont l'étude est importante en électronique et en électrotechnique [3].

2.2.1 Représentation des grandeurs sinusoïdales

La représentation réelle des grandeurs sinusoïdales (courant et tension) est donnée par :

$$u(t) = U_M \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (2.16)$$

$$i(t) = I_M \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (2.17)$$

U_M et I_M : Valeurs maximales respectives de $u(t)$ et de $i(t)$

$\omega t + \varphi$: Phase instantanée

ω : Pulsation en rad/s , avec $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

f : Fréquence en Hz et T : Période en Seconde

φ_u, φ_i : Phases à l'origine des temps de $u(t)$ et $i(t)$.

$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$: Différence de phase entre $u(t)$ et $i(t)$.

2.2.2 Valeurs moyennes et efficaces

Valeur moyenne

Une fonction périodique $u(t)$ de période T a une valeur moyenne U_{Moy} donnée par :

$$U_{Moy} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad (2.18)$$

La valeur moyenne d'un signal sinusoïdal est nulle.

Valeur efficace

En général, pour une fonction périodique $u(t)$ de période T , la valeur efficace est donnée par :

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt} \quad (2.19)$$

2.2.3 Représentation vectorielle d'une grandeur sinusoïdale

On peut aussi représenter une grandeur sinusoïdale (courant, tension) par un vecteur tournant dans le plan O_{xy} à la vitesse de rotation ω , dans le sens trigonométrique, c'est le vecteur de Fresnel associé à cette grandeur sinusoïdale. Pour simplifier la représentation des vecteurs de Fresnel, on choisit de les représenter à $t=0$, ce qui ne change en rien, le résultat final.

La norme du vecteur de Fresnel U_{eff} de la grandeur $u(t)$ est égale à sa valeur efficace.

$$u(t) = U_{eff} \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$$

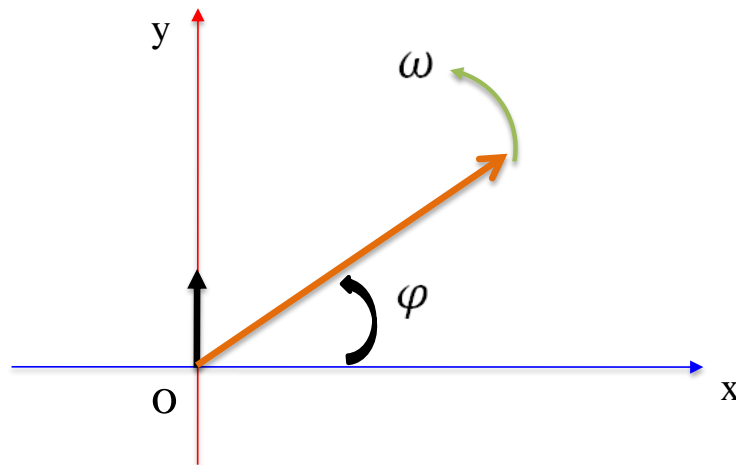


Figure 2.12 Vecteur de Fresnel.

Exemple

Soient deux vecteurs :

$$\begin{cases} u(t) = 5\sqrt{2} \sin(\omega t) \\ i(t) = 2\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

Donnez la représentation vectorielle des deux grandeurs $u(t)$ et $i(t)$?

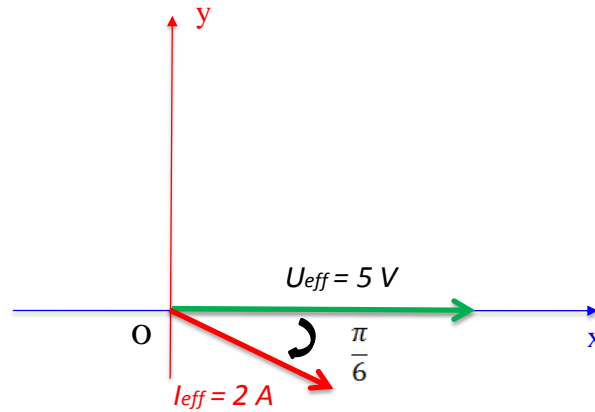


Figure 2.13 Représentation de Fresnel.

2.3 Impédances complexe

"To impede" en Anglais est synonyme de « retenir » ou « faire obstacle à ».

L'impédance électrique permet de mesurer l'opposition d'un circuit électrique (des dipôles) au passage d'un courant électrique. Soit un circuit traversé par un courant électrique alternatif **sinusoïdal** de la forme $i(t) = I_{eff} \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$

$$i(t) = I_{eff} \sqrt{2} \cdot e^{j\varphi} \quad (2.20)$$

En utilisant la formule d'Euler, nous pouvons l'écrire sous la forme complexe :

$$i(t) = I_M \cdot \sin(\omega t) + j I_M \cdot \cos(\omega t) \quad (2.21)$$

Avec : $I_{eff} \sqrt{2} = I_M$

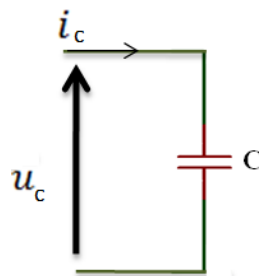
2.4 Impédances complexes des dipôles R, L et C

2.4.1 Condensateur

Soit une tension appliquée au condensateur : $u_c = E e^{j\omega t}$ on considère que la phase $\varphi = 0$.

L'impédance du condensateur est égale à :

$$Z_c = \frac{u_c}{i_c} \quad (2.22)$$

Figure 2.14 L'impédance Z_c .

$$u_c = \frac{1}{C} \int i_c(t) \cdot dt, \text{ ce qui implique } \frac{du_c}{dt} = \frac{1}{C} i_c(t)$$

$$i_c(t) = C \cdot \frac{du_c}{dt} = C \frac{d(Ee^{j\omega t})}{dt} = C \cdot E \cdot j \cdot \omega \cdot e^{j\omega t} \quad (2.23)$$

$$\begin{cases} u_c = E e^{j\omega t} \\ i_c(t) = C \cdot E \cdot j \cdot \omega \cdot e^{j\omega t} \end{cases} \quad (2.24)$$

$$Z_c = \frac{u_c}{i_c} = \frac{E e^{j\omega t}}{C \cdot E \cdot j \cdot \omega \cdot e^{j\omega t}} \rightarrow \mathbf{Z_c} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{j\omega C}} \quad (2.25)$$

2.4.2 Bobine

Soit une bobine traversée par un courant $i_L(t) = I e^{j\omega t}$

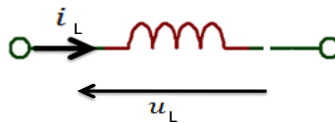


Figure 2.15 Impédance Z_L .

La loi élémentaire donne :

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d(Ie^{j\omega t})}{dt} = L \cdot I \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t} \quad (2.26)$$

$$Z_L = \frac{u_L}{i_L} = \frac{L \cdot I \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}}{I e^{j\omega t}} = j\omega L \quad \rightarrow \mathbf{Z_L} = \mathbf{j\omega L} \quad (2.27)$$

2.4.3 Impédance complexe de la résistance

En, utilisant la loi d'Ohm :

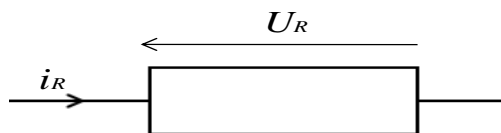


Figure 2.16 Impédance Z_R .

$$Z_R = \frac{u_R}{i_R} = R \quad \rightarrow \mathbf{Z_R} = \mathbf{R} \quad (2.28)$$

2.5 Puissances en régime sinusoïdal (instantanée, active, réactive, apparente)

La puissance en régime alternatif est la puissance dans un circuit électrique fonctionnant en régime alternatif sinusoïdal. Dans cette section, on aborde les notions de puissance active, apparente et réactive

2.5.1 Puissance instantanée

En régime sinusoïdal, la tension aux bornes d'un dipôle est égale à $u(t) = U_M \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$. Lorsqu'il est traversé par un courant instantané de forme $i(t) = I_M \cdot \sin(\omega t)$, le dipôle "**absorbe**" à chaque instant une puissance instantanée.

$$\begin{cases} u(t) = U_M \cdot \sin(\omega t + \varphi) = U_{eff} \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ i(t) = I_M \cdot \sin(\omega t) = I_{eff} \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t) \end{cases} \quad (2.29)$$

La puissance instantanée est $P = u(t) * i(t) = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \varphi) * I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t)$

$$P = 2UI \sin(\omega t + \varphi) * \sin(\omega t) \quad (2.30)$$

Utilisant les identités trigonométriques, la puissance est alors égale à :

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)] \quad (2.31)$$

$$P = UI \cos \varphi - UI \cdot \cos(2\omega t + \varphi) \quad (2.32)$$

On constate que la puissance instantanée est la somme d'un terme constant " $UI \cdot \cos(\varphi)$ " et d'un terme variant périodiquement " $UI \cdot \cos(2\omega t + \varphi)$ ".

Puissance active

La puissance active représente la puissance moyenne consommée par le dipôle. Elle est exprimée en Watts.

$$P = UI \cdot \cos(\varphi), [Watts] \quad (2.33)$$

Puissance réactive

Le produit $UI \cdot \sin(\varphi)$ représente la puissance réactive et a pour symbole Q .

$$Q = UI \cdot \sin(\varphi), [VAR] \quad (2.34)$$

Q , s'exprime en Volt-Ampères-Réactifs [V.A.R].

Puissance apparente

La puissance apparente est la puissance fournie par la source. Mathématiquement, le produit UI , s'exprime en Volt Ampère. Elle a pour symbole S

$$S = UI, [VA] \quad (2.35)$$

2.6 Théorème de Boucherot

Le théorème de Boucherot énonce la conservation des puissances active et réactive. Dans toute installation électrique (plusieurs récepteurs de nature différente), on a :

- La **puissance active totale** consommée par l'installation est égale à la **somme arithmétique** des puissances actives consommées par chaque récepteur

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = \sum_{i=1}^n p_i \quad (2.36)$$

- La **puissance réactive totale** consommée par l'installation est la **somme algébrique** des puissances réactives consommées par chaque récepteur.

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n = \sum_{i=1}^n Q_i \quad (2.37)$$

Par contre les puissances apparentes ne se conservent pas.
S n'est pas égale à S1 + S2 + S3

Pour appliquer la **méthode de Boucherot** à un circuit ou une installation, il faut dresser le bilan des puissances actives et réactives. Ce bilan peut se présenter sous la forme d'un tableau.

DIPOLES	PUISSANCE ACTIVE (W)	PUISSANCE REACTIVE (VAR)
Récepteur 1	P_1	$Q_1 = P_1 \tan \varphi_1$
Récepteur 2	P_2	$Q_2 = P_2 \tan \varphi_2$
Récepteur 3	P_3	$Q_3 = P_3 \tan \varphi_3$
INSTALLATION	$P = P_1 + P_2 + P_3$	$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

Tableau 1 : Bilan de puissance.

2.7 Régime transitoire des circuits RL, RC et RLC

Les régimes transitoires des circuits RC, RL et RLC série, revient à l'ouverture et la fermeture d'un interrupteur [interrupteur fermé $i \neq 0$, interrupteur ouvert $i = 0$].

Pour observer ces régimes, nous appliquons une succession d'échelons de tension $[0, E]$ et $[E, 0]$ en entrée du circuit à l'aide d'un signal créneau délivré par une générateur basse fréquence [4-5].

2.7.1 Circuit RC

On considère le circuit constitué d'un condensateur de capacité C et d'une résistance R en série. L'ensemble est soumis à une tension E (voir figure 2.17).

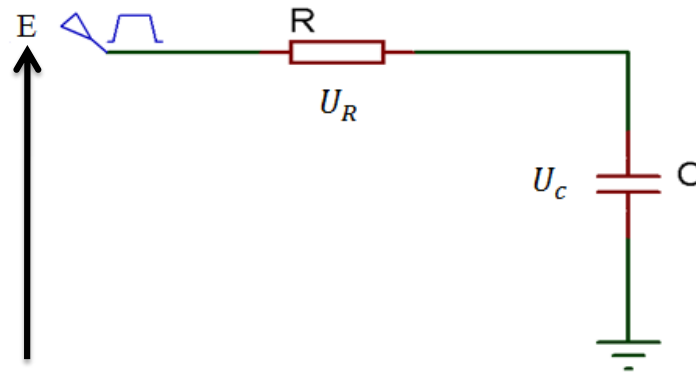


Figure 2.17 Circuit RC en régime transitoire.

Appliquons la loi des mailles au circuit ci dessus :

$$E - U_R - U_c = 0 \quad E = U_R + U_c \quad (2.38)$$

$$U_c = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad i(t) = C \frac{dU_c}{dt} \quad (2.39)$$

$$Ri(t) + U_c = E \quad RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = E \quad \text{On divise par } RC \quad \frac{dU_c}{dt} + \frac{1}{RC} U_c = \frac{E}{RC}$$

On pose $\tau = RC$: constante de temps du circuit

$$\frac{dU_c}{dt} + \frac{1}{\tau} U_c = \frac{E}{\tau} \quad (2.40)$$

Résolution de l'équation différentielle

L'équation (2.40) est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants et avec second membre.

Donc, les solutions de l'équation (2.40) sont de la forme :

$$U_c = Ae^{at} + \beta \quad (2.41)$$

A, a, β sont des constants.

Alors

$$\frac{dU_c}{dt} = Aae^{at} \quad (2.42)$$

En remplaçant dans l'équation, nous obtenons :

$$Aae^{at} + \frac{1}{\tau} Ae^{at} + \beta = \frac{E}{\tau} \quad (2.43)$$

$$Ae^{at} \left(a + \frac{1}{\tau} \right) + \beta \frac{1}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad (2.44)$$

L'égalité de l'équation est vrai quel que soit t si seulement si :

$$a + \frac{1}{\tau} = 0 \quad a = -\frac{1}{\tau}$$

$$\beta \frac{1}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad \beta = E$$

$$\text{Donc } U_c = A e^{-\frac{1}{\tau}t} + E$$

Appliquons les conditions initiales à l'équation.

$$\text{A } t=0, U_c(0) = 0 \quad A + E = 0 \quad \text{par la suite } A = -E$$

$$U_c = -E e^{-\frac{1}{\tau}t} + E \quad (2.45)$$

$$U_c = E \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t} \right) \quad (2.46)$$

D'autre part, on a :

$$i(t) = C \frac{dU_c}{dt} = C \frac{d\left(U_c = -E \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t} \right) \right)}{dt}$$

$$= C \frac{E}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau}t} = C \frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

$$i(t) = I_{\max} e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad (2.47)$$

La figure 2.18 donne l'évolution de la tension aux bornes du condensateur au cours de la charge et de la décharge.

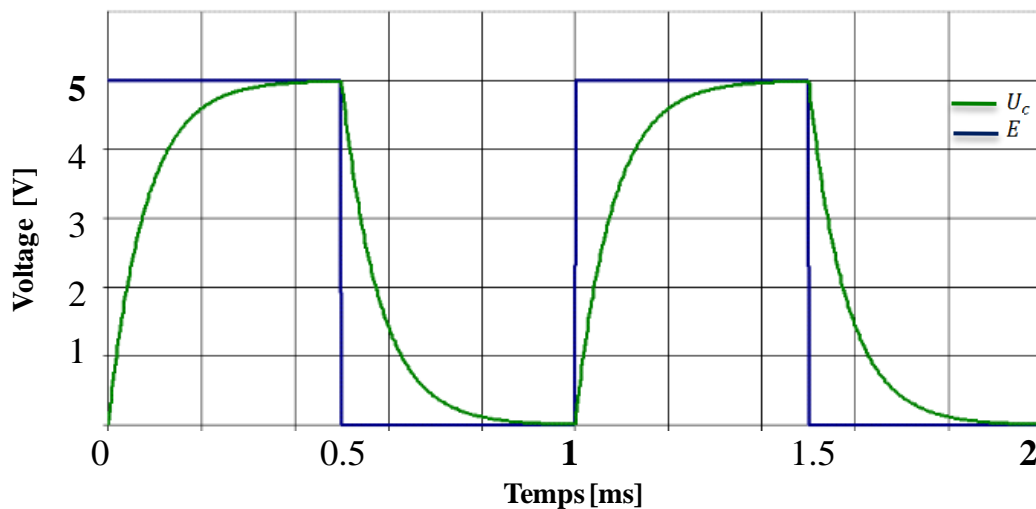


Figure 2.18 Evolution de la tension aux bornes du condensateur.

2.7.2 Circuit RL

À l'instant $t = 0$, l'interrupteur fermé. Le circuit RL est donc soumis à la tension E.

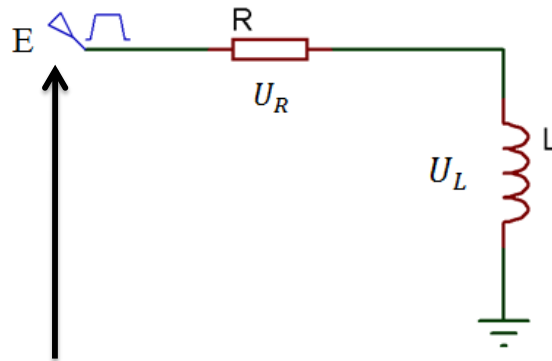


Figure 2.19 Circuit RL en régime transitoire.

Appliquons la loi des mailles au circuit ci dessus :

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = E \quad (2.48)$$

$\frac{di(t)}{dt} + \frac{L}{R}i(t) = \frac{E}{L}$ On pose $\tau = \frac{L}{R}$ qui est la constante du temps du circuit RL.

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}i(t) = \frac{E}{L} \quad (2.49)$$

L'équation (2.49) est une équation différentielle du premier ordre, qui donne après intégration :

$$i(t) = \underbrace{Ae^{at}}_{\text{Solution générale}} + \underbrace{\beta}_{\text{Solution particulière}}$$

Pour $i = \text{const}$, l'équation (2.49) donne :

$$i = \beta = \tau \frac{E}{L} = \frac{E}{R}$$

On déduit à $t = 0, i = 0$, les conditions initiales :

$$A = -\beta = -\frac{E}{R}$$

La solution finale s'écrit sous la forme :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t} \right) \quad (2.50)$$

Avec : $\tau = \frac{L}{R}$

La tension aux bornes de la bobine U_L est donc calculée.

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t} \right) \quad (2.51)$$

$$U_L = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d\left(\frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t} \right) \right)}{dt} = L \frac{E}{R} \left(0 + \frac{1}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau}t} \right)$$

$$U_L = \frac{EL}{R\tau} e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

$$U_L = E e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad (2.52)$$

2.7.3 Circuit RLC

On considère le circuit RLC série suivant :

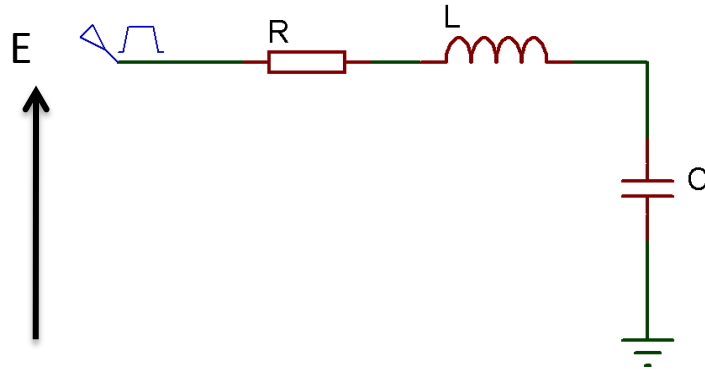


Figure 2.20 Circuit RLC en régime transitoire.

Appliquons la loi des mailles au circuit au dessus :

$$U_R + U_L + U_C = E \quad (2.53)$$

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{LC} = \frac{E}{LC} \quad (2.54)$$

Sous la forme canonique, on peut l'écrire :

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dU_C}{dt} + \omega_0^2 U_C = \omega_0^2 E \quad (2.55)$$

On pose :

ω_0 : Pulsation propre, en rad/s .

Q : Facteur de qualité (sans unité).

λ : Coefficient d'amortissement, en rad/s .

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ 2\lambda = \frac{\omega_0}{Q} \\ Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases} \quad (2.56)$$

On remplace $\frac{\omega_0}{Q}$:

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + 2\lambda \frac{dU_C}{dt} + \omega_0^2 U_C = \omega_0^2 E \quad (2.57)$$

Résolution de l'équation différentielle

L'équation caractéristique de l'équation différentielle est :

$$X^2 + 2\lambda X + \omega_0^2 = 0 \quad (2.58)$$

$$\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 = 4(\lambda^2 - \omega_0^2) \quad (2.59)$$

- **Cas N° 1** : $\Delta > 0$ (*soit* $\lambda > \omega_0$ *ou* $Q < \frac{1}{2}$)

Dans ce cas, l'équation caractéristique a deux solutions réelles :

$$X_{1,2} = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{\Delta}}{2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad (2.60)$$

La solution générale est de la forme :

$$U_C(t) = Ae^{X_1 t} + Be^{X_2 t} \quad (2.61)$$

$$U_C(t) = Ae^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + Be^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} \quad (2.62)$$

On a donc un régime apériodique, Pour observer ce régime, nous avons choisi une résistance dans le circuit voisine de celle de la résistance critique pouvant être calculée avec les valeurs des différents composants.

$$R > R_C \quad (2.63)$$

Avec : $R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

- **Cas N° 2** : $\Delta = 0$ (*soit* $\lambda = \omega_0$ *ou* $Q = \frac{1}{2}$)

On a une racine double : $X = \frac{-2\lambda}{2} = -\lambda = -\omega_0$

La solution générale est de la forme suivante :

$$U_C(t) = (At + B)e^{-\lambda t} \quad (2.64)$$

Cette solution représente le régime critique. Pour observer ce régime on pose $R = R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

- **Cas N° 3** : $\Delta < 0$ (*soit* $\lambda < \omega_0$ *ou* $Q > \frac{1}{2}$)

$$\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 = 4(\lambda^2 - \omega_0^2) < 0$$

On pose

$$\begin{cases} \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 \\ \tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{1}{\lambda} \end{cases} \quad (2.65)$$

Donc :

$$\Delta = -4\omega^2 = j^2 4\omega^2$$

$$X_{1,2} = -\lambda \pm j\omega$$

Alors, la solution générale de cette équation est de la forme :

$$U_C(t) = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.66)$$

Cette solution correspond au régime pseudopériodique. La multiplication du signal sinusoïdal par exponentielle $(-t)$, génère un régime pseudo périodique.

2.8 Régime harmonique

L'objectif de l'étude du comportement des dipôles en régime harmonique est de déterminer la nature des impédances associées.

Soit un circuit RLC en série soumis un une tension sinusoïdale. Le courant qui circule dans la maille est de la forme :

$$i(t) = 5\sqrt{2} \sin(50\pi t) \text{ à titre exemple, avec } \omega = 50\pi \text{ rad/s}$$

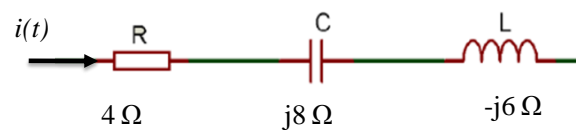


Figure 2.21 Circuit RLC en régime harmonique.

Le comportement ou la nature de l'impédance d'un dipôle revient à évaluer le déphasage d'impédance (le déphasage entre la tension au borne du dipôle lorsqu'il est parcouru par un courant).

2.8.1 Résistance

$$u_R(t) = R * i(t) \quad (2.67)$$

$$\begin{cases} u_R(t) = 20\sqrt{2} \sin(50\pi t) \\ i(t) = 5\sqrt{2} \sin(50\pi t) \end{cases}$$

On déduit qu'aux bornes de la résistance, le déphasage est nul $\Delta\varphi[u_R(t), i(t)] = 0$. (voir figure 2.22), l'impédance Z_R est alors de nature **résistive** dans ce cas.

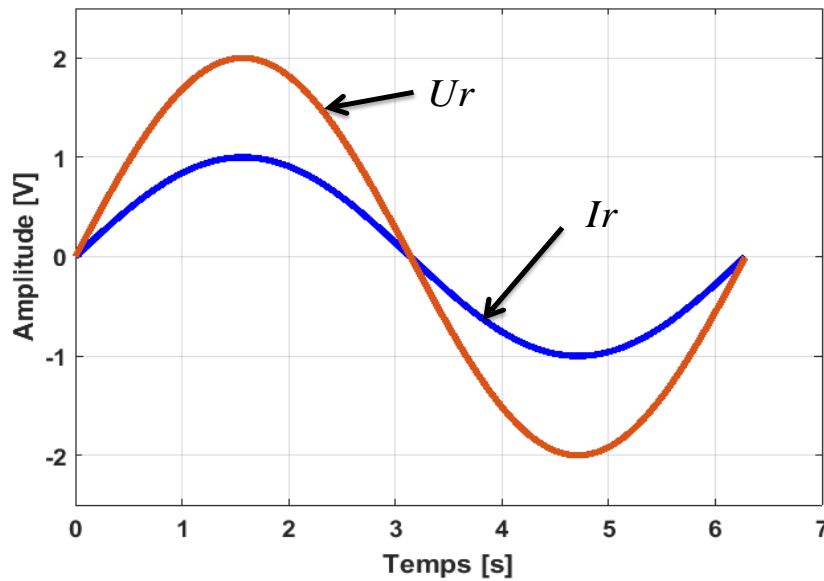


Figure 2.22 Déphasage aux bornes de la résistance.

2.8.2 Bobine (voir figure 2.21)

$$\begin{aligned} u_L(t) &= L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d(5\sqrt{2} \sin(50\pi t))}{dt} \\ &= L5\sqrt{2} \omega \cos(50\pi t) \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{cases} u_L(t) = L5\sqrt{2} \omega \cos(50\pi t) \\ i(t) = 5\sqrt{2} \sin(50\pi t) \end{cases}$$

On ne peut pas déduire le déphasage entre (sin et cos). On a:

$$\cos a = \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.69)$$

a : constant

Alors :

$$\begin{cases} u_L(t) = 40\sqrt{2} \sin\left(50\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \\ i(t) = 5\sqrt{2} \sin(50\pi t) \end{cases}$$

On déduit qu'aux bornes de la bobine, le déphasage est $\Delta\varphi[u_L(t), i(t)] = +\frac{\pi}{2}$.

L'impédance Z_L est de nature **inductive (purement inductive)**. La figure 2.23 illustre le déphasage aux bornes de la bobine.

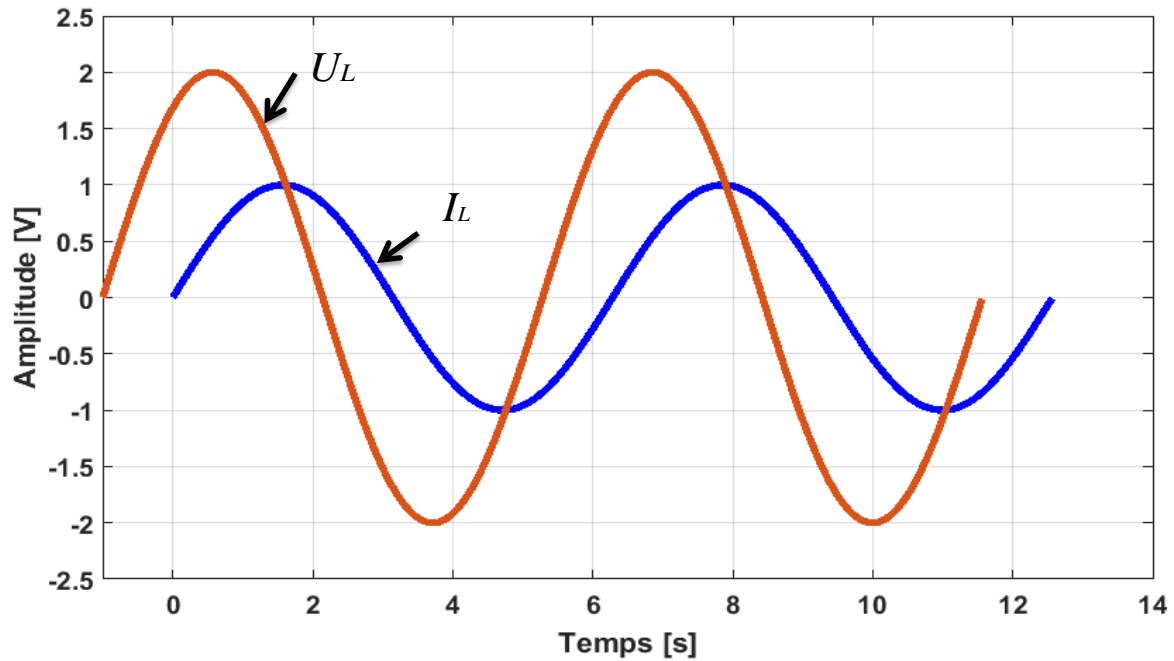


Figure 2.23 Déphasage aux bornes de la bobine.

2.8.3 Condensateur (voir figure 2.21)

$$\begin{aligned} u_c(t) &= \frac{1}{c} \int i(t) dt = \frac{1}{c} \int 5\sqrt{2} \sin(50\pi t) dt \\ &= \frac{1}{c} \frac{1}{\omega} 5\sqrt{2} (-\cos 50\pi t) \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$u_c(t) = \frac{1}{\omega c} 5\sqrt{2} (-\cos 50\pi t)$$

$$\begin{cases} u_c(t) = \frac{1}{\omega c} 5\sqrt{2} (-\cos 50\pi t) \\ i(t) = 5\sqrt{2} \sin(50\pi t) \end{cases}$$

On a :

$$-\cos a = \sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.71)$$

a : constant

et $\frac{1}{\omega c} = 6 \Omega$, alors :

$$\begin{cases} u_c(t) = 30\sqrt{2} \sin\left(50\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \\ i(t) = 5\sqrt{2} \sin(50\pi t) \end{cases}$$

On déduit qu'aux bornes du condensateur, le déphasage est $\Delta\varphi[u_c(t), i(t)] = -\frac{\pi}{2}$.

L'impédance Z_c est de nature **capacitive (purement capacitive)**. La figure 2.24 illustre le déphasage aux bornes du condensateur.

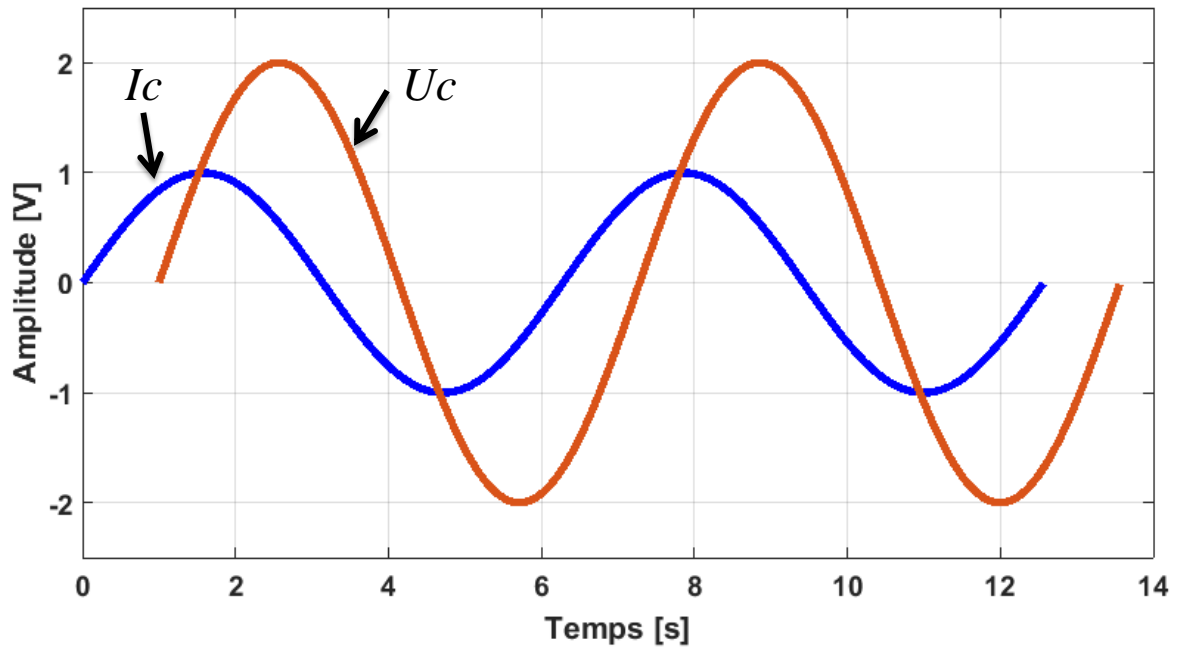


Figure 2.24 Déphasage aux bornes du condensateur.

Chapitre 3 : Circuits et puissances électriques

3.1 Circuits monophasés et puissances électriques

Soit un système de transmission de l'énergie électrique où le générateur fournit une tension fixe (alternative sinusoïdale). L'énergie est transportée au récepteur (consommateur montré à la figure 3.1) par **une ligne** de distribution, à une seule phase.

Le système (source et récepteur) est dit **monophasé**.

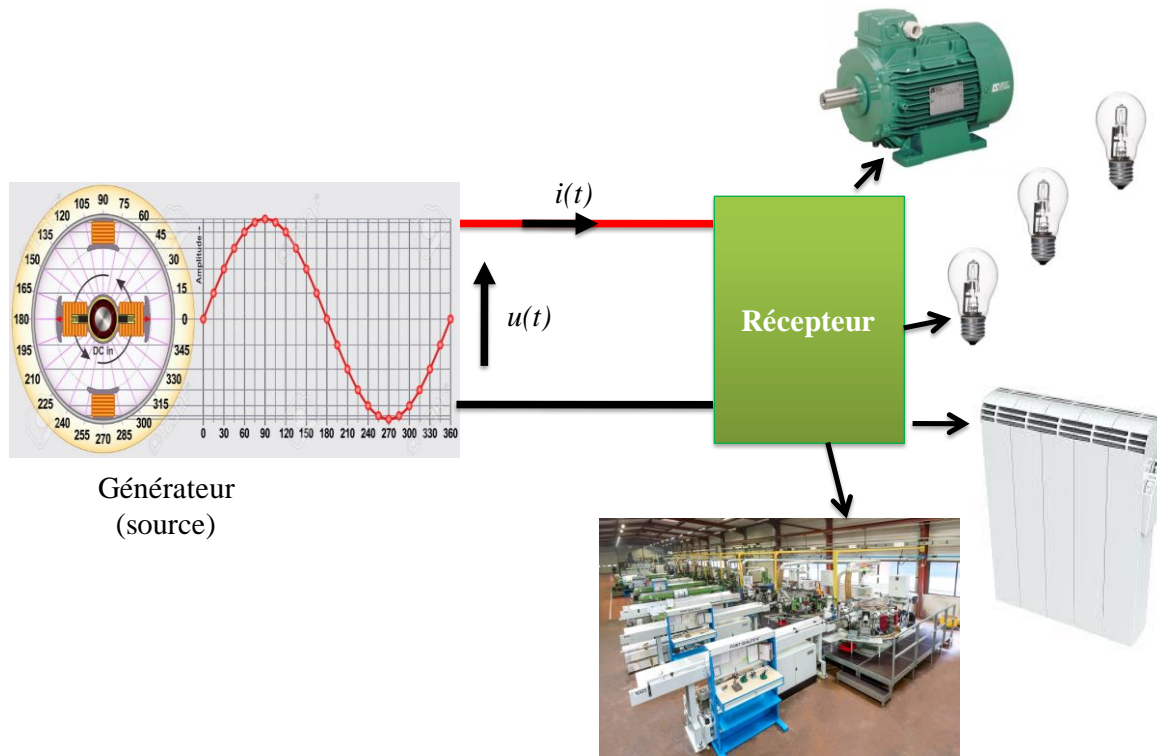


Figure 3.1 Installation monophasée.

Les circuits monophasés sont composés d'une seule phase et du neutre. On peut produire un courant monophasé à partir d'un réseau triphasé, en connectant une des trois phases et le neutre.

Le récepteur représente les installations électriques et les blocs, des bâtiments. Généralement, on peut les classer en trois types:

- **Récepteur inductif (moteur).**
- **Récepteur résistif (four, radiateur).**
- **Récepteur capacitif (condensateur).**

3.2 Puissances électriques en monophasé

Les équations des puissances électriques établies dans le chapitre précédent, correspondant à la puissance moyenne, à la puissance active, réactive et apparente, peuvent se représenter géométriquement au moyen d'un triangle appelé « *triangle des puissances* ».

L'installation électrique est caractérisée par un triangle de puissance.

Considérons le cas d'un récepteur inductif (moteur) : le courant I est en retard sur la tension V , qui est prise comme origine des phases.

On remplace les vecteurs V et I par les composantes \cos et \sin .

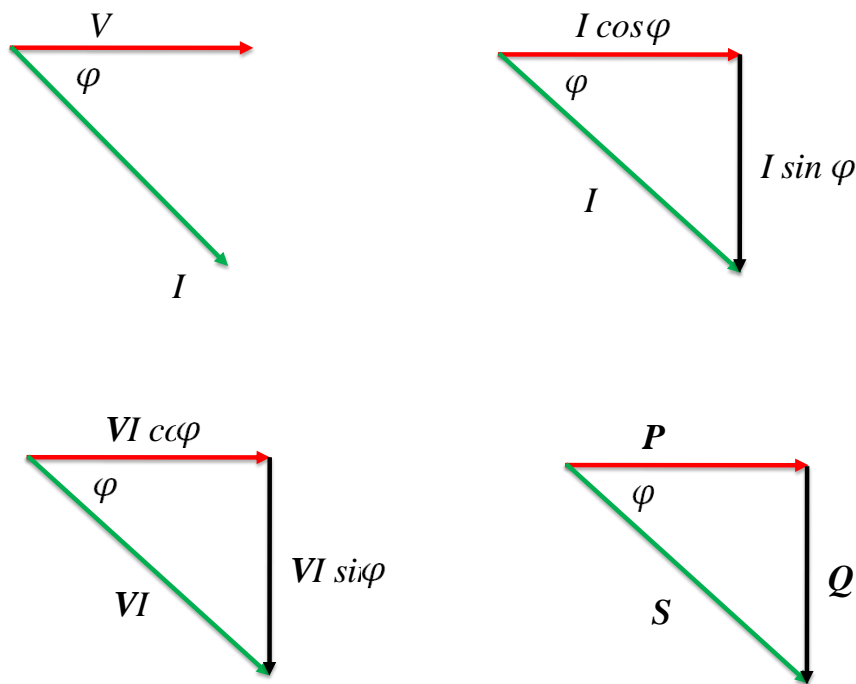


Figure 3.2 Triangle de puissance pour une charge inductive.

En résumé on a :

Puissance moyenne (active) $P = VI \cos \varphi$

Puissance réactive $Q = VI \sin \varphi$

Puissance apparente $S = VI$

Facteur de puissance $\cos \varphi = P/S$

On peut procéder de la même manière un récepteur capacitif.

Remarque

Dans le cas d'un récepteur de nature résistif $\varphi = 0$

$$\begin{cases} P = VI \cos(0) \\ Q = VI \sin(0) \\ S = VI \end{cases} \quad \begin{cases} P = VI \\ Q = 0 \\ S = VI \end{cases} \quad (3.1)$$

La puissance apparente est égale à la puissance active, la figure 3.3 représente le diagramme de puissance pour une charge résistive.

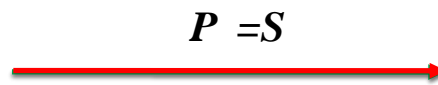


Figure 3.3 Diagramme de puissance pour une charge résistive.

3.2.1 Exemple d'étude d'une installation

Une installation électrique monophasée, alimentée sous une tension de 230V ; 50 Hz comporte :

- 02 radiateurs de puissance $P = 5 \text{ kW}$.
- 03 moteurs absorbent 3 kW (pour chaque moteur), avec un facteur de puissance $FP_1 = 0,74$, $FP_2 = 0,72$, $FP_3 = 0,71$
- Un poste à soudure de puissance électrique $P_3 = 4 \text{ kW}$ et de facteur de puissance $FP = 0.83$.
- Un sècheur électrique qui absorbe 5 kW

On s'intéresse au dimensionnement du bilan de puissances, pour cela, on va :

- 1- Calculer la puissance active totale P lorsque tous les récepteurs sont en fonctionnement.
- 2- Calculer la puissance réactive totale Q lorsque tous les récepteurs sont en fonctionnement.
- 3- Calculer ensuite la puissance apparente totale S et en déduire le facteur de puissance F_p de l'installation ainsi que le courant en ligne I .
- 4- On ajoute un condensateur en parallèle avec l'installation. Quelle doit d'être la capacité du condensateur pour relever le facteur de puissance à 0.94 ?

Solution

On commence par une représentation graphique de l'installation, puis on détermine les puissances de chaque élément de l'installation. La figure 3.4 représente un schéma synoptique de l'installation.

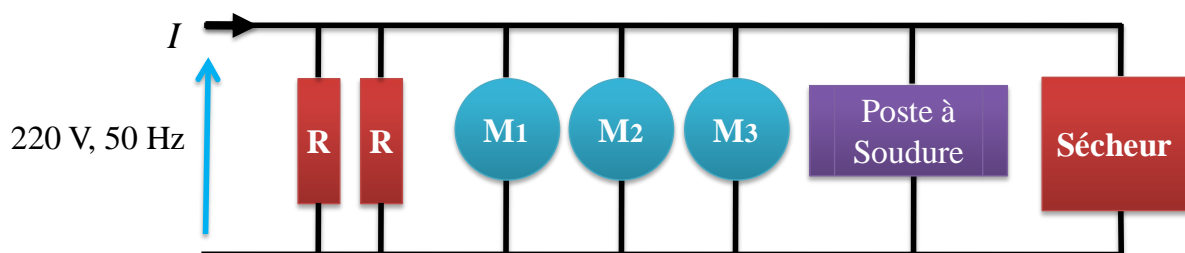


Figure 3.4 Synoptique de l'installation.

1- Calcul de la puissance active totale P

Pour calculer cette puissance, on calcule la puissance active de chaque élément puis on applique théorème de Boucherot. Pour les radiateurs, la puissance absorbée est **totalem**ent dissipée sous forme de chaleur. Donc la puissance réactive est nulle. Mathématiquement, aux bornes d'une charge résistive le déphasage est nul ($\Delta\varphi = 0$), alors :

Deux radiateurs	Un poste à soudure	Un sècheur électrique	Trois moteurs
$P_{2R} = 2 * 5 = 10 \text{ KW}$	$P_{P.S} = 4 \text{ KW}$	$P_F = 5 \text{ kW.}$	$P_{3M} = P_{M1} + P_{M2} + P_{M3}$ $= 3 * P$ $P_{3M} = 9 \text{ KW}$

$$P_T = P_{2R} + P_{p.s} + P_F + P_{3M} = 10 + 4 + 5 + 9$$

$$P_T = 28 \text{ KW}$$

2- Calculer la puissance réactive totale Q

La puissance réactive, d'après le triangle de puissance :

$$Q = P * \tan \varphi$$

A- Deux Radiateurs

$$Q = P * \tan(0) = 0 \text{ VAR}$$

$$Q_{2R} = 0 \text{ VAR}$$

B- Trois Moteurs

Moteur 1	Moteur 2	Moteur 3
$Q_1 = P_1 * \tan \varphi_1$	$Q_2 = P_2 * \tan \varphi_2$	$Q_3 = P_3 * \tan \varphi_3$
$\varphi_1 = \cos^{-1}(0.74)$	$\varphi_2 = \cos^{-1}(0.72)$	$\varphi_3 = \cos^{-1}(0.71)$
$\varphi_1 = 42.26^\circ$	$\varphi_2 = 43.94^\circ$	$\varphi_3 = 44.76^\circ$
$Q_1 = 3 * \tan(42.26)$	$Q_2 = 3 * \tan(43.94)$	$Q_3 = 3 * \tan(44.76^\circ)$
$Q_1 = 2.73 \text{ kVAR}$	$Q_2 = 2.89 \text{ KVAR}$	$Q_3 = 2.97 \text{ KVAR}$

Alors :

$$Q_{3M} = Q_{M1} + Q_{M2} + Q_{M3} = 2.73 + 2.89 + 2.97$$

$$Q_{3M} = 8.60 \text{ KVAR}$$

C- Un poste à soudure

$$Q = P * \tan \varphi$$

$$\varphi = \cos^{-1}(0.83)$$

$$\varphi = 45.57^\circ$$

$$Q_{P,S} = 4 * \tan(43.94^\circ)$$

$$Q_{P,S} = 2.68 \text{ KVAR}$$

D- Un sécheur électrique

Le sécheur électrique présent le même comportement que les radiateurs, donc on aura :

$$Q_{s.é} = 0 \text{ VAR}$$

Alors :

$$Q_T = Q_{2R} + Q_{3M} + Q_{P,S} + Q_{s.é} = 0 + 8.60 + 2.68 + 0 = 11.28 \text{ KVAR}$$

$$Q_T = 11.28 \text{ KVAR}$$

3- Calculer ensuite la puissance apparente totale S et en déduire le facteur de puissance F_p de l'installation ainsi que le courant en ligne I .

A- La figure ci-dessous représente le triangle de puissance, on peut déduire que :

$$S = \sqrt{(P_T)^2 + (Q_T)^2} = \sqrt{(28)^2 + (11.28)^2}$$

$$S = 30.18 \text{ KVA}$$

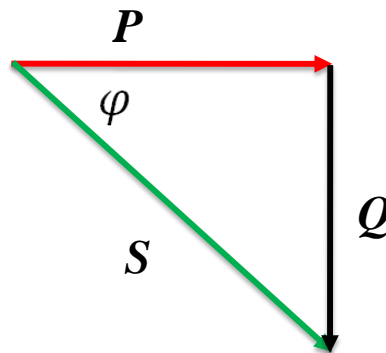


Figure 3.5 Triangle de puissance.

B- Facteur de puissance

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{28}{30.64} = 0.91$$

$$\cos \varphi = 0.91$$

C- L'intensité de courant :

On a l'équation :

$$S = VI \text{ Alors :}$$

$$I = \frac{S}{V} = \frac{30.64 * 10^3}{220} = 139.27 \text{ A}$$

$$I = 139.27 \text{ A}$$

3.3 Amélioration du facteur de puissance

Dans les applications industrielles, il est souvent souhaitable que la puissance apparente S soit voisine le plus possible de P , c'est-à-dire que l'angle tend vers zéro (0°), et le facteur de puissance vers 1.

Dans le cas usuel des moteurs (charge inductive), il est très souvent possible d'améliorer le facteur de puissance en branchant des capacités en parallèle avec le récepteur [3].

Aux bornes du condensateur, le déphasage est négatif $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$

La puissance active du condensateur est :

$$P_c = VI \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = VI * 0 \quad (3.2)$$

$$P_c = 0 \text{ W} \quad (3.3)$$

Il faut noter alors, que la puissance active ne change pas.

La puissance réactive :

$$Q_c = VI \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \quad (3.4)$$

$$Q_c = -V^2 \omega C \quad (3.5)$$

Comme la puissance réactive du condensateur est négative, alors $Q'_T = Q_T - Q_c$, donc :

$$Q'_T < Q_T \quad (3.6)$$

Si on désire d'améliorer le facteur de puissance de l'installation précédente à 0.94,

$$P'_T = P_T \quad (3.7)$$

La puissance réactive :

$$Q'_T = P'_T \tan \varphi' \quad (3.8)$$

$$\cos \varphi' = 0.94$$

$$\varphi' = 19.94^\circ$$

$$\tan \varphi' = 0.36$$

$$Q'_T = P'_T \tan \varphi' = 28 * 0.36 \text{ KVAR}$$

$$Q'_T = 10.16 \text{ KVAR}$$

$$\Delta Q = Q'_T - Q_T = 10.16 - 11.28$$

$$\Delta Q = Q_C = -1637.35 \text{ VAR}$$

$$-1637.35 = -V^2 \omega C$$

$$C = \frac{\Delta Q}{V^2 2\pi F} = \frac{1637.35}{(220)^2 * 2\pi * 50} = \frac{1637.35}{16610600} = 107.68 \mu\text{F}$$

$$C = 107.68 \mu\text{F}$$

On branche alors un condensateur en parallèle à l'installation :

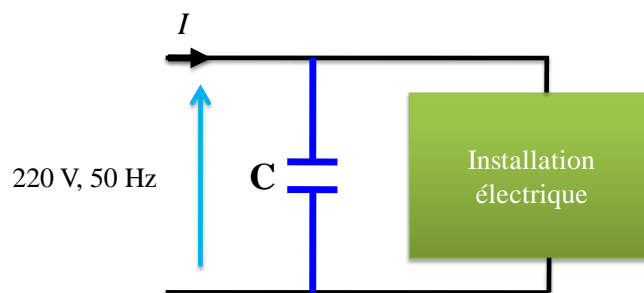


Figure 3.6 Amélioration du $\cos \varphi$.

Il est très intéressant de noter que la puissance active ou utile P ne change pas, vu que la tension aux bornes de la charge ou du récepteur reste la même puissance. Alors que la puissance réactive fournie par le condensateur est négative donc la réactive totale diminue et le facteur de puissance augmente. Le courant et la puissance apparente diminue et par conséquence le rendement du système de distribution augmente.

3.4 Système triphasé

Dans l'industrie, la puissance monophasée ou le réseau monophasé est généralement insuffisant. L'exploitation des réseaux triphasés permet de tripler la puissance.

Ce réseau est constitué de 03 courants alternatifs sinusoïdaux de la même fréquence et de même amplitude (voir figure 3.7), mais déphasés les uns par rapport aux autres de 120° [6].

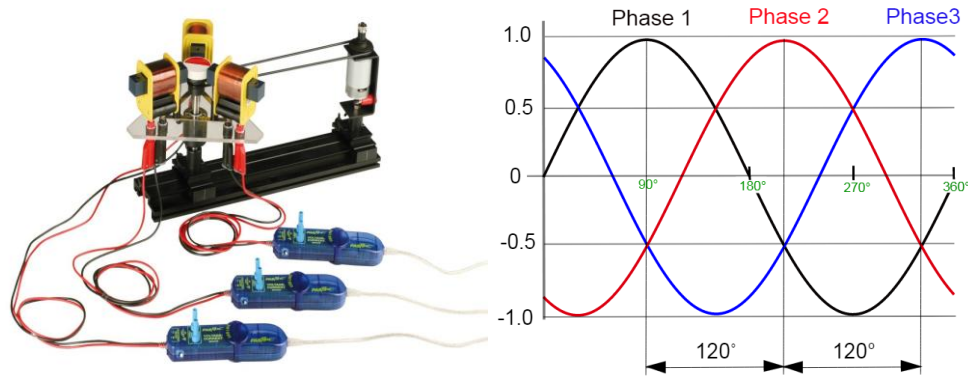


Figure 3.7 Système triphasé.

Ce réseau est généré par une machine synchrone triphasée composée d'un rotor (aimant tournant) et de 3 bobinages fixes.

Les bobinages sont séparés de 120° , autour du rotor. Puisqu'ils sont séparés, physiquement, de 120° , les tensions générées dans les bobinages V_1, V_2 et V_3 sont déphasées de 120° :

$$\begin{cases} V_1(t) = V_M \sin(\omega t) \\ V_2(t) = V_M \sin(\omega t + 120^\circ) \\ V_3(t) = V_M \sin(\omega t - 120^\circ) \end{cases} \quad (3.12)$$

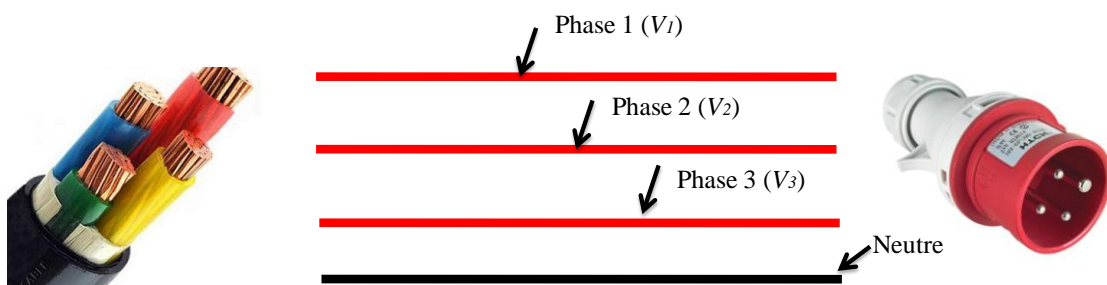


Figure 3.8 Prise triphasée.

3.4.1 Notions et définitions

Les abonnés peuvent recevoir au choix, les 4 conducteurs :

- 3 conducteurs de phase et un conducteur de neutre ce qui constitue une distribution triphasée.

Ou recevoir 02 conducteurs :

- Un conducteur de phase et un conducteur de neutre

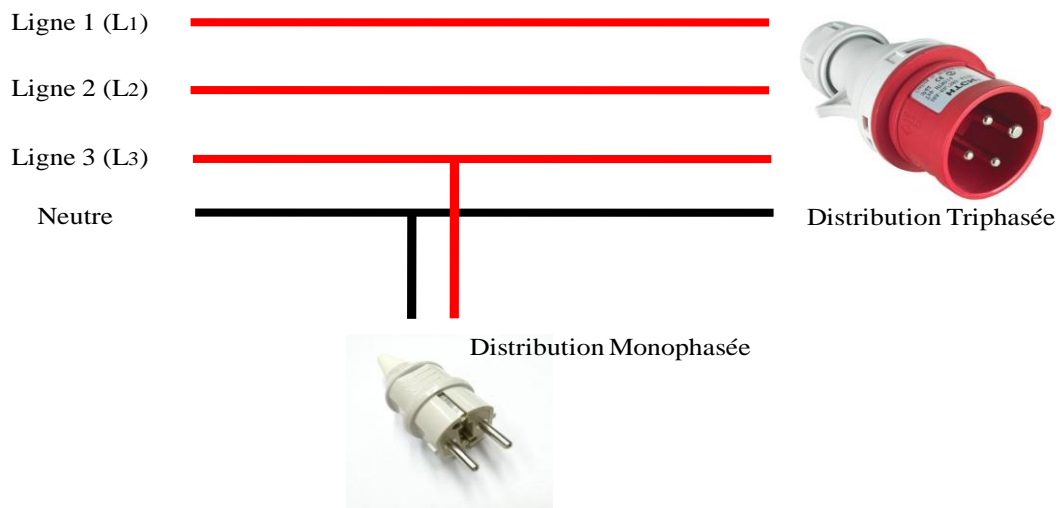


Figure 3.9 Distribution mixte.

3.4.2 Tensions simples et composées

Les tensions simples sont les tensions V_1 , V_2 et V_3 que l'on peut mesurer entre le neutre et chacune des trois phases ou lignes (L1, L2 et L3). Les trois tensions mesurées sont égales et valent **230 V** de valeur efficace en ce qui concerne la distribution domestique.

La figure 3.10 représente les trois tensions simples.

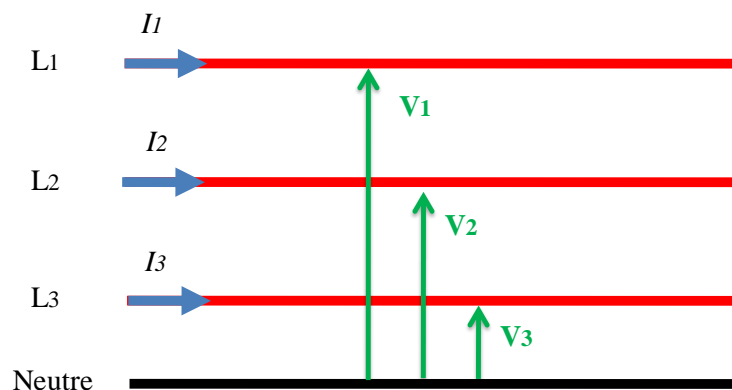


Figure 3.10 Tensions simple.

Les tensions composées sont les tensions U_{12} , U_{23} et U_{13} que l'on peut mesurer entre phases (respectivement entre la borne 1 et 2, entre les bornes 2 et 3 et entre la borne 3 et 1).

Les trois tensions mesurées **sont égales et valent 380 V**, en valeur efficace. La figure 3.11 représente les trois tensions simples.

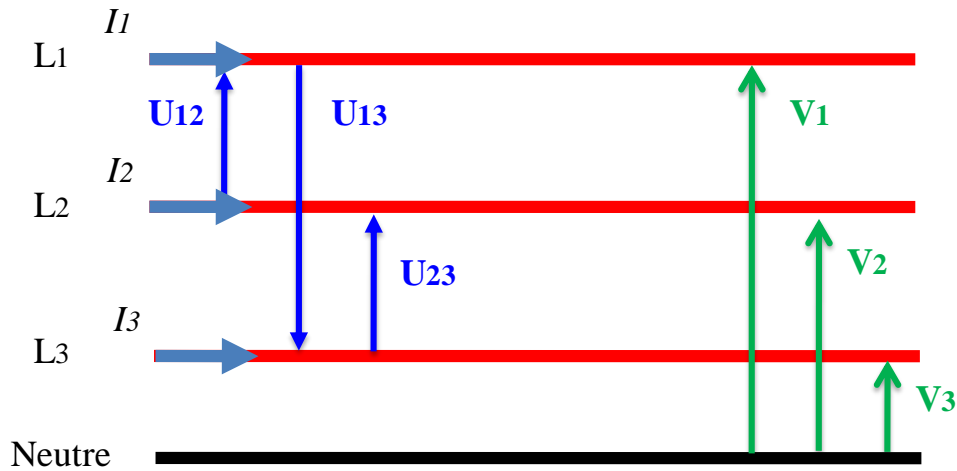


Figure 3.11 Tensions composées.

3.4.3 Relation entre U et V

On observe que $U_{12} = V_1 - V_2$ et même remarque pour les deux tensions composées [7]. La représentation vectorielle est :

$$\begin{cases} \vec{U}_{12} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \\ \vec{U}_{23} = \vec{V}_2 - \vec{V}_3 \\ \vec{U}_{13} = \vec{V}_1 - \vec{V}_3 \end{cases} \quad (3.13)$$

Nous pouvons écrire pour U_{12} :

$\vec{U}_{12} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{V}_1 + (-\vec{V}_2)$, le vecteur de \vec{U}_{12} est donnée par la figure 3.12 :

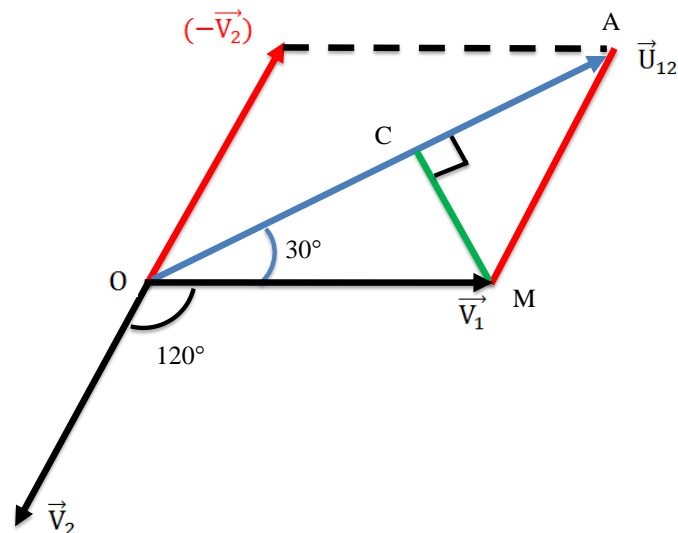


Figure 3.12 Représentation vectorielle des tensions simples.

Dans le triangle OAM (voir figure 3.12), OM (\vec{V}_1) est égal à MA ($-\vec{V}_2$), c'est donc un triangle isocèle.

La hauteur MC coupe la base OA en deux segments d'égale longueur OC et CA.

Donc l'angle \widehat{AOM} est égale à 30° , avec :

$$\cos 30^\circ = \frac{OC}{OM}$$

$$OC = OM \cos 30^\circ = OM \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$U_{12} = OA = 2 OC = 2 OM \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$U_{12} = OM\sqrt{3}, \text{ avec } OM(\vec{V}_1), \text{ alors :}$$

$$U_{12} = V_1\sqrt{3}$$

D'une façon générale, on la relation suivante :

$$U = V\sqrt{3} \quad (3.14)$$

3.5 Système triphasé déséquilibré sans neutre

Dans un système triphasé déséquilibré sans neutre, les tensions entre phases sont conservées (les tensions composées) mais pas les tensions simples.

On note que le courant de la ligne est : I

Le courant qui traverse la charge est : J

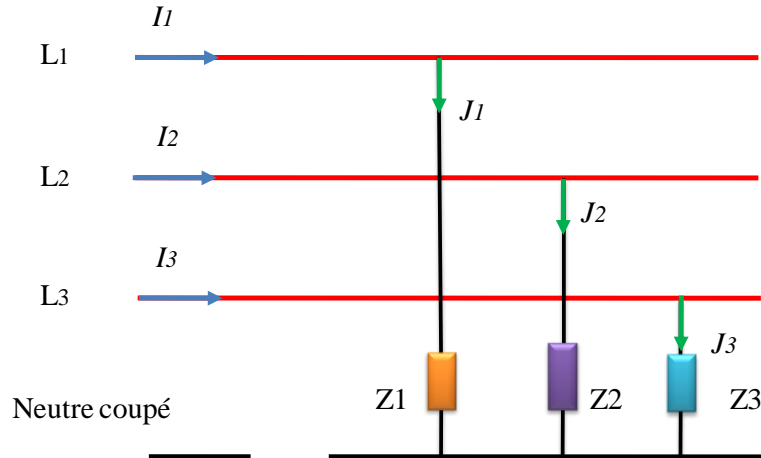


Figure 3.13 Système triphasé déséquilibré.

3.6 Puissances électriques dans d'un système équilibré

Dans un système triphasé équilibré, la somme vectorielle des courants est nulle.

$$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 = \vec{0} \quad (3.15)$$

On distingue deux modes de couplage (connexion des phases) au niveau du récepteur :

- Couplage étoile.
- Couplage triangle.

3.7 Couplage étoile équilibré

Le couplage étoile de récepteurs en triphasé revient à réaliser une étoile à trois branches avec les 3 phases. Les trois récepteurs ont la même impédance ($Z_1 = Z_2 = Z_3$), ce qui fait que l'intensité qui circule dans un récepteur couplé en étoile est la même que celle qui provient de la phase ($I = J$).

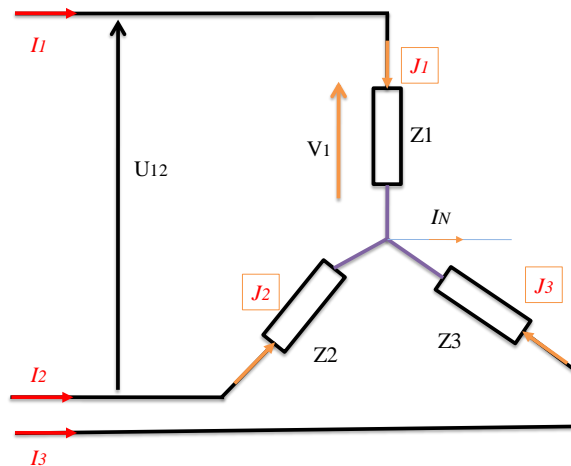


Figure 3.14 Couplage étoile.

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 = 3 P_{mono} \quad (3.16)$$

$$P_T = 3 VI * \cos \varphi = 3 VJ * \cos \varphi \quad (3.17)$$

P_{mono} représente la puissance d'une seule phase.

On a démontré que : $U = V\sqrt{3}$

$$V = \frac{U}{\sqrt{3}}$$

$$P_T = 3 \frac{U}{\sqrt{3}} I * \cos \varphi = \sqrt{3} UI \cos \varphi$$

$$P_T = \sqrt{3} UI \cos \varphi \quad (3.18)$$

La puissance réactive Q_T est donnée par:

$$Q_T = \sqrt{3} UI \sin \varphi \quad (3.19)$$

La puissance apparente S sera alors :

$$S = 3 VI = \sqrt{3} UI = \sqrt{Q_T^2 + P_T^2} \quad (3.20)$$

3.8 Couplage triangle équilibré

En triangle, le récepteur est traversé par le courant composé J et soumis à la tension composée U . On remarque qu'il n'y a pas de neutre dans le couplage triangle.

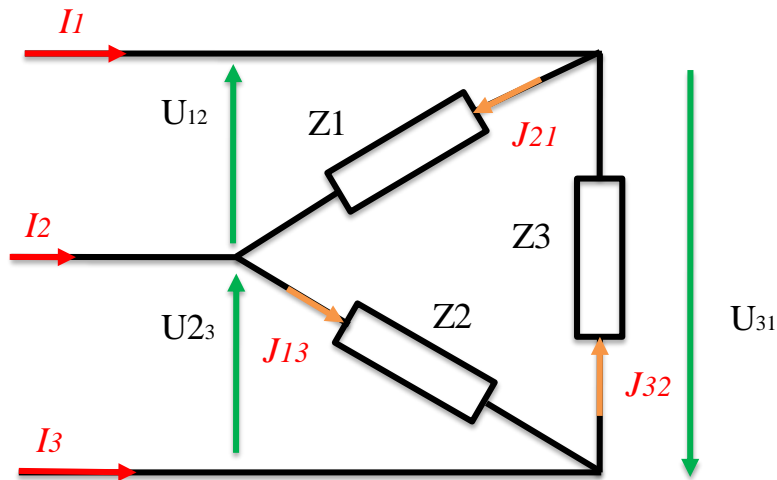


Figure 3.15 Couplage triangle.

Pour un récepteur :

$$P_{mono} = UJ * \cos \varphi \quad (3.21)$$

Pour le réseau (03 récepteurs) :

$$P_T = 3UJ * \cos \varphi \quad (3.22)$$

$I = J\sqrt{3}$, $J = \frac{I}{\sqrt{3}}$ alors :

$$P_T = \sqrt{3} UI * \cos \varphi$$

Le réactif est :

$$Q_T = \sqrt{3} UI \sin \varphi \quad (3.23)$$

3.9 Application

Soit un récepteur triphasé équilibré constitué de trois récepteurs résistifs $R= 100 \Omega$. Ce récepteur est alimenté par un réseau 220V/ 380 V à 50 Hz.

1- Coulage en étoile.

Calculez la valeur efficace I du courant de ligne puis la puissance active.

2- Coulage en triangle.

Calculez la valeur efficace I du courant de ligne puis la puissance active.

Que peut-on conclure ?

Solution

1- En étoile, la figure 3.16 représente le montage.

Un réseau équilibré : $I_1=I_2=I_3=I$

À la borne du récepteur on a :

$$V = RI, I = V/R$$

$$I = 220/100 = 2.2 \text{ A.}$$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{U}{\sqrt{3}R} = \frac{380}{\sqrt{3} \cdot 100} = 2.2 \text{ A}$$

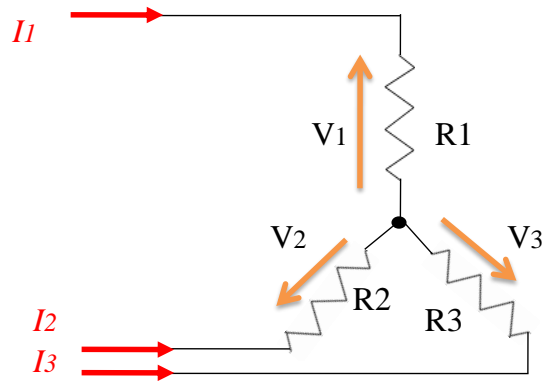


Figure 3.16 Couplage étoile.

$$I_{\text{Etoile}} = 2.2 \text{ A.}$$

Récepteur symétrique : $P_T = 3 VI = 3RI \cdot I = 3RI^2$

$$P_T = 3 * 100 * 2.2^2 \approx 1.45 \text{ KW}$$

$$P_{\text{Etoile}} \approx 1.45 \text{ KW}$$

2- En triangle, la figure 3.17 représente le montage.

Le récepteur est traversé par un courant composé J et soumis une tension composé U , donc :

$$U = J * R, J = \frac{U}{R}$$

$$J = \frac{380}{100} = 3.8 \text{ A}$$

$$J = 3.8 \text{ A}$$

$$I = \sqrt{3}J = \sqrt{3} * 3.8 \approx 6.6 \text{ A}$$

$$I_{\text{Triangle}} \approx 6.6 \text{ A}$$

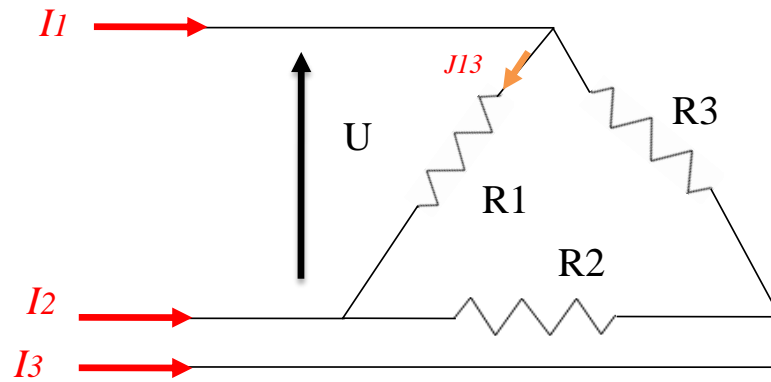


Figure 3.17 Couplage triangle.

$$P_T = 3Rj^2 = 3 * 100 * 3.8^2 = 4.33 \text{ KW}$$

$$P_{Triangle} = 4.33 \text{ KW}$$

$$P_{Triangle} = 4.33 \text{ KW} \approx 3 * 1.45$$

3.10 Conclusion

On remarque que le courant de la ligne en couplage triangle est un multiple de 3 par rapport à celui en couplage étoile.

Même observation pour les puissances. En triangle, la puissance est très importante et est 3 fois supérieure que celle couplage étoile.

Dans l'industrie, les deux types de couplage sont utilisés pour le démarrage des moteurs.

Cette technique est dite : **démarrage étoile-triangle**.

Chapitre 4 : Circuits magnétiques

4.1 Circuits magnétiques

Dans les applications industrielles, l'utilisation des transformateurs, des inductances, alternateurs...etc., est indispensable. Ces dispositifs d'électrotechnique reposent principalement sur l'utilisation de **circuits magnétiques**.

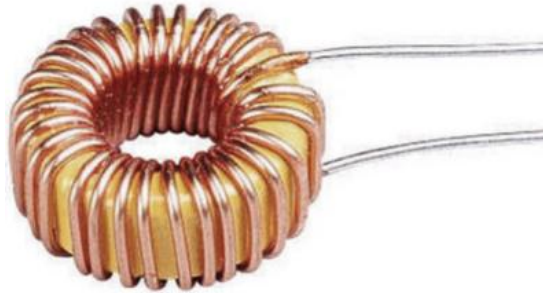


Figure 4.1 Circuit magnétique.

Un circuit magnétique est semblable à un circuit électrique. C'est un parcours fermé qui est réalisé avec **un matériau magnétique** de haute perméabilité $\mu_r \gg 0$.

4.2 Production d'un champ magnétique (loi d'Ampère)

Si on considère un fil parcouru par un courant. Ce courant produit un champ magnétique circulaire.

De même, une bobine parcourue par un courant produit un champ magnétique suivant l'axe du solénoïde [8].

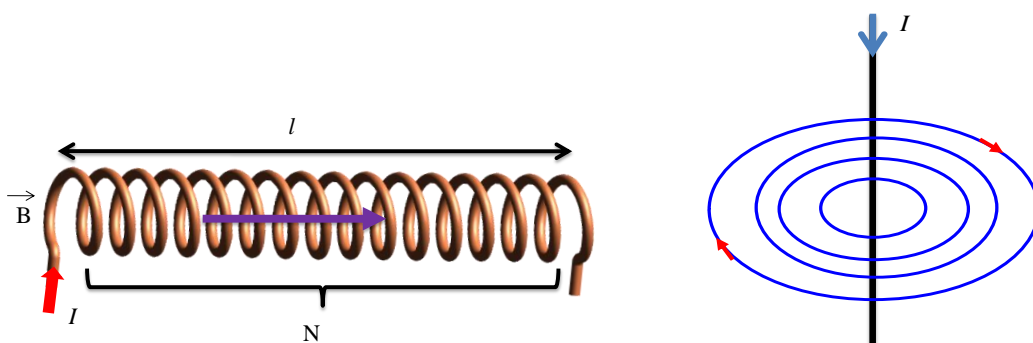


Figure 4.2 Champ magnétique créé par un courant électrique.

Selon la loi d'Ampère, le champ magnétique produit a une intensité de :

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I \quad (4.1)$$

N : Nombre de spires

l : La longueur de la bobine

μ_0 : est la perméabilité du vide égale à $4\pi 10^{-7}$

μ_r : Perméabilité relative du matériau $\mu_r = \mu / \mu_0$, avec μ sa perméabilité magnétique vraie.

La valeur de μ_r varie fortement d'un matériau à un autre. Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs indicatives.

Matériau	Composition	Perméabilité relative μ_r	Utilisation
Fer Armco	Fer pur	10000	relais, électroaimant
Acier Hypersyl	Si à 3 %	40000 à 50'000	Inductances transformateurs
Mumétal Permalloy C	Ni à 80 %	70000 à 130'000	Blindages magnétiques relais rapides
Acier au cobalt Permendur V	Co à 35 - 50 %	3500	tôles pour petites machines tournantes

On peut définir un circuit magnétique par l'ensemble d'éléments ferromagnétiques (matériaux) enroulé par une bobine, dont l'objectif est de canaliser le flux magnétique produit. On considère un circuit magnétique de forme carrée représenté ci-dessous. Ce circuit magnétique est considéré parfait, il renferme toutes les lignes de champ, il n'y a pas de flux de fuite.

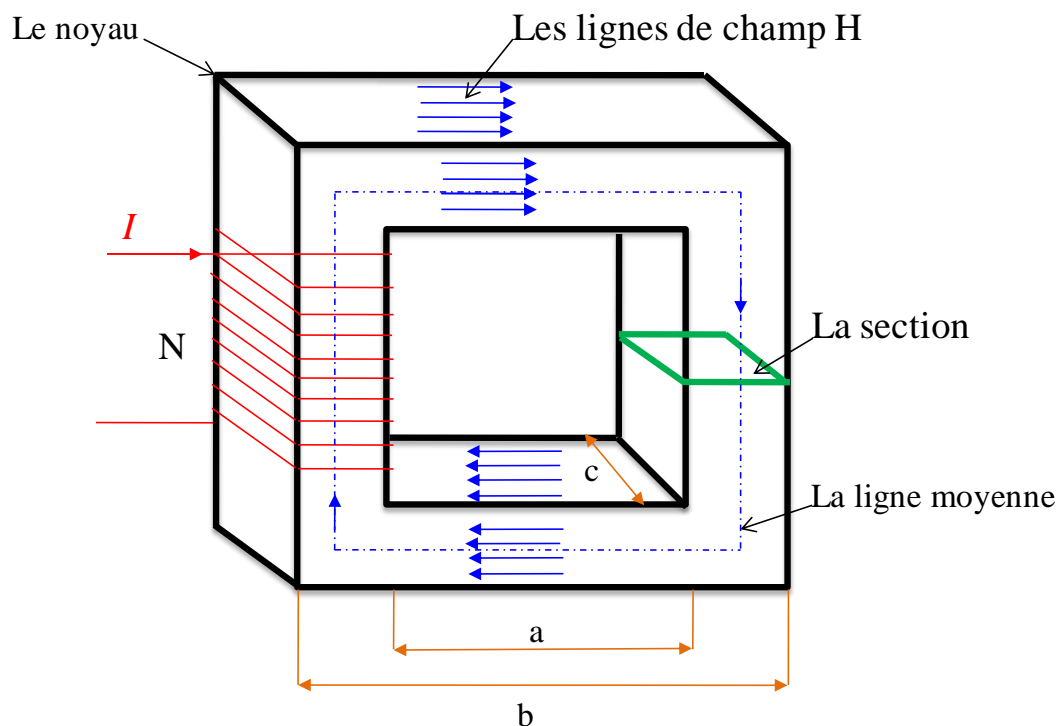


Figure 4.3 Noyau magnétique.

Pour analyser ces circuits, nous devons nous appuyer sur quelques hypothèses, à savoir :

- Il est linéaire (pas de saturation) et de section constante S.
- Pas d'hystérésis.

Une force magnétomotrice $F = NI$ force un flux à circuler dans le circuit magnétique. L'intensité du champ magnétique dans le noyau est donnée par la loi d'Ampère :

$$NI = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (4.2)$$

$$NI = Hl \quad (4.3)$$

Nous appellerons excitation magnétique, l'expression $H = \frac{NI}{l}$.

H : Excitation magnétique est exprimée en Ampère par mètre [A/m] ;

I : Courant est exprimé en Ampère [A] ;

l : Longueur moyenne est exprimée en mètre [m].

N : Nombre de spires en tours [tr]

4.3 Théorème d'Ampère généralisé

L'excitation magnétique H le long d'un circuit fermé est égale à la somme algébrique des intensités des courants enlacés.

On dispose d'un tore magnétique composé d'un matériau homogène, d'une perméabilité relative μ_r comportant trois bobines de différents nombres de spires, notés respectivement N_1 , N_2 et N_3 .

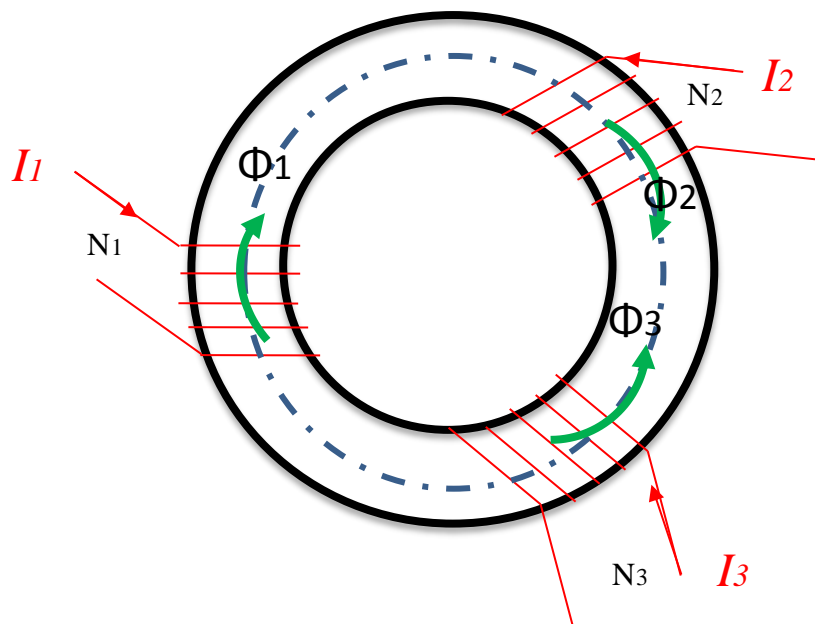


Figure 4.4 Tore magnétique.

Le théorème d'Ampère :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum NI \quad (4.4)$$

La force magnétomotrice est de la forme:

$$\mathcal{F} = N_1 I_1 + N_2 I_2 + N_3 I_3 + \dots + N_N I_N \quad (4.5)$$

Le flux magnétique en [Weber], circulant dans une surface S est défini comme :

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{ds} \quad (4.6)$$

$$\Phi = B * S \quad (4.7)$$

On a $B = \mu_0 \frac{NI}{l}$, alors :

$$\Phi = \mu_0 \frac{NI}{l} * S \quad (4.8)$$

$$\Phi \frac{l}{\mu_0 S} = NI \quad (4.9)$$

Le flux est proportionnel à l'intensité du courant. Le flux est constant dans un circuit magnétique ($B_1 S_1 = B_2 S_2$).

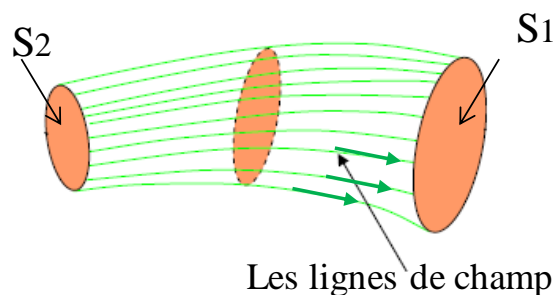


Figure 4.5 Le flux magnétique.

Nous appellerons R la réluctance du circuit magnétique, où l'expression est donnée par :

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu_0 S} \quad (4.10)$$

$$\Phi \mathfrak{R} = NI \quad (4.11)$$

La réluctance est une quantité qui caractérise la "résistance" du circuit magnétique au passage du flux. C'est un peu comme la loi d'Ohm pour des circuits électriques.

La réluctance est égale à $R = \frac{NI}{\Phi}$ exprimée en [At/Wb].

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l}{S} \quad (4.12)$$

μ_r : La perméabilité relative du noyau.

4.4 Circuit magnétique à entrefer

Un entrefer est une mince couche d'air. Pour des applications particulières, on introduit parfois un entrefer dans le circuit magnétique.

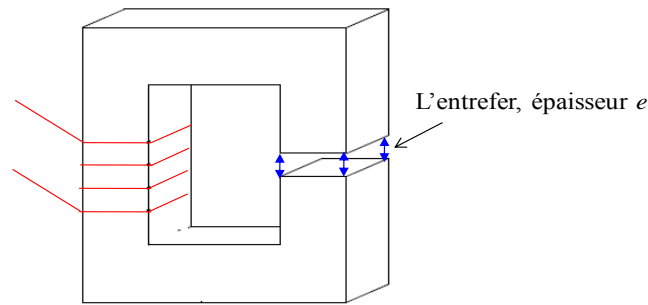


Figure 4.6 Circuit à entrefer.

Dans un entrefer, la reluctance R_e se calcule avec la relation suivante :

$$\mathfrak{R}_e = \frac{1}{\mu_0} \frac{e}{S} \quad (4.13)$$

La reluctance totale ou équivalente du circuit composé de noyau (R_N) et entrefer (R_e) est comme suite:

$$\mathfrak{R}_{eq} = \mathfrak{R}_N + \mathfrak{R}_e \quad (4.14)$$

Remarque importante

- La longueur de l'entrefer est habituellement plus petite de 5% de la longueur du circuit magnétique. La longueur totale est la longueur du noyau.
- La section de l'entrefer $S_e = S_N$
- En réalité le flux déborde au niveau de l'entrefer et $S_e = S_N + \text{section de débordement}$.

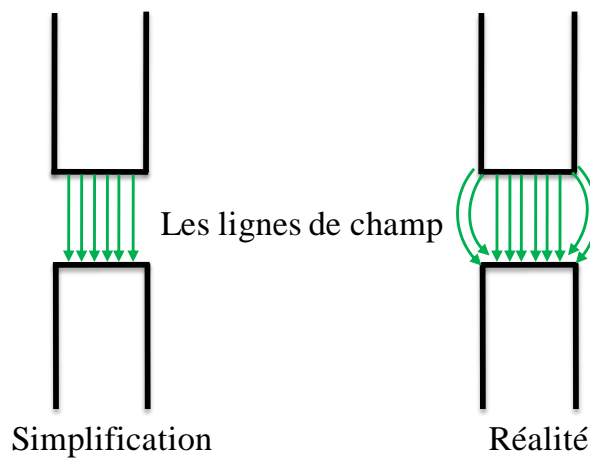


Figure 4.7 Circulation des lignes de champ.

4.5 Matériaux hétérogènes

Un circuit est dit hétérogène dès lors qu'il est constitué de matériaux de perméabilités relatives totalement différentes. Ci-dessous un exemple de deux matériaux de perméabilité μ_1, μ_2 .

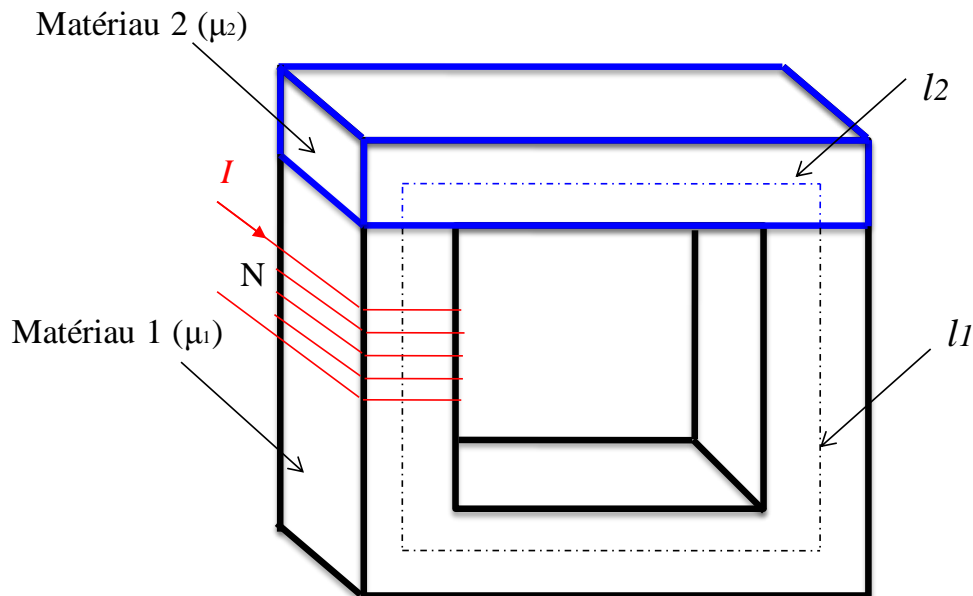


Figure 4.8 Circuit magnétique hétérogène.

Le flux magnétique est uniforme $NI = \Phi \mathfrak{R}_{eq}$.

$$\Phi = \frac{NI}{\mathfrak{R}_{eq}} \quad (4.15)$$

$$\mathfrak{R}_{eq} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2,$$

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{1}{\mu_0 \mu_{r1}} \frac{l_1}{S}, \quad \mathfrak{R}_2 = \frac{1}{\mu_0 \mu_{r2}} \frac{l_2}{S} \quad (4.16)$$

Remarques importantes

- La réluctance équivalente est la somme des différentes réluctances ($\mathfrak{R}_{eq} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$).
- L'excitation magnétique est uniforme $H_2 = H_1$.
- Les inductions magnétiques sont différentes $B_1 \neq B_2$.

Réluctance en série

La réluctance en série se comporte de la même façon que des résistances en série.

$$\mathfrak{R}_{eq} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 + \dots + \mathfrak{R}_N \quad (4.17)$$

Réluctance en parallèle

La réluctance en parallèle se comporte de la même façon que des résistances en parallèle.

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_{eq}} = \left(\frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_2} + \frac{1}{\mathfrak{R}_3} + \dots + \frac{1}{\mathfrak{R}_N} \right) \quad (4.18)$$

4.6 Quelle analogie peut-on faire entre les circuits magnétiques et électriques ?

Nous pouvons effectuer des analogies entre les circuits électriques et les circuits magnétiques.

L'objectif est de faciliter l'analyse des circuits magnétiques complexes et hétérogènes.

L'analogie nous permet de calculer les différents paramètres magnétiques comme pour un circuit électrique. Le tableau ci-dessus résume les principaux paramètres de cette analogie :

Circuit magnétique	Circuit électrique
Flux de l'induction (Φ)	Courant (I)
Réductance (\mathfrak{R})	Résistance (R)
Champ magnétique (H)	Champ électrique (E)
Loi d'ampère $NI = \Phi \mathfrak{R}$	Loi d'Ohm $V = RI$
Force magnétomotrice \mathfrak{F} : fmm (At)	Force électromotrice : fem (V)

Tableau 4.1 : Analogies circuits magnétiques / circuits électriques.

Application

Soit le circuit magnétique donné sur figure 4.9. On distingue 03 longueurs, donc trois réductances.

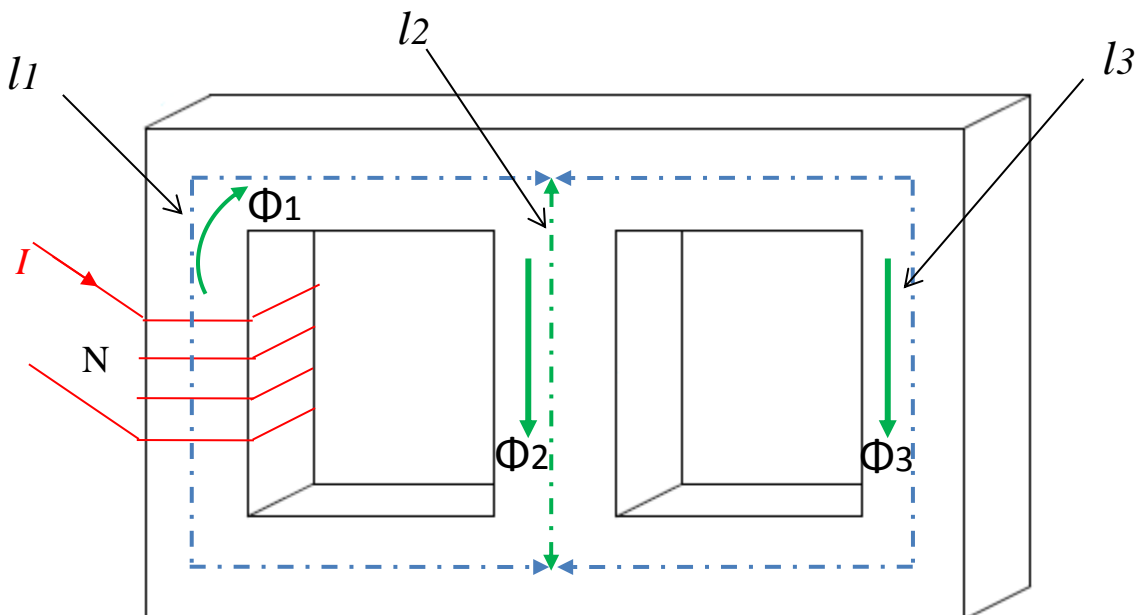


Figure 4.9 Circuit magnétique (rectangulaire).

Le circuit électrique équivalent, par analogie est :

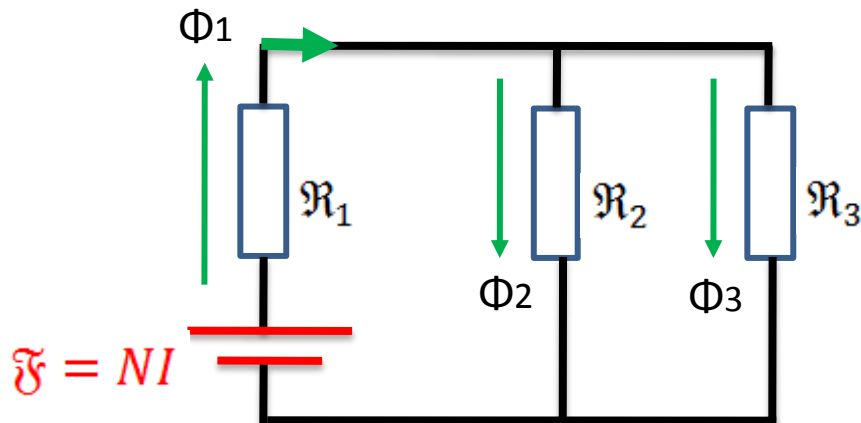


Figure 4.10 Circuit électrique équivalent.

4.7 Pertes magnétiques

Dans le contexte de la conception des dispositifs électromagnétiques, il est devenu nécessaire et important de dimensionner les pertes magnétiques pour espérer une bonne évaluation des performances (notamment le rendement et les échauffements) [9].

Il existe deux grandes sources de pertes dans les matériaux magnétiques traversés par un courant, à savoir:

- 1- Pertes par courants de Foucault.
- 2- Pertes par hystérésis.

4.7.1 Pertes par courants de Foucault

La variation du champ magnétique induit dans le noyau crée une densité de courant induit dans le matériau. Ceux-ci sont appelés courants de Foucault. Ces courants induits créent des pertes par effet de Joule RI^2 . Ces pertes sont dissipées sous forme de chaleur.

Les pertes par courant de Foucault en $[\text{W}/\text{m}^3]$ dans un matériau peuvent être exprimées (formule approchée) par :

$$P = \frac{\pi^2}{6\rho} \cdot e^2 \cdot B_{max}^2 \cdot f^2 \quad (4.19)$$

ρ : Résistivité du matériau

e : Epaisseur de la tôle

f : Fréquence de variation du champ

Afin de réduire l'échauffement du matériau et de diminuer ces pertes d'énergie, on utilise des tôles minces isolées entre elles de façon à minimiser les boucles de courant dans le matériau.

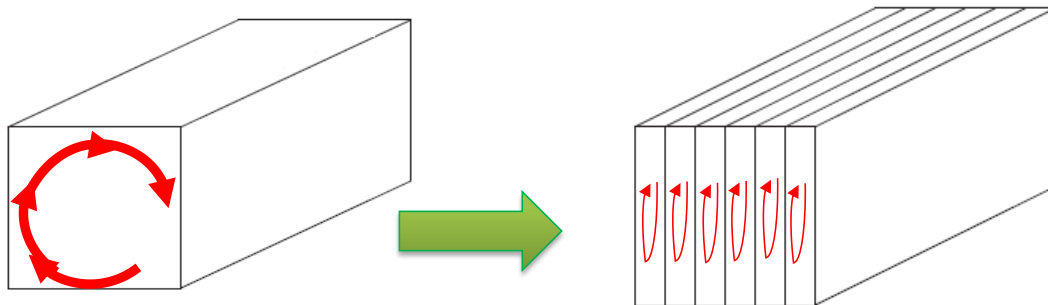


Figure 4.11 Courants de Foucault dans un bloc de matériau massif (gauche), et dans un matériau laminé (droite).

4.7.2 Pertes par hystérésis

L'hystérésis est particulièrement évidente lorsqu'une substance ferromagnétique est soumise à un champ magnétique périodique (sinusoïdal). De chaque période, la caractéristique $B(H)$ forme un cycle fermé appelé cycle d'hystérésis qui représente les différents chemins pendant l'aimantation et la désaimantation. La figure 4.12 représente un cycle typique.

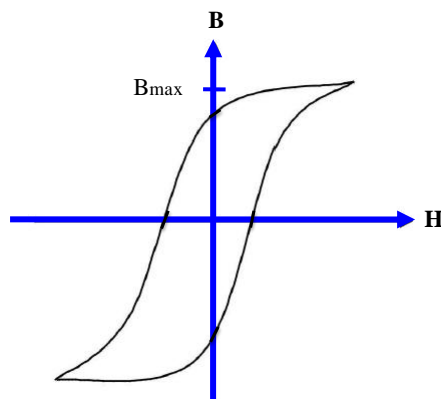


Figure 4.12 Courbe hystérésis typique.

L'énergie dissipée pendant une période T est :

$$W = \int_0^T H dB \quad (4.20)$$

Le résultat de cette intégrale représente une surface du cycle d'hystérésis.

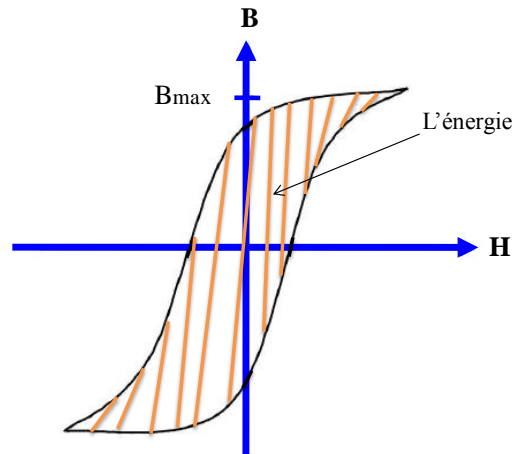


Figure 4.13 La surface d'un cycle d'hystérésis.

Alors l'énergie dissipée dans le noyau de volume V durant une période s'exprime par :

$$W = V \int_0^T H dB \quad (4.21)$$

Enfin les pertes par hystérésis dans le noyau sont :

$$P_H = \frac{dW}{dt} = \frac{W}{T} = W \cdot f \quad (4.22)$$

Les pertes par hystérésis sont directement proportionnelles à la surface du cycle d'hystérésis et à la fréquence d'alimentation.

4.8 Inductance propre et flux propre

On considère un circuit fermé parcouru par un courant d'intensité i .

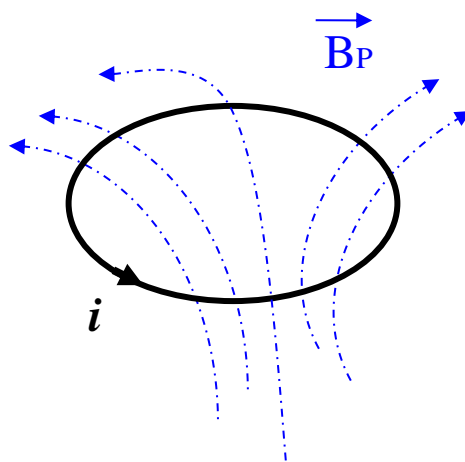


Figure 4.14 Flux propre.

Le champ magnétique \vec{B}_p créé, est proportionnel à l'intensité, et génère un flux propre :

$$\Phi_p = \iint \vec{B}_p \cdot d\vec{S} \quad (4.23)$$

Le flux propre peut donc s'écrire

$$\Phi_p = L \cdot i \quad (4.24)$$

L : L'inductance propre de la spire, qui s'exprime en Henry (H).

4.8.1 Inductance propre d'un solénoïde (bobine)

Un champ magnétique uniforme est produit au sein du solénoïde de N spires lorsque celle-ci est traversée par un courant i .

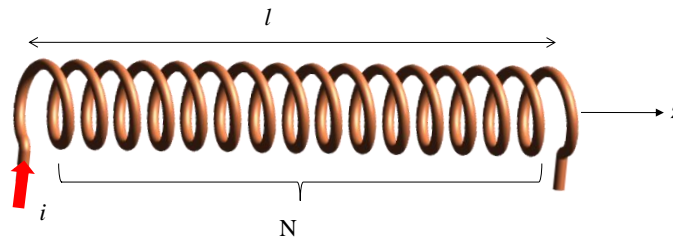


Figure 4.15 Inductance propre.

Le champ produit est donné par : $\vec{B}_p = \mu_0 \frac{N}{l} i \cdot \vec{u}_z$ qui engendre un flux propre Φ_p .

$$\Phi_p = \mu_0 \frac{N}{l} i \cdot NS = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} \cdot i \quad (4.25)$$

$$\frac{\mu_0 N^2 S}{l} \cdot i = L \cdot i \quad (4.26)$$

Alors :

$$L = \frac{\mu_0 S}{l} N^2 \quad (4.27)$$

$$L = \frac{N^2}{R} \quad (4.28)$$

En réalité, toutes les lignes de champ créées par l'enroulement n'apparaissent pas dans le circuit magnétique. Pour des raisons essentiellement de fabrication, certaines d'entre-elles se rebouclent dans l'air proche des spires.

On distingue le flux dans le matériau et le flux de fuite correspond aux inductances de magnétisation et inductance de fuite.

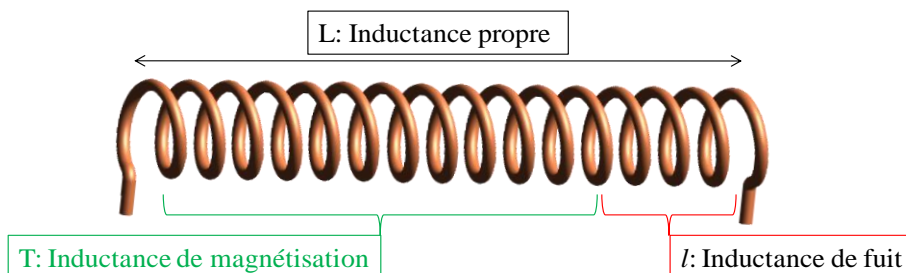


Figure 4.16 Inductance en réalité.

4.8.2 Inductance mutuelle et coefficient de couplage

On considère deux circuits fermés et filiformes, en couplage mutuel, parcourus respectivement par des courants d'intensité i_1 et i_2 .

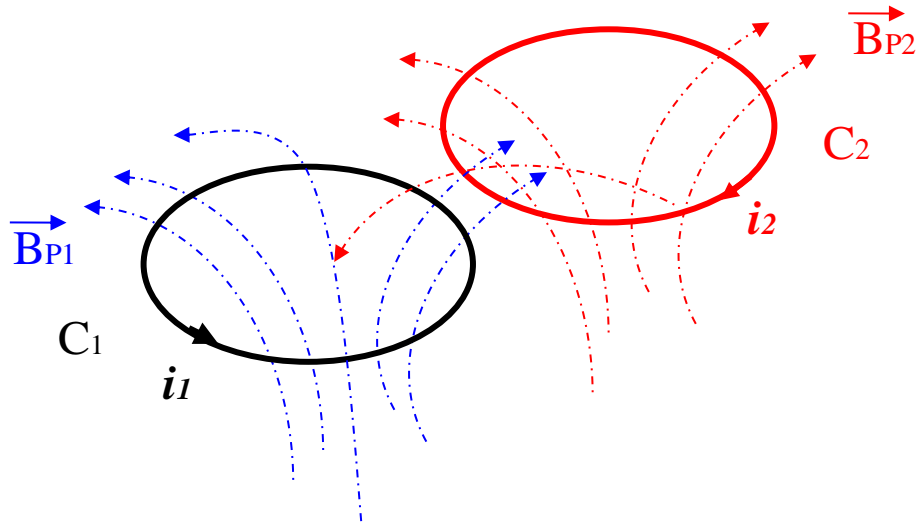


Figure 4.17 Flux mutuel.

On a :

$$\vec{B}_{P.total} = \vec{B}_{p1} + \vec{B}_{p2} \quad (4.29)$$

On appelle inductance mutuelle le coefficient de proportionnalité entre le courant dans C_2 et le flux du champ magnétique envoyé par C_2 dans C_1 . Elle ne dépend que des caractéristiques géométriques des deux circuits et de leur position relative. Alors :

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{21} \\ \Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{12} \end{cases} \quad (4.30)$$

$$\begin{cases} \Phi_1 = L_1 I_1 + M_{1,2} I_2 \\ \Phi_2 = L_2 I_2 + M_{2,1} I_1 \end{cases} \quad (4.31)$$

Avec L_1 est l'inductance propre de C_1 et $M_{1,2}$ l'inductance mutuelle entre C_1 et C_2

4.9 Formule de Neumann

Nous pouvons également calculer l'inductance mutuelle de deux circuits de longueur l_1 et l_2 espacés d'une distance d_{12} à l'aide de la formule de Neumann (sur C_1 et C_2 respectivement) :

$$M_{1,2} = M_{2,1} = M = \frac{\mu}{4\pi} \oint \oint \frac{dl_1 dl_2}{d_{12}} \quad (4.32)$$

Ainsi deux spires de rayons respectifs $r_1 \gg r_2$, espacées d'une distance d et contenues dans des plans parallèles ont pour coefficient d'inductance mutuelle [10] :

$$M(d) = \left(\frac{r_1 r_2}{d^2 + r_1^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{L_1 L_2}$$

$$= k(d) \cdot \sqrt{L_1 L_2} \quad (4.33)$$

Le facteur k est appelé coefficient de couplage et correspond à la quantité de flux commun aux deux spires. Si $k = 1$ l'intégralité du flux de C_1 traverse C_2 , et si $k = 0$ aucune ligne de champ traversant C_1 ne traverse C_2 .

Application N°1

Soit le circuit magnétique suivant, la perméabilité relative du matériau est $\mu_r = 3000$, le nombre de spires est $N=300$ spires. Ce circuit magnétique est parcouru par un courant d'intensité de 1,2 A.

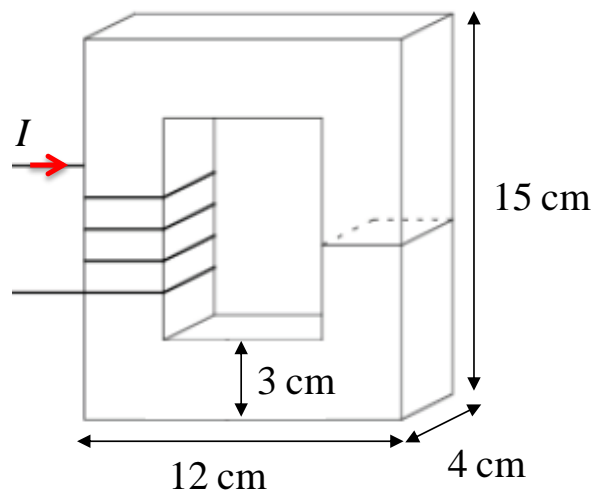


Figure 4.18 Circuit magnétique.

1. Calculez les paramètres géométriques du circuit (longueur moyenne et section).
2. Calculez la réluctance de ce circuit ?
3. Calculez le flux magnétique, déduire alors l'induction magnétique ?

Solution

1. Calcul des paramètres géométriques

Dans la figure suivante, on illustre d'une manière détaillée comment on calcule la longueur moyenne (parcours moyen).

$$l = 2 \cdot [(6 + 1.5 + 1.5) + (9 + 1.5 + 1.5)]$$

$$l = 2 \cdot (9 + 12) = 42 \text{ cm}$$

$$l = 0.42 \text{ m}$$

La section S est égale à : $S = 4.3 = 12 \text{ cm}^2$

$$S = 0.0012 \text{ m}^2$$

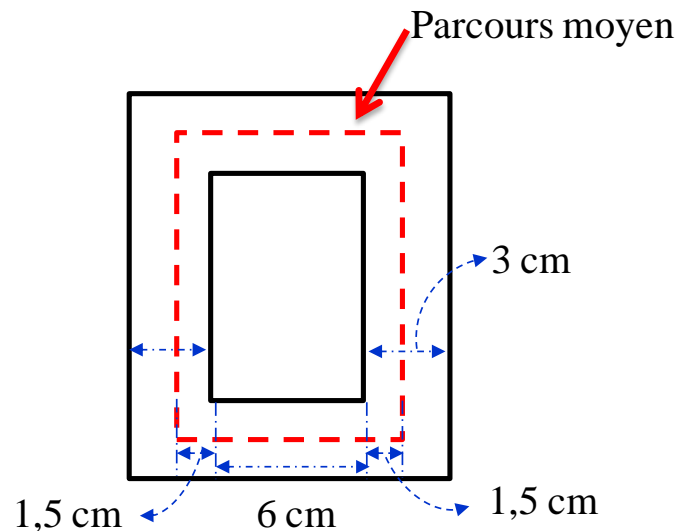


Figure 4.19 Longueur moyenne.

2. Calcul de la réluctance

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \cdot \frac{l}{S}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{(3000)(4\pi 10^{-7})} \frac{0.42}{0.0012}$$

$$\mathfrak{R} = 92840 \text{ At/Wb}$$

3. Calcul de flux et l'induction magnétique

$$\Phi \mathfrak{R} = NI$$

$$\Phi = \frac{NI}{\mathfrak{R}} = \frac{100 \cdot 1,2}{92840} = 1,29 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

$$\Phi = B \cdot S \rightarrow B = \frac{\Phi}{S}$$

$$B = \frac{1,29 \cdot 10^{-3}}{0.0012}$$

$$B = 1,075 \text{ T}$$

Application N°2

Soit le circuit suivant, l'intensité de courant est 2 A, la perméabilité relative du matériau est $\mu_r = 2500$ avec un entrefer d'épaisseur de 0,5 cm, le nombre de tours est 250.

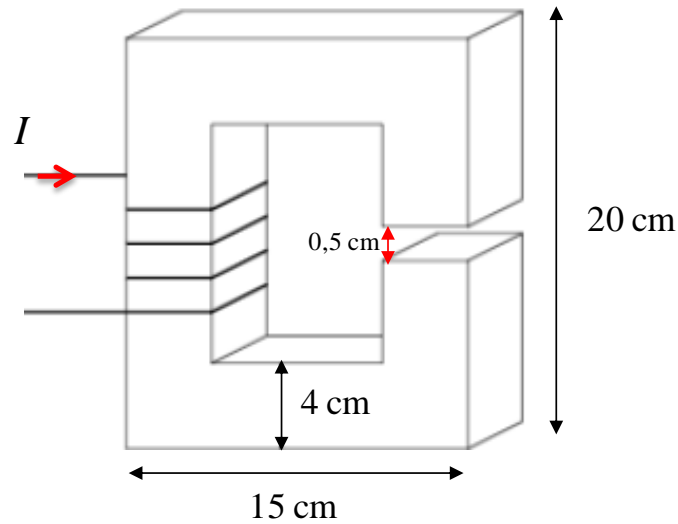


Figure 4.20 Circuit magnétique avec entrefer.

Sachant que la profondeur est de 4 cm, calculez :

1. Calculez les paramètres géométriques du circuit (longueur moyenne et section).
2. Donnez le schéma électrique équivalent ?
3. Calculez la réluctance du ce circuit (matériau et entrefer)?
4. Calculez le flux magnétique, déduire alors l'induction magnétique ?

Solution

1. Calcul des paramètres géométriques

La longueur moyenne (parcours moyen) est égale à :

$$l = 2 \cdot (11 + 16) = 54 \text{ cm}$$

$$l = 0.54 \text{ m}$$

La section S est égale à : $S = 4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}^2$

$$S = 0.0016 \text{ m}^2$$

2. schéma électrique équivalent

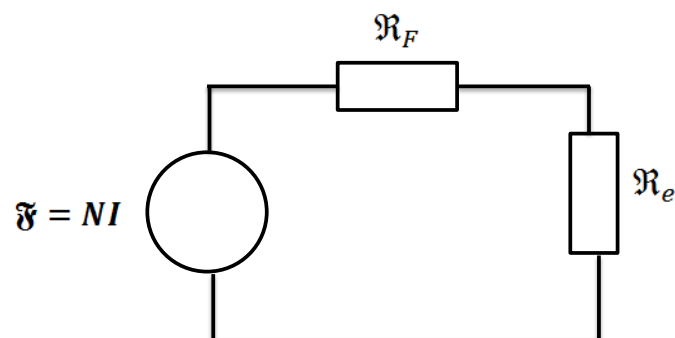


Figure 4.21 Circuit électrique équivalent.

3. Calcul de la réductance équivalente

$$\mathfrak{R}_F = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \cdot \frac{l}{S}$$

$$\mathfrak{R}_F = \frac{1}{(2500)(4\pi 10^{-7})} \cdot \frac{0,54}{0,0016}$$

$$\mathfrak{R}_F = 107430 \text{ At/Wb}$$

Pour l'entrefer :

$$\mathfrak{R}_e = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{l_e}{S_e}$$

$$S_e = 0,0016 \text{ m}^2$$

$$l_e = 0,005 \text{ m}$$

$$\mathfrak{R}_e = \frac{1}{(4\pi 10^{-7})} \cdot \frac{0,005}{0,0016}$$

$$\mathfrak{R}_e = 2486796 \text{ At/Wb}$$

$$\mathfrak{R}_{eq} = \mathfrak{R}_F + \mathfrak{R}_e$$

$$\mathfrak{R}_{eq} = 107430 + 2486796$$

$$\mathfrak{R}_{eq} = 2594226 \text{ At/Wb}$$

4. Calcul du flux et de l'induction magnétique

$$\Phi \mathfrak{R}_{eq} = NI \rightarrow \Phi = \frac{NI}{\mathfrak{R}_{eq}}$$

$$\Phi = \frac{250,2}{107430 + 2486796}$$

$$\Phi = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

$$\Phi = B \cdot S \rightarrow B = \frac{\Phi}{S}$$

$$B = \frac{0,2 \cdot 10^{-3}}{0,0016}$$

$$B = 0,125 \text{ T}$$

En réalité, le flux dans l'entrefer déborde au-delà de la section du fer. Si on estime que ce débordement augmente la section moyenne de l'entrefer de 20%, que devient l'induction dans cette condition ?

$$S'_e = S_e + 20\%(S_e) \text{ alors } S'_e > S_e$$

$$S_e = 0.0016 \text{ m}^2$$

$$20\%(S_e) = \frac{0.0016 \cdot 20\%}{100\%} = 0.00032 \text{ m}^2$$

$$S'_e = 0.0016 + 0.00032 = 0.00192 \text{ m}^2$$

$$S'_e = 0.00192 \text{ m}^2$$

$$\mathfrak{R}'_e = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{l_e}{S'_e}$$

$$\mathfrak{R}'_e = \frac{1}{(4\pi 10^{-7})} \cdot \frac{0,005}{0.00192}$$

$$\mathfrak{R}'_e = 2072330 \text{ At/Wb}$$

$$\mathfrak{R}'_{eq} = \mathfrak{R}_F + \mathfrak{R}'_e$$

$$\mathfrak{R}'_{eq} = 107430 + 2072330$$

$$\mathfrak{R}'_{eq} = 2179760 \text{ At/Wb}$$

$$\Phi \mathfrak{R}'_{eq} = NI \rightarrow \Phi = \frac{NI}{\mathfrak{R}'_{eq}}$$

$$\Phi = \frac{250.2}{2179760}$$

$$\Phi = 0.23 \text{ Wb}$$

Chapitre 5 : Transformateurs

5.1 Transformateurs

Un transformateur est un dispositif de l'électrotechnique qui permet de faire passer de l'énergie électrique d'un bobinage à un autre par couplage magnétique. C'est une machine électrique entièrement statique permettant, en alternatif, la modification de certaines grandeurs (tension, courant), sans changer leur fréquence.

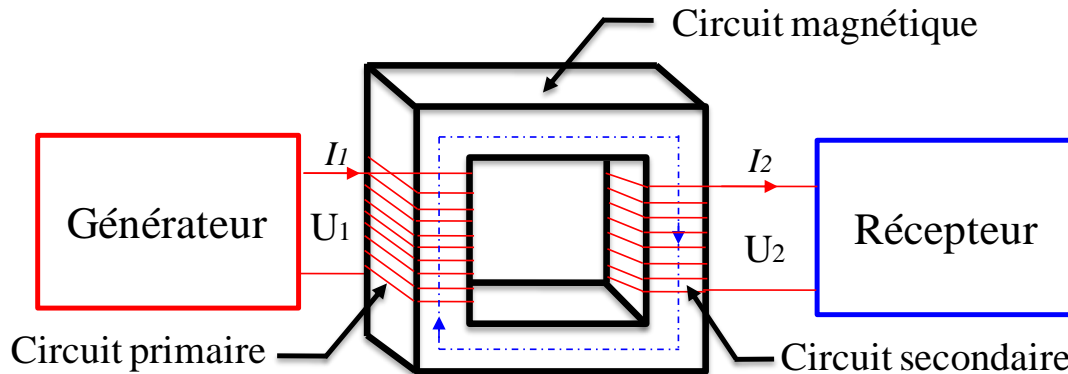


Figure 5.1 Transformateur.

Parmi les applications des transformateurs, on note :

Electronique

- Alimentation à basse tension.
- Adaptation d'impédance.

Electrotechnique

- Transformation de la tension pour le transport et la distribution d'électricité.
- Alimentation à basse tension (par exemple, lampes halogènes).

Mesure

- Transformateurs d'intensité de courant.
- Transformateurs de potentiel.

D'un point de vue électrique, c'est un quadripôle (4 pôles ou bornes) avec :

- Une première paire (A_1, B_1), constituant **l'entrée**. Un générateur applique entre ces bornes une tension sinusoïdale de valeur efficace U_1 (par exemple 220 V).
- Une seconde paire de bornes (A_2, B_2), constituant **la sortie**. Un récepteur, branché entre ces bornes, est soumis à une tension sinusoïdale de valeur efficace U_2 .

La figure 5.2 illustre le montage typique transformateur.

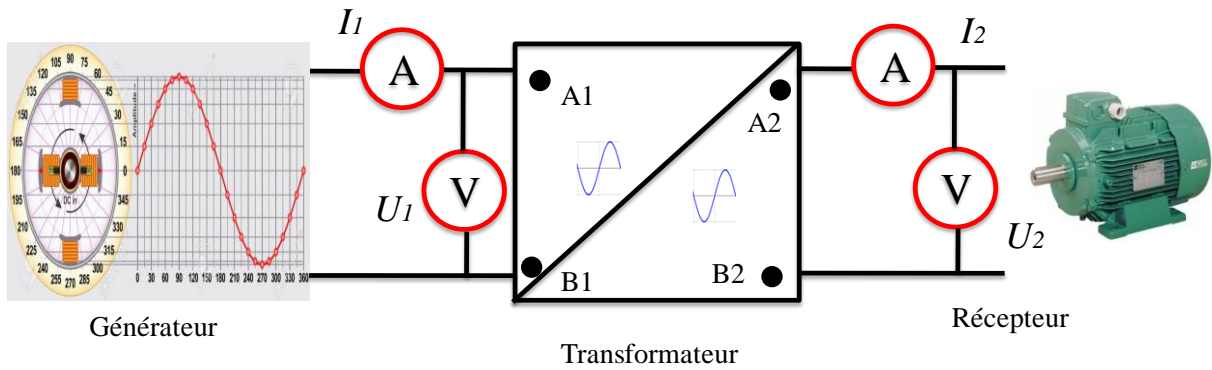


Figure 5.2 Montage des transformateurs.

5.2 Représentation symbolique

Les trois barres verticales sur la figure 5.3, symbolisent le noyau magnétique qui permet à l'énergie magnétique de passer du bobinage primaire, au bobinage secondaire.

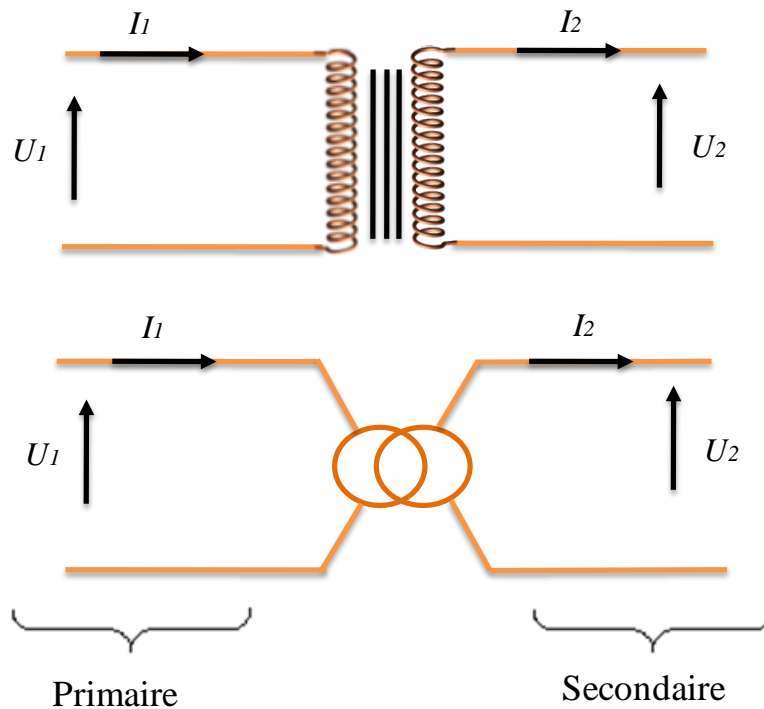


Figure 5.3 Représentation symbolique.

L'intérêt du transformateur est de fournir **la tension désirée** U_2 (par exemple 24 V), à partir de la tension U_1 , dont on dispose, par exemple, celle délivrée par le réseau de distribution.

Le transformateur reçoit de la puissance entre ses bornes d'entrées. Il restitue *presque intégralement* cette puissance au récepteur, dite charge du transformateur branché entre ses bornes de sortie : autrement dit, son **rendement est excellent**.

Si I_1 et I_2 , sont les valeurs efficaces des courants sinusoïdaux circulants respectivement.

- D'une part entre A_1 et B_1
- D'une part entre A_2 et B_2

On a

$$U_1 I_1 = U_2 I_2 \quad (5.1)$$

1° Si $U_2 > U_1 \rightarrow I_2 < I_1$, le transformateur est dit alors :

- *Élévateur de tension*
- *Abaisseur de courant*

U_2 : Haute Tension (HT), U_1 : Base Tension (BT)

2° Si $U_2 < U_1 \rightarrow I_2 > I_1$, le transformateur est alors :

- *Abaisseur de tension*
- *Élévateur de courant*

U_1 : Haute Tension (HT), U_2 : Base Tension (BT)

C'est le cas des transformateurs de **soudure** qui débitent, au secondaire, un courant intense (1500 A par exemple), alors que le secteur alimentant le primaire ne peut fournir que quelques dizaines d'ampères (15 A par exemple).

5.3 Constitution

Un transformateur monophasé se compose de *deux (2) enroulements*

- Non reliés électriquement
- Mais enlaçant un même circuit magnétique

C'est-à-dire couplés magnétiquement entre eux.

Un circuit magnétique, traversé par un champ magnétique variable est le siège de pertes magnétiques (pertes par courants de Foucault et par hystérésis). On limite ces pertes, pour les premières en utilisant un circuit feuilleté et pour les secondes en utilisant un acier au silicium [11].

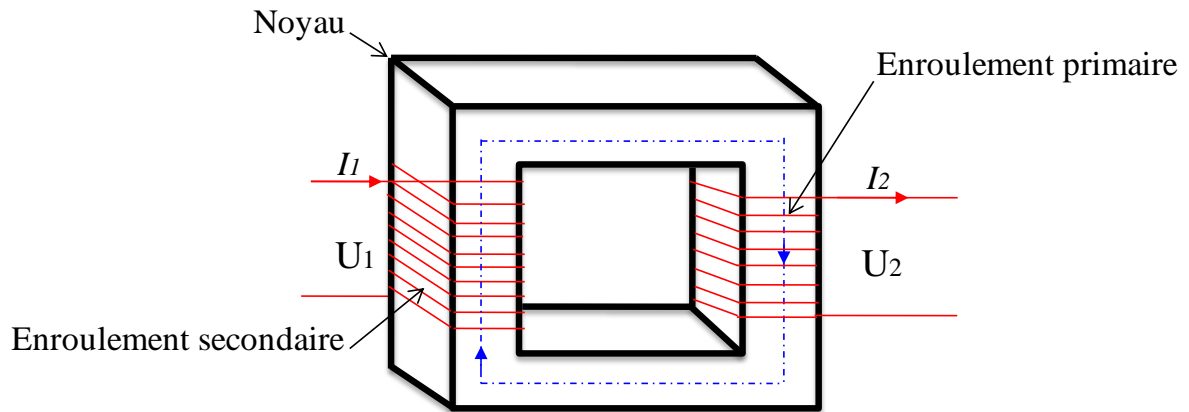


Figure 5.4 Eléments d'un transformateur.

Une photo réelle d'un transformateur est donnée par la figure 5.5

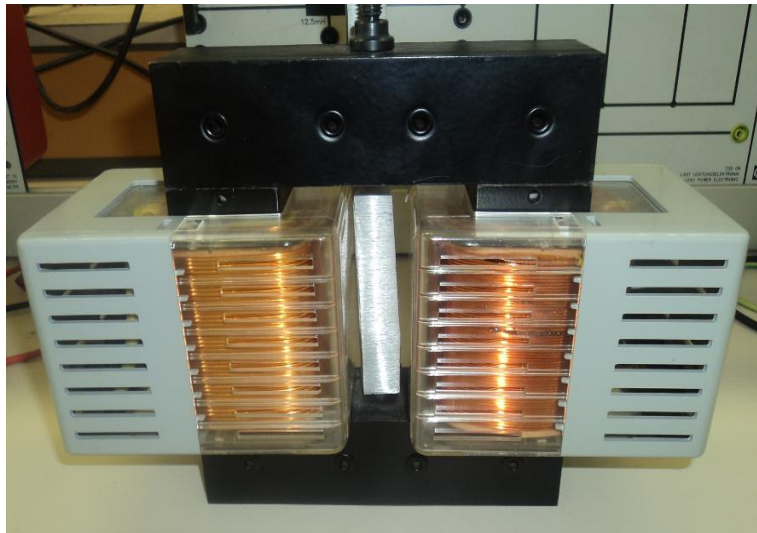


Figure 5.5 Noyau et enroulements.

La figure 5.6 illustre les paramètres de l'enroulement.



Figure 5.6 Enroulement d'un transformateur.

5.4 Principe de fonctionnement

Rappel : LOI DE FARADAY

Une variation de flux magnétique à travers une spire crée une F.E.M. Inversement une F.E.M. dans une spire crée une variation de flux à travers celle-ci [12].

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (5.2)$$

- 1- Le bobinage du primaire est alimenté par une tension alternative sinusoïdale U_1 . Il est alors parcouru par un courant I_1 , également alternatif sinusoïdal, de valeur efficace I_1 .
- 2- La circulation d'un courant dans le circuit primaire génère un champ magnétique \vec{B} , évoluant au cours du temps, proportionnel à la valeur efficace I_1 du courant primaire et également au nombre de spires N_1 du bobinage
- 3- Ce champ magnétique \vec{B} génère alors un flux Φ évoluant au cours du temps, et circulant préférentiellement à travers les parties métalliques, c'est à dire à travers le circuit magnétique du transformateur (Noyau).

S'il n'y a aucune fuite de flux, l'intégralité du flux généré par le bobinage primaire se retrouvera au niveau du bobinage secondaire.

Dans le cas contraire, quelques lignes de flux ne circulent pas dans le circuit magnétique. Ces lignes de flux sont alors perdues et on retrouve au niveau du secondaire une grande partie du flux généré par le bobinage secondaire.

Le flux que l'on retrouve au secondaire est un flux qui évolue également de la même façon que le flux au primaire. Il engendre alors une tension aux bornes du bobinage secondaire : tension alternative sinusoïdale, de valeur efficace U_2 .

5.5 Plaque signalétique

Comme tout appareil électrique, chaque transformateur est *spatialement calculé* pour fonctionner :

- Sous tension primaire U_{1n}
- Absorbant un courant voisin d'une valeur I_{1n}

U_{1n} et I_{1n} sont appelées **valeurs nominales**, leur produit $S = U_{1n} * I_{1n}$ est la puissance apparente nominale de l'appareil.



Figure 5.7 Plaque signalétique.

5.6 Transformateur monophasé

5.6.1 Equations générales de fonctionnement

La tension d'entrée U_1 est dite tension au primaire. La tension de sortie U_2 est dite tension au secondaire, en désignant par r_1, r_2, l_1, l_2 les résistances et inductances des fuites des bobines primaires et secondaire. N_1, N_2 représentent le nombre des spires, Φ_c le flux commun à toutes les spires, et \mathfrak{R} est la réluctance du circuit magnétique.

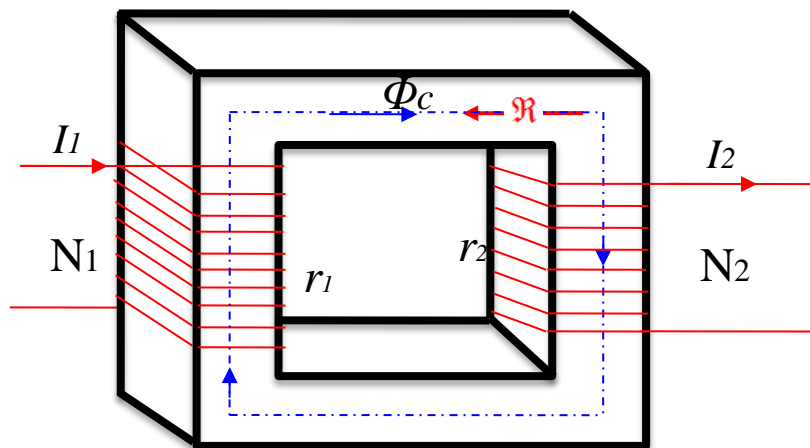


Figure 5.8 Transformateur monophasé.

En utilisant la loi d'Ohm et la loi des mailles, les équations de fonctionnement du transformateur s'écrivent :

$$U_1 = r_1 I_1 + l_1 \frac{dI_1}{dt} + N_1 \frac{d\Phi_c}{dt} \quad (5.3)$$

$$U_2 = -r_2 I_2 - l_2 \frac{dI_2}{dt} - N_2 \frac{d\Phi_c}{dt} \quad (5.4)$$

Le circuit électrique équivalent

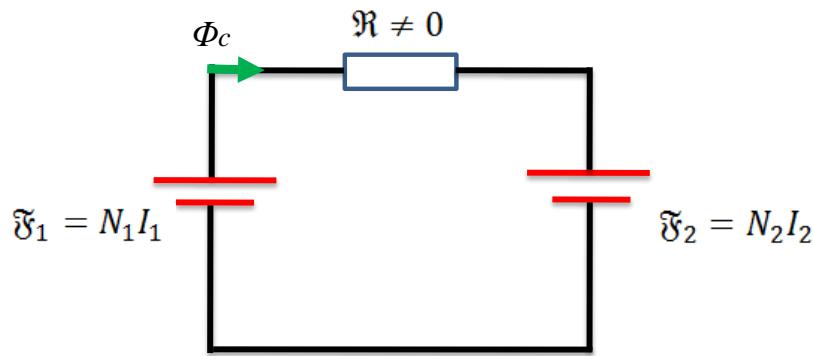


Figure 5.9 Circuit équivalent.

Selon le schéma équivalent :

$$\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2 = \Phi_c \mathfrak{R} \leftrightarrow N_1 I_1 - N_2 I_2 = \Phi_c \mathfrak{R} \quad (5.5)$$

5.6.2 Transformateur monophasé parfait

Nous définissons le transformateur parfait comme un transformateur ayant les caractéristiques suivantes :

- La résistance dans les fils (au primaire et secondaire) est nulle ($r_1 = r_2 = 0$). Pas de pertes par effet Joule.
- Le noyau magnétique est parfait ($\mu_r = \infty, \mathfrak{R} = 0$). Pas de fuites magnétiques $l_1 = l_2 = 0$

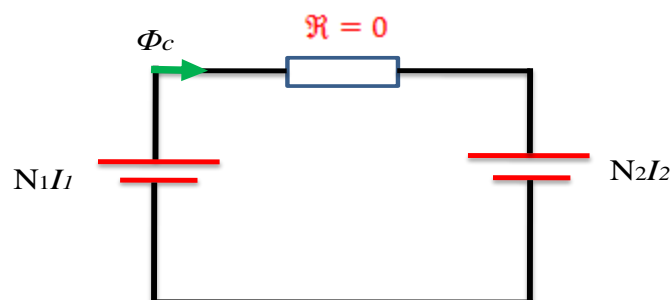


Figure 5.10 Circuit équivalent (transformateur parfait).

Dans ce cas, le circuit magnétique canalisant alors parfaitement les lignes de champ, les équations de fonctionnement deviennent alors :

$$\begin{cases} U_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt} \\ U_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt} \\ N_1 I_1 - N_2 I_2 = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

On définit le rapport de transformation a comme étant le rapport du nombre de tours du transformateur. Donc :

$$a = \frac{N_2}{N_1} \quad (5.7)$$

La figure 5.11 représente le symbole du transformateur parfait. Dans ce modèle, les bobinages primaire et secondaire n'apparaissent plus.

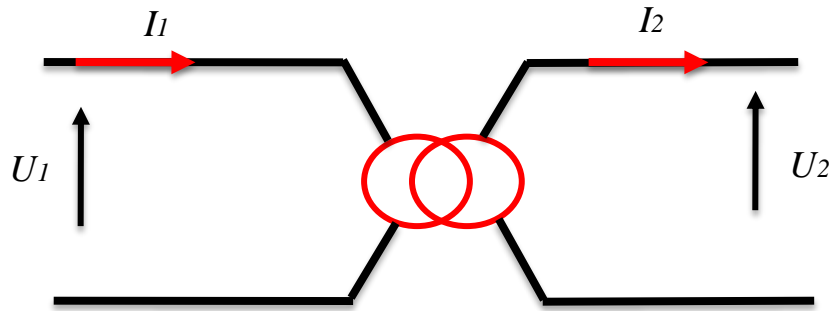


Figure 5.11 Symbole du transformateur parfait.

Remarque

Ce modèle est utilisé comme adaptateur d'impédance.

Formule de Boucherot

Utilisant les équations du transformateur parfait :

$$\begin{cases} U_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} \\ U_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt} \\ N_1 I_1 - N_2 I_2 = 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

Le flux s'écrit comme :

$$\Phi = \hat{\Phi} \sin(\omega t) \quad (5.9)$$

Utilisant les équations précédentes, on trouve :

$$U_1 = N_1 \frac{d(\hat{\Phi} \sin(\omega t))}{dt} \quad (5.10)$$

$$U_1 = N_1 \hat{\Phi} \omega \cos(\omega t) \quad (5.11)$$

On peut écrire sous la forme générale :

$$U_1 = U_{ef1} \sqrt{2} \cos(\omega t) \quad (5.12)$$

$$\hat{\Phi} = B \cdot S \quad (5.13)$$

$$\omega = 2\pi f$$

U_1 s'écrit:

$$U_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cdot N_1 \cdot S \cdot f \cdot B \quad (5.14)$$

5.6.3 Transformateur monophasé réel

Nous devons maintenant prendre en compte toutes les imperfections du transformateur, en introduisant les résistances des enroulements et les inductances de fuites et dont on distingue un flux commun et flux de fuite pour chacune des bobines.

Un transformateur réel a des résistances d'enroulements ($r_1 = r_2 \neq 0$), non négligeables. Le transformateur sera donc le siège de pertes par effet Joule (appelées également pertes cuivre) :

$$P_{\text{Joule}} = P_{\text{Cuivre}} = r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2 \quad (5.15)$$

- Une partie du courant primaire génère un flux qui n'est pas induit dans le secondaire. Le flux de fuite primaire est noté Φ_{11} .
- Une partie du courant primaire génère un flux qui n'est pas induit dans le secondaire. Le flux de fuite secondaire est noté Φ_{22} .

Le flux associé au primaire est :

$$\Phi_1 = \Phi_m + \Phi_{11} = \Phi_m + \frac{I_1 L_1}{n_1} \quad (5.16)$$

Le flux associé au secondaire est :

$$\Phi_2 = \Phi_m + \Phi_{22} = \Phi_m + \frac{I_2 L_2}{n_2} \quad (5.17)$$

Ces pertes que l'on appelle pertes magnétiques sont proportionnelles à l'intensité du bobinage correspondant et sont quantifiées par des inductances primaires l_1 et secondaire l_2 . Ces pertes sont à caractère inductif.

Le noyau du transformateur réel n'est pas parfaite μ_r est finie, et le courant magnétisant n'est pas négligeable. En effet, le noyau est représenté par une réactance magnétisante X_m .

Les pertes fer sont causées principalement par l'hystérésis et les courants de Foucault. Ces pertes sont représentées par une résistance R_c connectée en parallèle avec X_m .

Les équations suivantes décrivent le fonctionnement du transformateur réel :

$$U_1 = r_1 I_1 + l_1 \frac{dI_1}{dt} + N_1 \frac{d\Phi_c}{dt} \quad (5.18)$$

$$U_2 = -r_2 I_2 - l_2 \frac{dI_2}{dt} - N_2 \frac{d\Phi_c}{dt} \quad (5.19)$$

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = \Phi_c \mathcal{R} \quad (5.20)$$

La figure suivante (5.12) représente le modèle réel du transformateur.

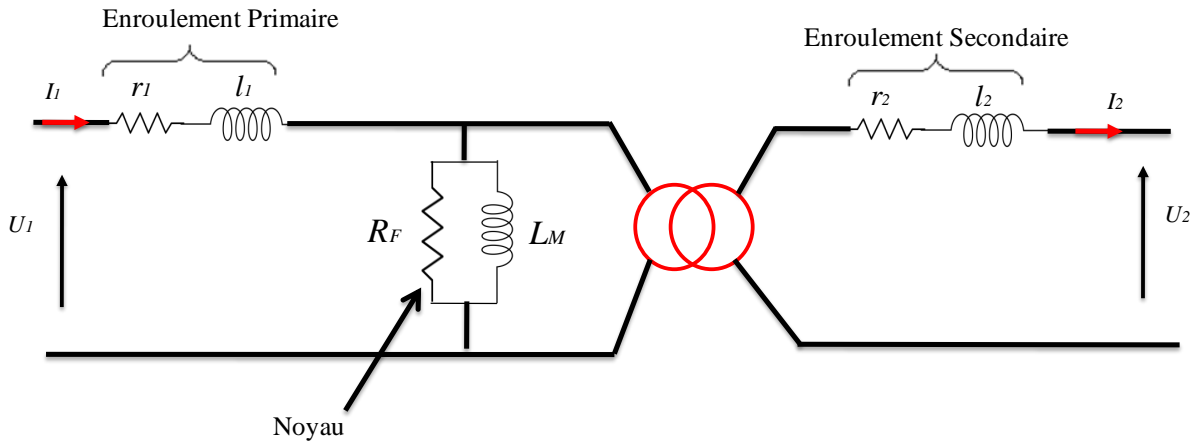


Figure 5.12 Circuit équivalent (transformateur réel).

Les conséquences de ces phénomènes parasites sont :

- Le rendement du transformateur est inférieur à 100%.
- Le rapport de tension entre le primaire et le secondaire ne sera pas exactement égal au rapport du nombre de tours.
- La tension au secondaire variera aussi en fonction de la charge.

En effet, la tension secondaire U_2 en charge est différente de la tension secondaire à vide U_{2V} . On appelle chute de tension secondaire en charge la différence entre les valeurs efficaces de ces tensions :

$$\Delta U_2 = U_{2V} - U_2 \quad (5.21)$$

5.7 Rendement du transformateur

La puissance délivrée par le transformateur est la puissance utile P_u , alors la puissance qu'il absorbe est la puissance active P_a .

Le rendement du transformateur se définit par le rapport de P_u à P_a

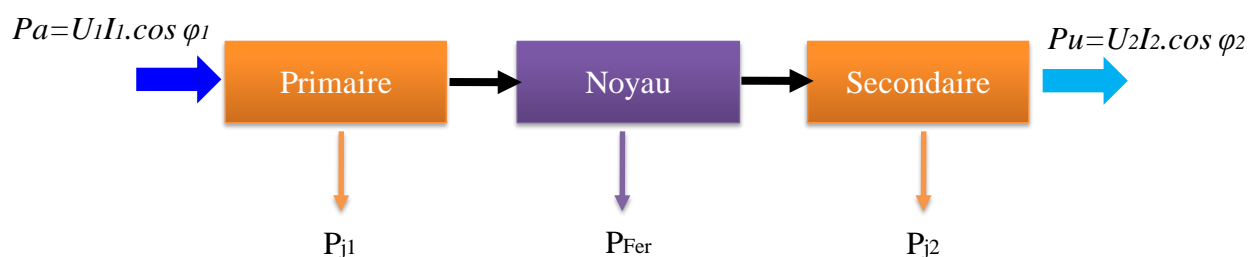


Figure 5.13 Bilan de rendement.

$$\begin{aligned}
 P_a &= P_u + P_{j1} + P_{j2} + P_{Fer} \\
 &= P_u + P_{Cuivre} + P_{Fer}
 \end{aligned}
 \tag{5.22}$$

$$P_a = P_u + P_{Cuivre} + P_{Fer} \tag{5.23}$$

$$\eta = \frac{P_u}{P_u + P_{Cuivre} + P_{Fer}} \tag{5.24}$$

$\eta < 1$, mais proche de 1.

La figure 5.14 illustre une expérience sur un transformateur réel (Laboratoire d'électronique de puissance, département d'électronique, USTO).

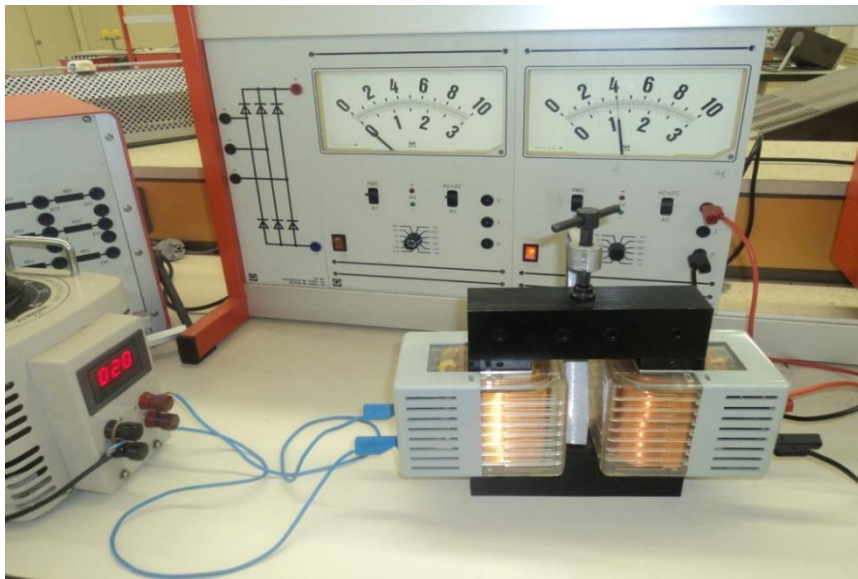


Figure 5.14 Rapport de transformation.

$$U_1 = 20 \text{ V}$$

Pour le secondaire :

Calibre : 100, la graduation d'échelle : 10

$$U_2 = \frac{4.100}{10} = 40 \text{ V}$$

$$\begin{cases}
 U_1 = 20 \text{ V} \\
 U_2 = 40 \text{ V}
 \end{cases}$$

$$a = \frac{U_2}{U_1} = 2$$

5.8 Détermination des paramètres :

5.8.1 Détermination des pertes fer

Pour déterminer les pertes fer, on effectue l'essai à vide (circuit ouvert : co) sous tension nominale au primaire. Le schéma équivalent est ramené alors au primaire.

La figure 5.15 schématise le montage électrique

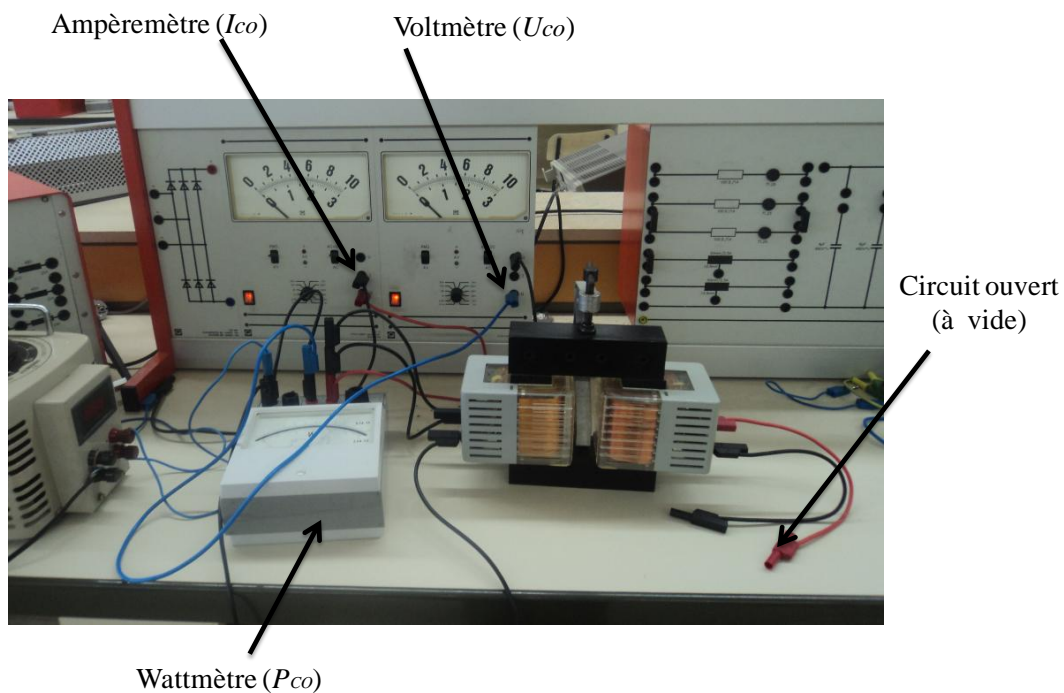


Figure 5.15 Essai à vide.

On mesure les paramètres :

$$P_{CO}, V_{CO}, I_{CO}$$

Le secondaire étant ouvert :

$$I_2 = 0 \text{ A} \rightarrow P_{j2} = 0$$

$$P_u = 0$$

Le wattmètre mesure P_{CO} :

$$\begin{aligned} P_{CO} &= P_u + P_{j1} + P_{j2} + P_{Fer} \\ &= 0 + P_{j1} + 0 + P_{Fer} \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$P_{j1} \ll P_{Fer}$$

$$P_{CO} \approx P_{Fer}$$

Schéma équivalent

La figure ci-dessous représente le schéma équivalent en circuit ouvert

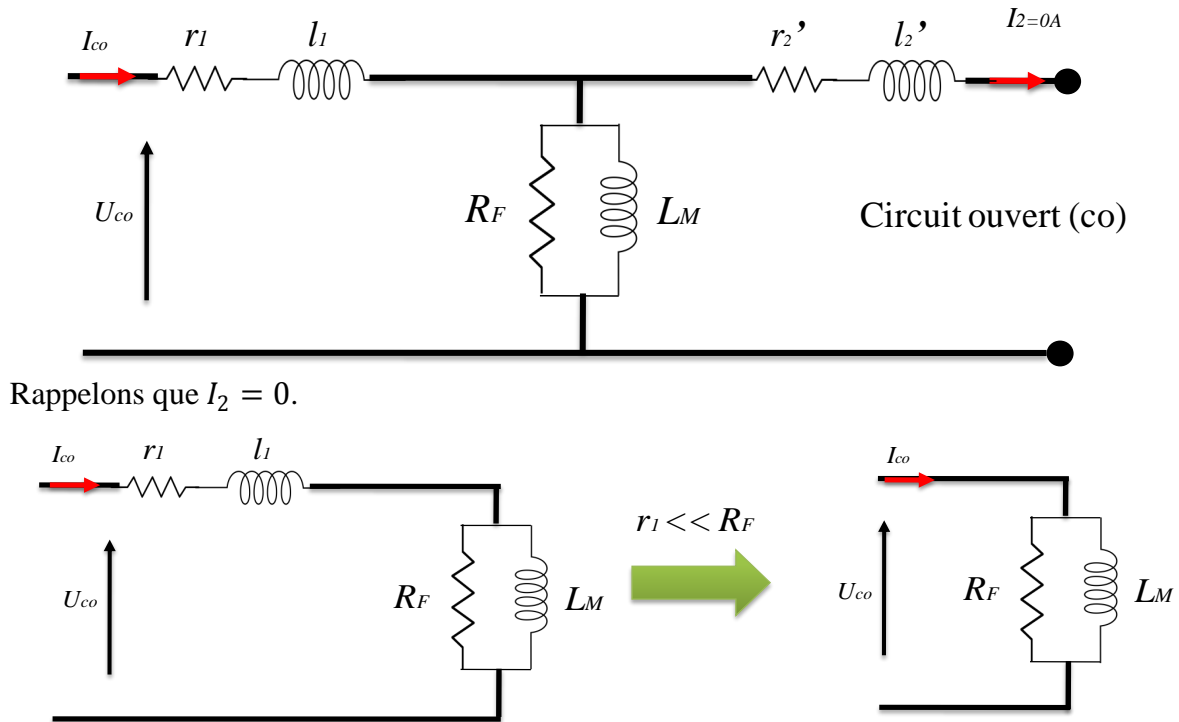


Figure 5.16 Schéma équivalent en circuit ouvert.

Les essais à vide (circuit ouvert) nous permettent de déterminer les paramètres de la branche de magnétisation.

5.8.2 Détermination des pertes Joule (cuivre)

Pour déterminer les pertes cuivre, on effectue un essai en court-circuit, sous tension réduite et à courant secondaire nominal.

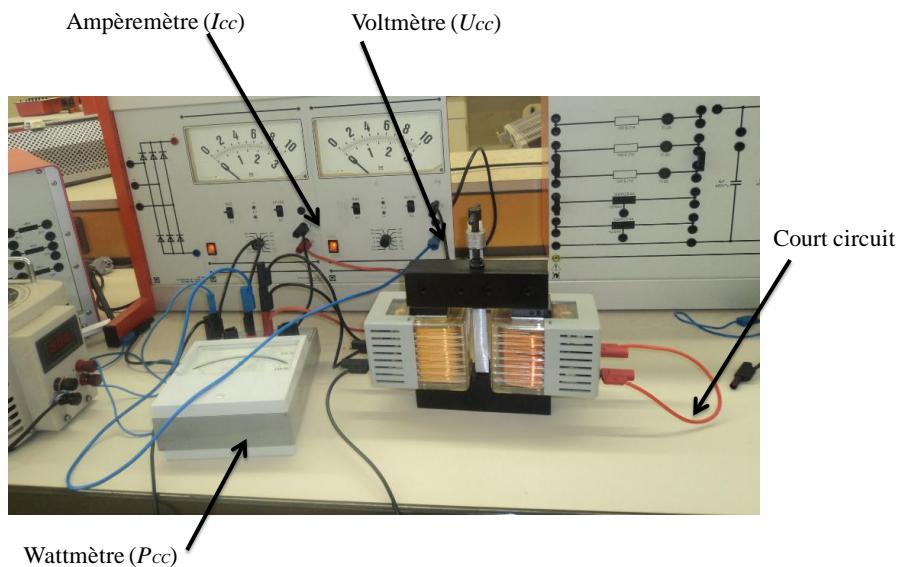


Figure 17 Essai en court circuit.

Le secondaire étant en court circuit :

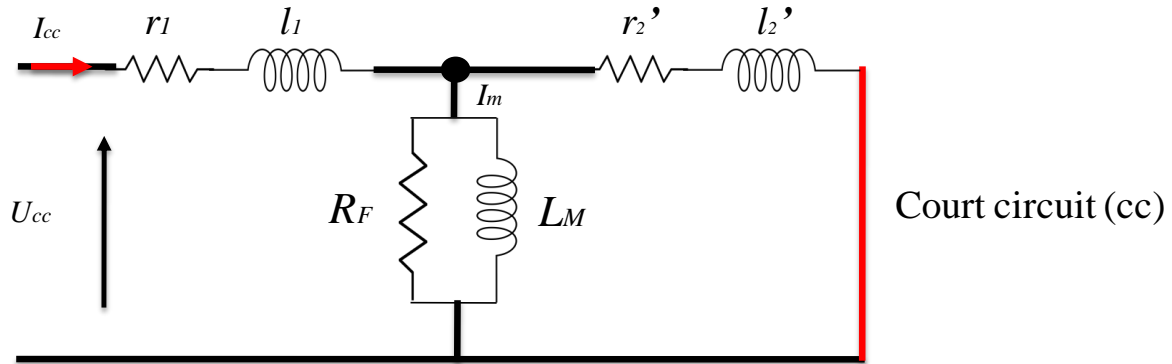


Figure 5.18 Schéma équivalent en circuit ouvert.

$R_F \gg r_1 \rightarrow I_m = 0 \text{ A}$, la branche de magnétisation est négligeable.

Le circuit alors devient :

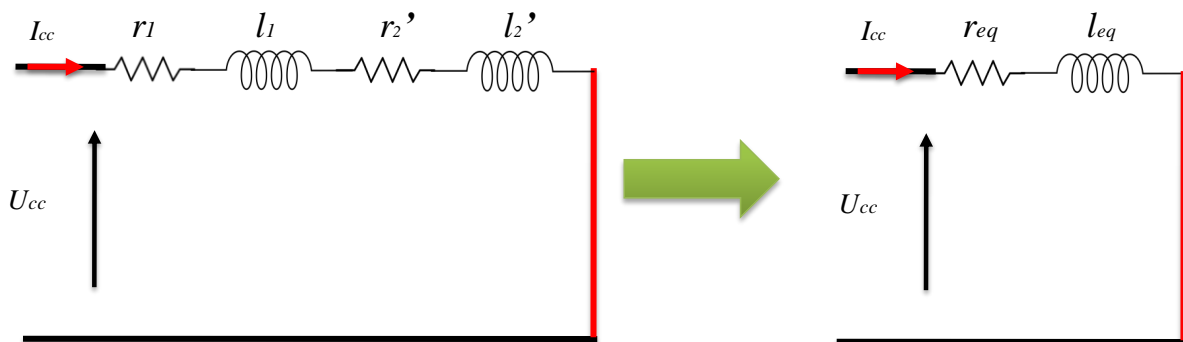


Figure 5.19 Schéma équivalent en court circuit (final).

$$P_{CC} = P_u + P_{j1} + P_{j2} + P_{Fer} \quad (5.26)$$

$$U_2 = 0 \rightarrow P_u = 0$$

$$I_m = 0 \rightarrow P_{Fer} = 0 \text{ .Alors :}$$

$$P_{CC} = 0 + P_{j1} + P_{j2} + 0 \approx P_j$$

$$P_{CC} \approx P_j$$

Les essais en court circuit nous permettent de déterminer les paramètres des enroulements.

5.9 Transformateur spécial

Dans les applications industrielles, on rencontre un grand nombre de transformateurs de construction spéciale, mais la plupart possèdent les propriétés de base que nous avons étudiées dans ce chapitre.

5.9.1 Transformateurs triphasés

En triphasé, on peut utiliser trois transformateurs monophasés identiques dont on groupe les primaires et les secondaires en étoile ou en triangle.



Figure 5.20 Transformateur triphasé.

En effet le circuit magnétique est formé de trois noyaux fermés par 2 culasses.

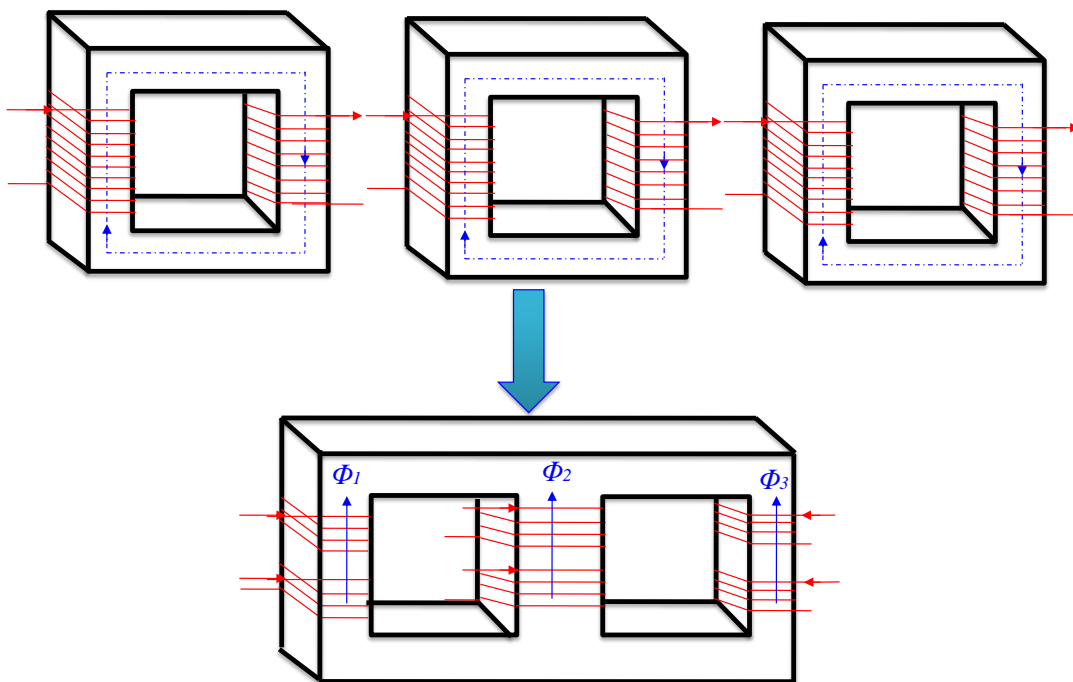


Figure 5.21 Transformateur triphasé (circuit magnétique).

5.9.2 Autotransformateur

On appelle autotransformateur, un transformateur composé d'un enroulement unique monté sur un circuit magnétique (sans isolement). En d'autres termes, c'est un transformateur à un enroulement.

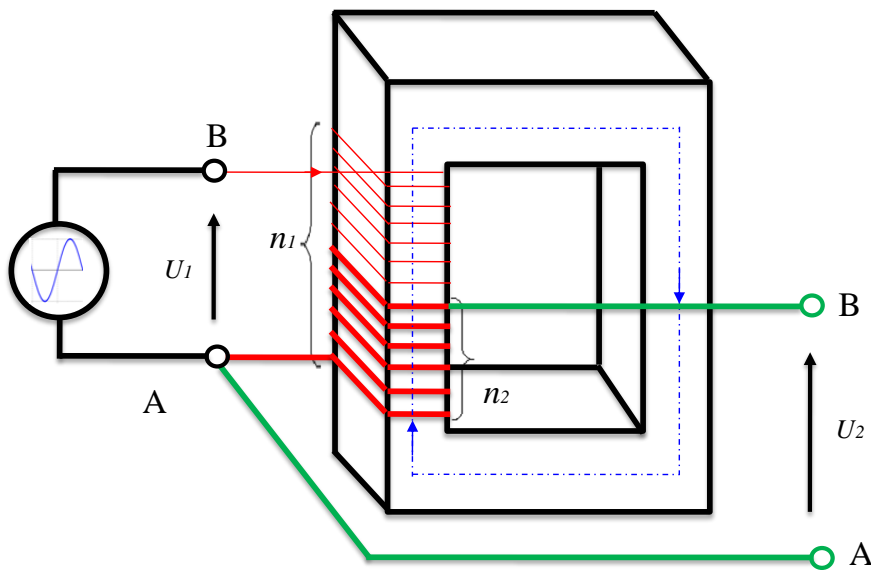


Figure 5.22 Autotransformateur.

5.9.3 Transformateurs à impulsion

Le transformateur fonctionne en régime impulsionnelle lorsque son primaire est alimenté par une source continue, a traves d'un interrupteur commandé périodiquement. Ce type de transformateur est utilisé pour la commande des thyristors, triacs et des transistors [13].

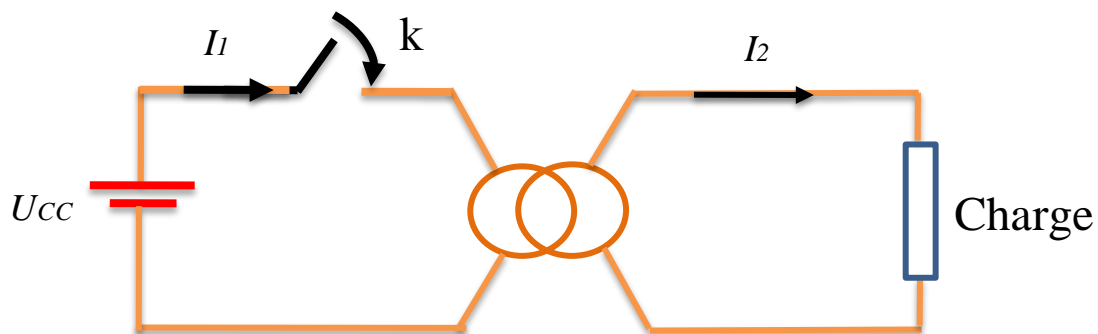


Figure 5.23 Transformateurs à impulsion.

5.9.4 Transformateurs d'isolement

Le transformateur d'isolement est seulement conçu pour créer un isolement galvanique, afin d'assurer la sécurité d'une installation industrielle, aussi d'éliminer une partie du bruit électrique.

Application N°1

Des tests effectués au laboratoire sur un transformateur de 1,5 KVA 220/110V, 60Hz ont donné les mesures suivantes :

- Essai en circuit ouvert (côté haute tension en circuit ouvert)

$$V_{co} = 110V, \quad I_{co} = 0,4A, \quad P_{co} = 25W$$

- Essai en court-circuit (côté haute tension en court-circuit)

$$V_{cc} = 8,25V, \quad I_{cc} = 13,6A, \quad P_{cc} = 40W$$

- La mesure en courant continu des résistances ohmiques des enroulements donne :

$$R_{HT} = 0,413\Omega \quad R_{BT} = 0,113\Omega$$

1. Si l'on veut que le flux maximum dans le noyau de transformateur soit de 2mWb, quels doivent être les nombres de spires des enroulements primaire et secondaire. ?
2. Déterminer à partir des essais des différents paramètres du transformateur
3. Donner le schéma équivalent ramené au primaire puis au secondaire de ce transformateur.
4. Si le transformateur débite 110V sous sa puissance nominale, dans une charge inductive dont le facteur de puissance est de 0,8, quelle est alors la valeur de la tension au primaire. ?
5. Quel serait alors le rendement de ce transformateur. ?

Solution

$$1. \quad \Phi_{max} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ wb}$$

$$U = 4,44 \cdot Nf \cdot \Phi_{max} \Rightarrow \{N_1 = \frac{U_1}{4,44 \cdot f \cdot \Phi_m} = 413 \text{ spires}$$

$$\{N_2 = \frac{U_2}{4,44 \cdot f \cdot \Phi_m} = 206 \text{ spires}$$

$$\text{Noter que} \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = a = 2$$

2. **a.** L'essai en C.O \Rightarrow on détermine la branche de magnétisation car $X_m > x_1$ et $R_F > r_1$

On travaille avec le schéma, qui ramène au secondaire

$$P_{co} = \frac{V_{co}^2}{R'_F} \Rightarrow R'_F = \frac{V_{co}^2}{P_{co}} = \frac{(110)^2}{25} = 484 \Omega \Rightarrow R_F = a^2 R'_F = 1936 \Omega$$

$$P_{co} = V_{co} I_{co} \cos \Phi_{co} = 0,5682 \Rightarrow \sin \Phi_{co} = 0,8229$$

$$\text{Alors} \quad X'_m = \frac{V_{co}}{I_{co} \sin \Phi_{co}} = \frac{110}{0,4 \times 0,8229} = 334 \Omega \Rightarrow X_m = 1337 \Omega$$

- b.** Essai en C.C : On néglige I_m

$$\Rightarrow r'_{eq} = \frac{P_{cc}}{I_{cc}^2} = \frac{8,25}{(13,6)^2} = 0,216 \Omega \Rightarrow r_{ep} = 0,865 \Omega$$

$$r_{DC} = r_{1DC} + a^2 r_{2DC} = 0,413 + 0,452 = 0,865 = r_{ep}$$

$$\Rightarrow r_1 = r_{1DC} = 0,413 \Omega \quad \text{et} \quad r_2 = r_{2DC} = 0,113 \Omega$$

$$\Rightarrow \cos \Phi_{cc} = \frac{P_{cc}}{I_{cc} V_{cc}} = 0,3565 \Rightarrow \sin \Phi_{cc} = 0,9343$$

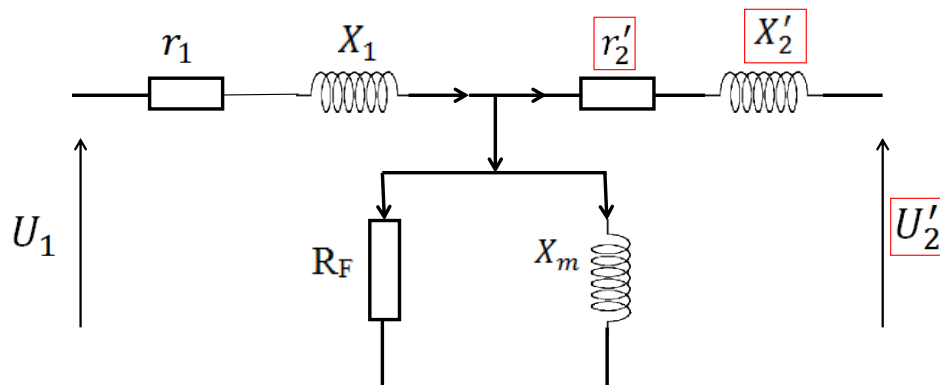
$$X'_{ep} = \frac{V_{cc} \sin \Phi_{cc}}{I_{cc}} = 0,566 \Omega$$

$$X_{ep} = 2,264 \Omega$$

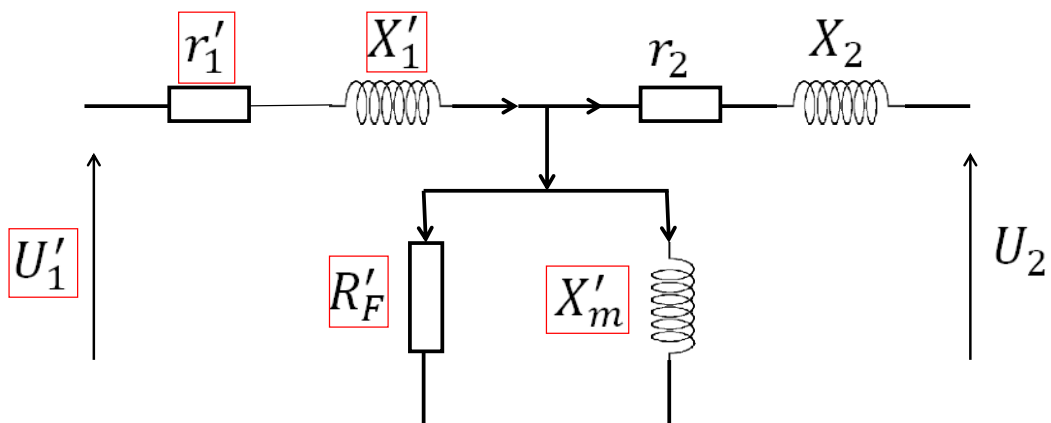
$$\left. \begin{array}{l} X_{ep} = X_1 + a^2 X_2 \\ X_1 = a^2 X_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X_1 = \frac{X_{ep}}{2} = 1,132 \Omega \\ X_2 = \frac{X_1}{4} = 0,283 \Omega \end{array}$$

3. Schéma équivalent

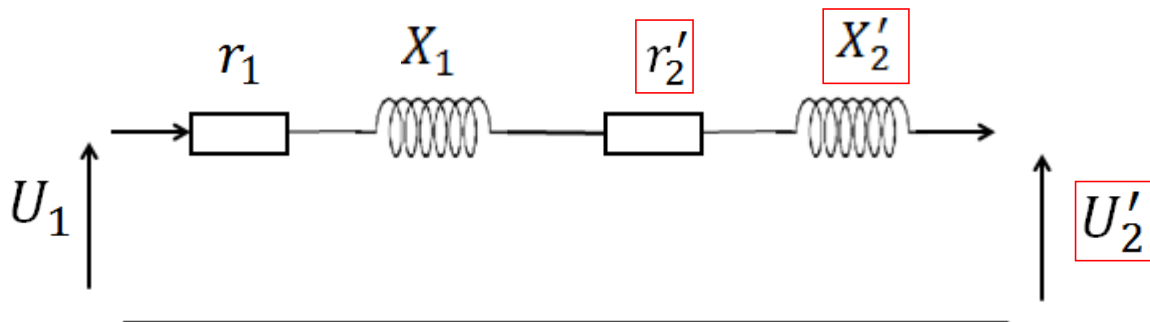
A. Ramené au primaire



B. Ramené au secondaire



4. On néglige le courant de magnétisation car il est très petit devant le courant nominal ($0,4 \ll 13,6$).



$$I_1 = I_2'$$

$$U_1 = U_2' + (r_{ep} + jX_{ep})I$$

Utilisant la représentation vectorielle, on déduit que :

$$U_1 = \sqrt{(U_2' \cos \varphi + r_{ep} I_1)^2 + (U_2' \sin \varphi + X_{ep} I_1)^2}$$

$$S = U_2 \cdot I_2 \rightarrow I_2 = \frac{s}{U_2} = \frac{1500}{110}$$

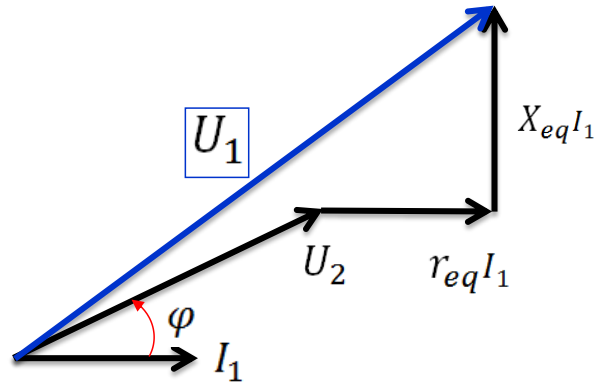
$$I_2 = 13,6A$$

$$I_1 = \frac{I_2}{2} = \frac{13,6}{2}$$

$$I_1 = 6,8 A$$

$$U_1 = \sqrt{(220 \cdot 0,8 + 0,865 \cdot 6,7)^2 + (220 \cdot 0,6 + 2,264 \cdot 6,8)^2}$$

$$U_1 = 234,10 V$$



5. Le Rendement

$$\eta = \frac{P}{P + P_{fer} + P_{cui}}$$

$$P = S \cos \varphi = 1,5 \times 0,8 = 1200 \text{ w}$$

$$P_{fer} = P_{co} \quad \text{Parce que } V_{co} = \text{Tension nominale}$$

$$P_{cui} = P_{cc} \quad \text{Parce que } I_{cc} = \text{Courant nominal } I_N = \frac{S}{V_{cc}} = 13,6$$

$$\eta = \frac{1200}{1200 + 25 + 40} = 0,9486$$

$$\eta = 94,86 \%$$

Application N°2

La puissance apparente d'un transformateur monophasé 5000 V / 230 V ; 50 Hz est $S = 21$ KVA. La section du circuit magnétique est $s = 60 \text{ cm}^2$ et la valeur maximale du champ magnétique $B = 1,1 \text{ T}$.

L'essai à vide a donné les résultats suivants :

$$U_1 = 5000 \text{ V} ; U_{co} = 230 \text{ V} ; I_{co} = 0,50 \text{ A} \text{ et } P_{co} = 250 \text{ W}.$$

L'essai en court-circuit avec $I_{cc} = I_{2n}$ a donné les résultats suivants :

$$P_{cc} = 300 \text{ W} \text{ et } U_{cc} = 200 \text{ V}.$$

- 1- Calculer le nombre de spires N_1 au primaire.
- 2- Calculer le rapport de transformation m et le nombre N_2 de spires au secondaire.
- 3- Quel est le facteur de puissance à vide de ce transformateur ?
- 4- Quelle est l'intensité efficace du courant secondaire I_{2n} ?
- 5- Déterminer les éléments R_s ; Z_s et X_s de ce transformateur.

6- Calculer le rendement de ce transformateur lorsqu'il débite un courant d'intensité nominale dans une charge inductive de facteur de puissance 0,83.

Solution

1. Utilisant la formule de Boucheront :

$$U_1 = 4.44 N_1 S F B$$

$$N_1 = \frac{U_1}{4.44 S F B}$$

$$N_1 = \frac{5000}{4,44 \cdot 60 \cdot (10^{-2})^2 \cdot 50 \cdot (1,1)} = 3413 \text{ spires}$$

2. Calcule du rapport de transformation m et le nombre N_2 de spires au secondaire :

$$m = \frac{U_2}{U_1} = \frac{230}{5000} = 0,046$$

$$m = \frac{N_2}{N_1} \rightarrow N_2 = m \cdot N_1$$

$$N_2 = 0,046 \cdot 3413 \text{ spires}$$

$$N_2 = 157 \text{ spires}$$

3- Facteur de puissance à vide de ce transformateur :

$$P_{co} = P_F = U_{co} \cdot I_{co} \cdot \cos \varphi_{co} \rightarrow \cos \varphi_{co} = \frac{P_{co}}{U_{co} \cdot I_{co}}$$

$$\cos \varphi_{co} = \frac{250}{5000 \cdot 0,5} = 0,1$$

$$\cos \varphi_{co} = 0,1$$

4. Intensité efficace du courant secondaire I_{2n} :

$$S = U_{1n} \cdot I_n = U_{20} \cdot I_{2n} \rightarrow I_{2n} = \frac{S}{U_{20}}$$

$$I_{2n} = \frac{21 \cdot 10^3}{230} = 91,3 \text{ A}$$

$$I_{2n} = 91,3 \text{ A}$$

5. Détermination des éléments R_s ; Z_s et X_s :

$$R_s = \frac{P_{1cc}}{I_{2cc}^2} = \frac{300}{91,3^2} = 36 \text{ m}\Omega$$

$$Z_s = \frac{m \cdot U_1}{I_{2n}} = 0,1 \Omega$$

$$X_s = \sqrt{Z_s^2 - R_s^2} = \sqrt{(0,1)^2 - (0,036)^2} = 94 \Omega$$

6. Calcul du rendement de ce transformateur lorsqu'il débite un courant d'intensité nominale dans une charge inductive de facteur de puissance 0,83 :

Pour déterminer le rendement, il faut déjà déterminer la tension U_2 aux bornes de la charge, utilisant l'expression approchée de la chute de tension :

$$\Delta U_2 = U_2 - U_2 = R_s \cdot I_2 \cdot \cos \varphi + X_s \cdot I_2 \cdot \sin \varphi$$

$$\Delta U_2 = 36 \cdot 10^{-3} \cdot 91,3 \cdot 0,83 + 94 \cdot 10^{-3} \cdot 91,3 \cdot \sin(\cos^{-1} 0,83) = 7,51 V$$

$$U_2 = U_{co} - \Delta U_2 = 230 - 7,51$$

$$U_2 = 222,5 V, \text{ on calcule } P_1 \text{ et } P_2 :$$

$$P_2 = U_2 \cdot I_2 \cdot \cos \omega = 222,5 \cdot 91,3 \cdot 0,83 = 16,86 KW$$

$$P_1 = P_2 + P_F + P_C = 16,86 \cdot 10^3 + 250 + 300 = 17,41 KW$$

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = 0,968$$

$$\eta = 96,8 \%$$

Chapitre 6 : Introduction aux machines électriques

6.1 Généralités sur les machines électriques

Une machine électrique est un dispositif électromécanique basée sur l'électromagnétisme permettant la conversion d'énergie électrique en travail ou énergie mécanique. Actuellement, les machines électriques sont de plus en plus associées avec des dispositifs de l'électronique de puissance, qui permettent d'obtenir des formes de tension et courant très diverses quant à la forme, la fréquence ou l'amplitude.

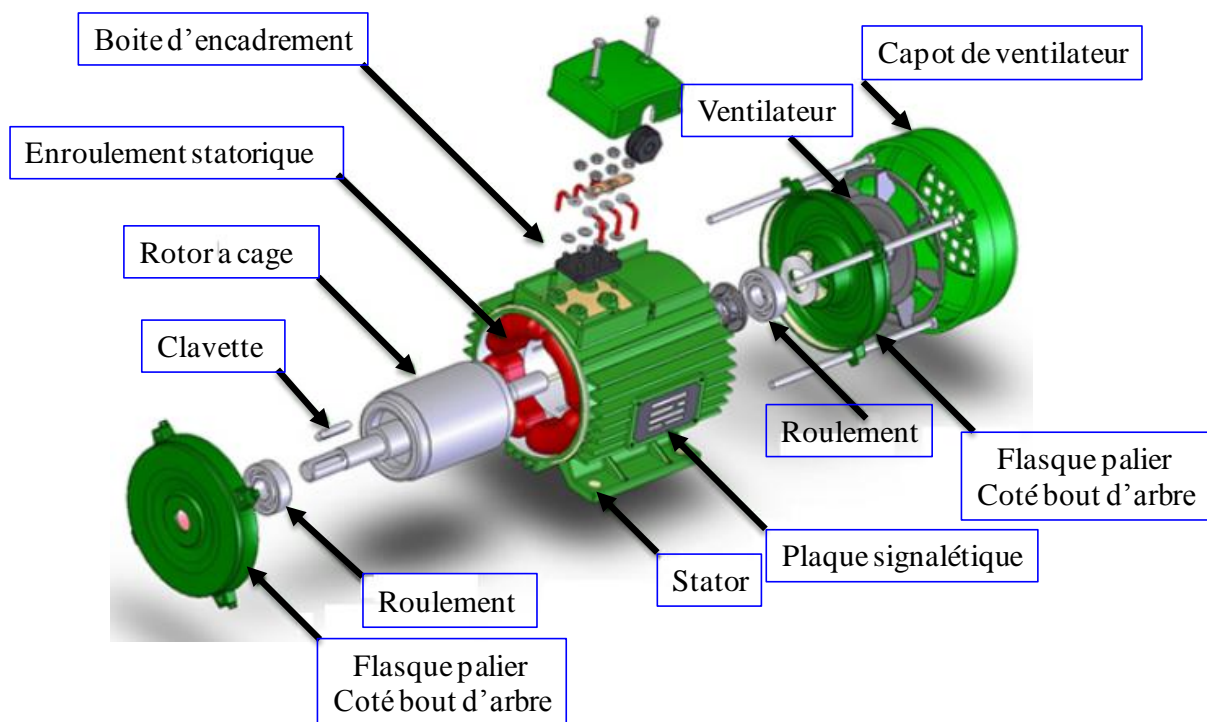


Figure 6.1 Machines électriques.

Une évolution remarquable des machines électriques, notamment leurs performances techniques, s'est faite grâce à :

- Un refroidissement mieux contrôlé.
- Une meilleure qualité du matériau utilisé.
- L'apparition d'aimants permanents performants.

6.2 Constitution d'une machine électrique

La figure 6.2 représente les différentes parties d'une machines électriques :

- Une partie fixe le stator ou **inducteur** et une partie tournante, le rotor ou **induit** séparées par un **entrefer**. Le stator et le rotor sont constitués par un assemblage de tôles afin de limiter les pertes par courants de Foucault et par hystérésis ;
- Un circuit inducteur, qui est la source de champ magnétique. Il peut être formé soit par des
- **Aimants en ferrite**, soit par des **bobines inductrices** en série (électroaimants). Les bobines sont placées autour de **noyaux polaires**. La machine est dite bipolaire si elle ne comporte qu'un pôle Nord et un pôle Sud ;
- Un circuit induit au rotor. Il est formé de conducteurs logés dans des **encoches**;
- Un **collecteur** qui associé aux **balais**, permet de relier le circuit électrique rotorique de l'induit à un circuit électrique extérieur à la machine. Le collecteur est un ensemble de lames de cuivre isolées latéralement les unes des autres, réunies aux conducteurs de l'induit en certains points. Les balais, portés par le stator, frottent sur les lames du collecteur, et permettent d'établir une liaison électrique entre l'induit qui tourne et l'extérieur de la machine qui est fixe [14].

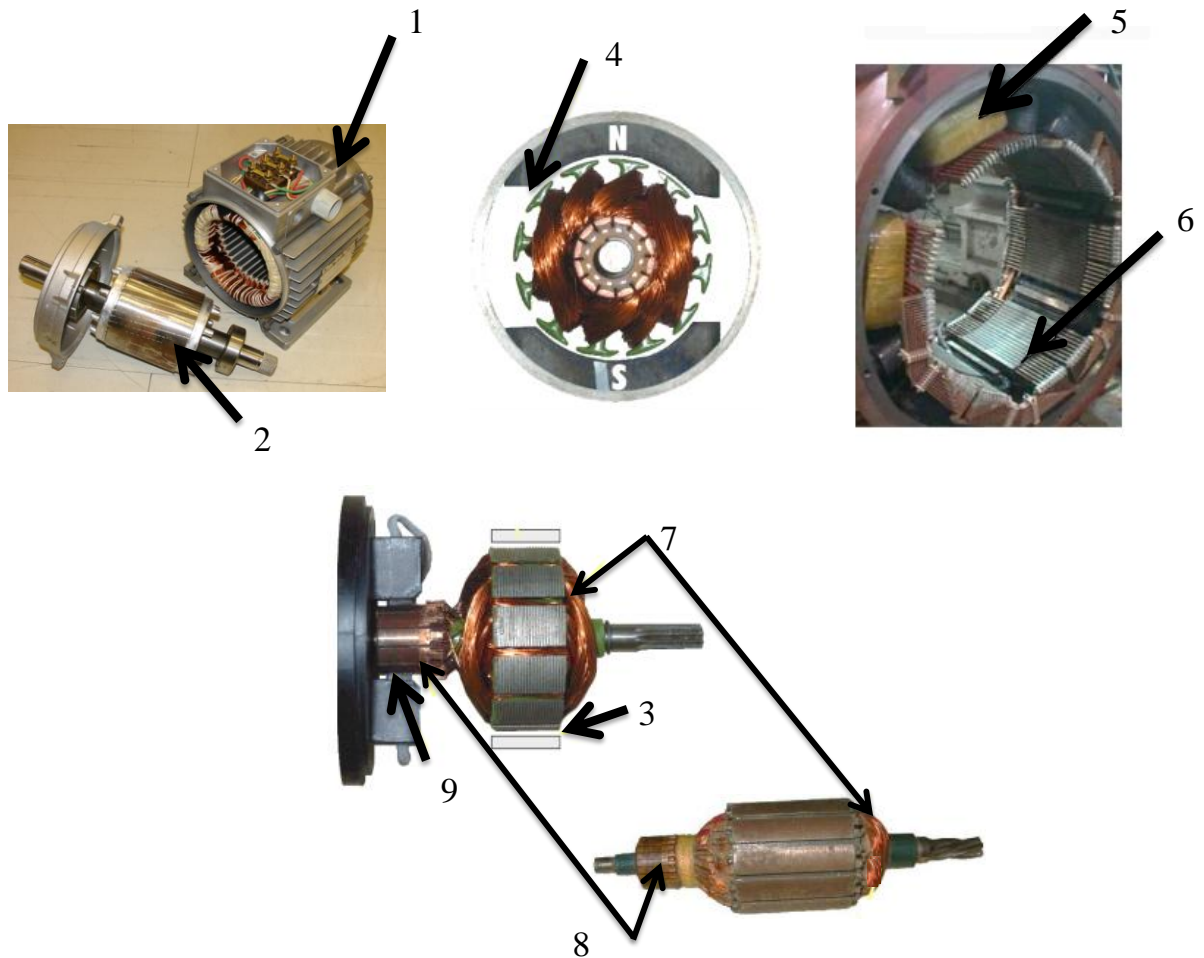


Figure 6.2 Structure d'une machine électrique.

1. Inducteur
2. Induit
3. Entrefer
4. Aimants en ferrite
5. Bobines inductrices
6. Noyaux polaires
7. Encoches
8. Collecteur
9. Balais

Le stator et le rotor sont généralement constitués de matériaux ferromagnétiques qui permettent de *concentrer* l'énergie électromagnétique dans l'entrefer.

6.3 Principe de fonctionnement

Une machine à courant continu possède N conducteurs actifs. Deux cas peuvent se présenter :

Soit un conducteur à la fois traversé par un courant électrique et plongé à l'intérieur d'un champ magnétique, il est alors soumis à une force électromagnétique [15].

Soit un conducteur à la fois en mouvement de rotation et plongé à l'intérieur d'un champ magnétique. Il est alors le siège d'une force électromotrice. Ces deux cas peuvent être décrits par le schéma suivant:

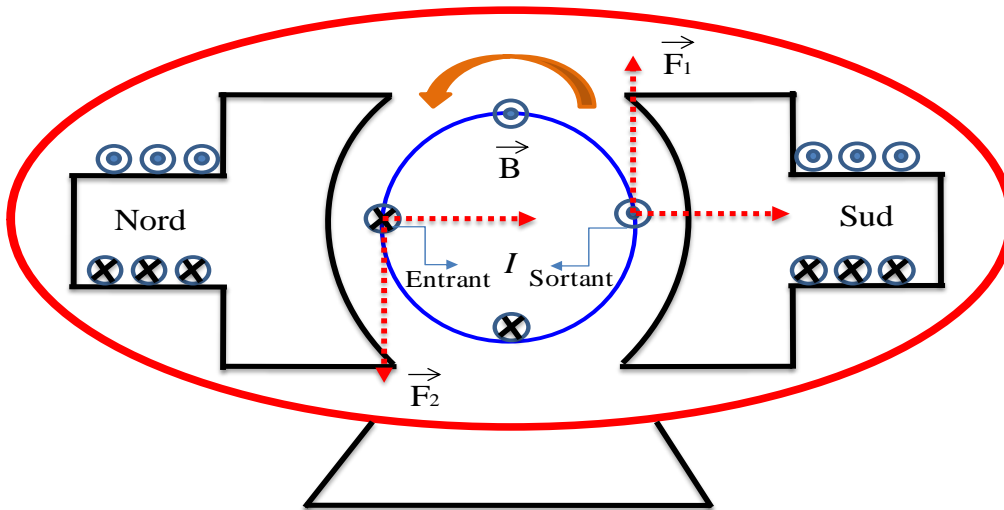


Figure 6.3 Principe de fonctionnement d'une machine électrique.

On résume :

Courant + champ magnétique \rightarrow Force électromagnétique

Force + champ magnétique \rightarrow Force électromotrice

Les N conducteurs actifs, coupent les lignes du champ magnétique. Ils sont donc le siège de forces électromotrices induites. La force électromotrice FEM résulte de l'ensemble de ces N spires :

$E = N \cdot n \cdot \Phi$ Avec :

E : La FEM en Volts [V]

N : Le nombre des inducteurs actifs

n : La fréquence de rotation en tours par seconde [tr/s]

Φ : Le flux en Webers [Wb]

Cette relation est essentielle pour la machine. Elle est le lien entre le flux Φ : une grandeur magnétique, la tension E : une grandeur électrique, et la fréquence de rotation n : une grandeur mécanique.

La vitesse angulaire de la machine Ω exprimée en radians par seconde :

$\Omega = 2\pi n$, alors

$$E = K \cdot \Omega \cdot \Phi \quad (6.1)$$

$K = \frac{pN}{a}$ Constante interne de la machine.

p : Nombre de paires de pôles, a : nombre de paires de voies en parallèles.

6.4 Mode de fonctionnement

Une machine électrique peut fonctionner en moteur ou générateur (**réversible**), en fonction de l'application ou de la phase de fonctionnement.

- Les machines électriques produisant de l'énergie électrique à partir d'une énergie mécanique sont appelées des **génératrices**, dynamos ou alternateurs suivant la technologie utilisée.
- Les machines électriques produisant une énergie mécanique à partir d'une énergie électrique sont appelées des **moteurs**.

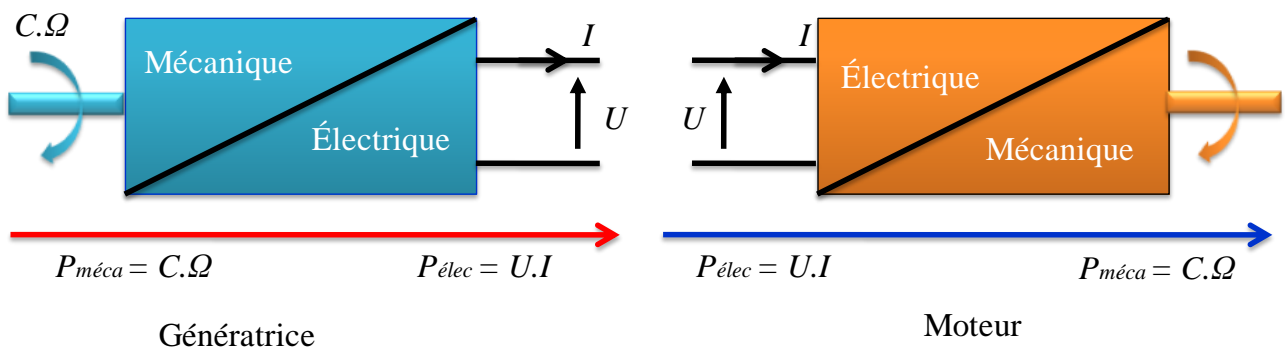


Figure 6.4 Mode de fonctionnement d'une machine électrique.

Lors du fonctionnement en moteur, l'énergie mécanique se caractérise par un couple de moment C associé à une vitesse angulaire Ω . Le produit de ces deux grandeurs définit la puissance mécanique :

$$P_{méca} = C \cdot \Omega \quad (6.2)$$

$P_{méca}$: Puissance mécanique en watts [W]

C : Moment du couple mécanique en newton-mètre [Nm]

Ω : La vitesse angulaire en radians par seconde [$rad.s^{-1}$]

Pour le fonctionnement en mode génératrice, l'énergie électrique est évaluée par un courant continu I et une tension continue U . La puissance électrique sera le produit de ces deux grandeurs :

$$P_{elec} = U.I \quad (6.3)$$

P_{elec} : Puissance mécanique en watts [W]

U : La tension en volts [V]

I : L'intensité du courant en ampères [A]

6.5 Bilan de puissance et rendement

Les pertes dans une machine électriques sont différentes à savoir [16] :

- Les pertes Joule dans l'inducteur $R_E I_E^2$
- Les pertes Joule dans l'induit $R_a I^2$
- Les pertes mécaniques dépendant uniquement de la vitesse de rotation Ω
- Les pertes fer localisés dans l'induit. On distingue deux types : hystérisées et Foucault et qui dépendant de la valeur de la vitesse de rotation du flux créée par l'inducteur.

Du fait de ces différentes pertes, le rendement d'une machine à courant continu varie entre 80 et 95 %. Un exemple de calcul de rendement à partir des plaques signalétiques est donné :

M _{nom} / Rated torque		Altit.	Temp.
301 N.m	1150 min ⁻¹	1000 m	40 °C
36,3 kW	1720 min ⁻¹	440 V	95,5 A
3,63 kW		44 V	95,5 A
36,3 kW		440 V	95,5 A
		360 V	3 A
		240 V	3 A

Labels on the table:

- Couple nominal (points to 301 N.m)
- Puissance utile (points to 36,3 kW)
- Tension d'excitation (points to 360 V)
- Tension nominal aux bornes de l'induit (points to 440 V)
- Courant nominal dans l'induit (points to 95,5 A)

Figure 6.5 Plaque signalétique d'une machine électrique.

Le rendement de cette machine est calculé par cette méthode :

$$\eta = \frac{P_u}{P_a} = \frac{C.\Omega}{(U.I)+(U_E.I_E)} \quad (6.4)$$

$$P_u = 36.3 \text{ Kw}$$

$$U \cdot I = 440 \cdot 95.5 = 42.020 \text{ Kw}$$

$$U_E \cdot I_E = 360 \cdot 3 = 1.080 \text{ Kw}$$

$$\eta = \frac{P_u}{P_a} = \frac{36.3}{42.020 + 1.080} = \frac{36.3}{43.1} = 0.8422$$

$$\eta = 84.22 \%$$

Le rendement de cette machine est de l'ordre de 84%, dû principalement aux pertes. On note que le coût d'une machine électrique dépend de son rendement fortement.

Références

- [1] James Ward Brown, Ruel V. Churchill. “Complex Variables and Applications”, Eighth Edition, ISBN 978–0–07–305194–9.2008
- [2] <http://pagesperso-orange.fr/fabrice.sincere/>
- [3] Joseph A. EDMINISTER. “Théorie et application des circuits électriques”, SERIE SCHAUM, ISSN : 0769-2727. 1994.
- [4] René Meys. “Lignes de transmission : Régimes transitoire et sinusoïdal Applications», Ellipses Marketing (15 août 2006), ISBN-10: 2729829989
- [5] http://medias.dunod.com/document/9782100580217/Courant_Transitoires.pdf
- [6] Mehdi Dhaoui . “ Systèmes Electriques: Résumés de cours et problèmes corrigés sur les: Machines à courant continu Réseaux électriques triphasés Transformateurs (French Edition) ”, ISBN-10: 3841739016.2016
- [7] <https://fr.slideshare.net/chrpalermo/systemes-triphases>
- [8] Amari Mansour. “Circuits électriques et magnétiques : Cours et exercices corrigés ”, Saint Honoré Editions (31 janvier 2019), ISBN-10: 2407012046
- [9] Mohamed AMAR. “Caractérisation et prédiction des pertes dans les tôles Fer Silicium soumises à des tensions non-sinusoïdales, application au cas de la MLI”, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie CURIE, Paris 6, Septembre 1994
- [10] <https://melusine.eu.org/syracuse/immae/mp/physique-chimie/electromagnetisme/14.pdf>
- [11] F.Lucas, P.Charruault. “Les machines électriques ”, Delagrave, Génie électrique : collection F. Lucas, ISSN 0297-536X. 1987.
- [12] Dominique Bareille, Jean-pierre Daunis. “ Transformateurs et machine électrique”, ISBN 2100076167. Dunod Paris 2006.
- [13] http://www8.umoncton.ca/umcm-cormier_gabriel/Electrotechnique.html
- [14] <http://mach.elec.free.fr/mcc.htm>, Claude Chevassu. “ Généralités Sur Les Machines Electriques Tournantes”.
- [15] Elkheir Merabet. “ Machines électriques I”, polycopie, Université de Batna. 2013/2014.
- [16] Kostenko. Machines électriques, 1, 2. Ed. Mir Moscou.1976.