Exercices de Mathématiques 1 et 2 avec corrigés Licence première année Science de la matière.L1-SM-

Mme Chebbah née Bessai Naima

01/10/2018

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Ensembles-Applications- **3**

2.1 **Les Ensembles** 3

2.2 **Applications** 5

3 Relations d'Equivalences et Relations d'Ordre **9**

3.1 Relations d'Equivalence 9

3.2 Relations d'Ordre 11

4 Structure algébrique **13**

5 Limites,continuité et dérivabilité **19**

6 Développement limité **31**

7 Les éspaces véctoriels **39**

8 Applications Linéaires **45**

9 Matrices et Systèmes Linéaires **53**

10 Les Intégrales Simples **65**

11 Les équations différentielles **75**

Chapitre 1

Introduction

Ce polycopié est destiné aux étudiants de première année du système Licence-Master -Doctorat (L.M.D),spécialité :Science de la Matière (SM) et Sciences et Technologie (ST).Il comporte des exercices résolus sur les différents chapitres du module de Mathématiques1 et Mathématiques 2 proposés durant les travaux pratiques depuis 2004 .Et ça permet aux etudiants de mieux comprendre les différentes notions vues pendant ses cours de Mathématiques.

Je tiens à remercier Mme Hamza Aicha et Mme Bourega Dalila d'avoir accépter d'exepertiser ce polycopié et d'avoir participer à son enrichissement par leurs avis et conseils.

Tout commentaire ,proposition ou critique constructive permettant l'amélioration de ce travail sera recueilli avec un grad intéret.

Chapitre 2

Ensembles-Applications-

2.1 Les Ensembles

Exercice 1
Soient E un ensemble, A, B, C, D des sous ensembles de E.Montrer que :

1. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.
2. $A \cap B = A \cap C \iff A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$
3. Comparer $B_1 = A \cap (B \cup C)$ Avec $B_2 = (A \cap B) \cup C$
4. Simplifier : $B_3 = A \cap \left(\overline{A} \cup B\right) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B} \cup C\right)$

et $B_4 = A \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right)$
Remarque : $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A.
Solution 1
1). $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.
Cela revient à montrer que :
a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$
b) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
c) $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
Montrons a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

supposons que $A \subset B$ et montrons que :$A \cap B = A$ c'est à dire : $\begin{cases} A \cap B \subset A \\ et \\ A \subset A \cap B \end{cases}$

On a toujours : $A \cap B \subset A$, montrons que : $A \subset A \cap B$
Pour cela soit $x \in A$,comme $A \subset B$ alors $x \in B$
On a :$x \in A$ et $x \in B$ alors $x \subset A \cap B$ d'ou $A \subset A \cap B$
Inversement : supposons que $A \cap B = A$ et montrons que : $A \subset B$
Pour cela soit $x \in A$,comme $A = A \cap B$ alors $x \in A \cap B$ ce qui donne : $x \in B$
Montrons b) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

Supposons que $A \subset B$ et montrons que :$A \cup B = B$ c'est à dire : $\left\{ \begin{array}{c} A \cup B \subset B \\ et \\ B \subset A \cup B \end{array} \right.$
On a toujours : $B \subset A \cup B$, montrons que : $A \cup B \subset B$
Pour cela soit $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ ou $x \in B$ et comme $A \subset B$ alors $x \in B$
cela veut dire que : $A \cup B \subset B$

Inversement : supposons que $A \cup B = B$ et montrons que : $A \subset B$
Pour cela soit $x \in A$,comme $A \subset A \cup B$ alors $x \in A \cup B$ or $A \cup B = B$
ce qui donne : $x \in B$
Montrons c) $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
supposons que $A \subset B$ et montrons que :$\overline{B} \subset \overline{A}$
Pour cela soit $x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin B$ et comme $A \subset B$ alors $x \notin A$
cela veut dire que $x \in \overline{A}$
Inversement : supposons que $\overline{B} \subset \overline{A}$ et montrons que : $A \subset B$
Pour cela soit $x \in A \Rightarrow x \notin \overline{A}$,comme $\overline{B} \subset \overline{A}$ alors $x \notin \overline{B}$
ce qui donne : $x \in B$
2). $A \cap B = A \cap C \iff A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$
Supposons que : $A \cap B = A \cap C$ et montrons que : $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$
On transforme l'égalité $A \cap B = A \cap C$ par complémentation on obtient :
$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A} \cup \overline{C}$
Composons par intersection avec A : $A \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = A \cap \left(\overline{A} \cup \overline{C}\right)$
Appliquons la distributivité :
$\left(A \cap \overline{A}\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) = \left(A \cap \overline{A}\right) \cup \left(A \cap \overline{C}\right)$ Or $A \cap \overline{A} = \varnothing$
Par suite : $\left(A \cap \overline{B}\right) = \left(A \cap \overline{C}\right)$
Inversement : Supposons que : $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$ et montrons que :
$A \cap B = A \cap C$
On transforme l'égalité $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$ par complémentation on obtient :
$\overline{A} \cup B = \overline{A} \cup C$
Composons par intersection avec A : $A \cap \left(\overline{A} \cup B\right) = A \cap \left(\overline{A} \cup C\right)$
Appliquons la distributivité :
$\left(A \cap \overline{A}\right) \cup (A \cap B) = \left(A \cap \overline{A}\right) \cup (A \cap C)$ Or $A \cap \overline{A} = \varnothing$
Par suite :$(A \cap B) = (A \cap C)$
3). **Comparons** $B_1 = A \cap (B \cup C)$ Avec $B_2 = (A \cap B) \cup C$
On a : $B_1 = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ Or : $(A \cap C) \subset C$
Par suite : $B_1 = A \cap (B \cup C) \subset B_2 = (A \cap B) \cup C$
4) $\rightarrow$**Simplifions** : $B_3 = A \cap \left(\overline{A} \cup B\right) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B} \cup C\right) =$
$\left(A \cap \overline{A}\right) \cup (A \cap B) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B} \cup C\right) = (A \cap B) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B} \cup C\right) =$
$(A \cap B) \cap \left(\overline{A \cap B} \cup C\right) = (A \cap B) \cap \left(\overline{A \cap B}\right) \cup (A \cap B \cap C)$
Or : $(A \cap B) \cap \left(\overline{A \cap B}\right) = \varnothing$ Ainsi : $B_3 = (A \cap B \cap C)$
$\rightarrow$**Simplifions** : $B_4 = A \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right) =$
$\left(A \cup \overline{A}\right) \cap (A \cup B) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right) = (A \cup B) \cup \overline{A} \cap \overline{B} \cap C =$
$(A \cup B) \cup \left(\overline{A \cup B} \cap C\right) = (A \cup B) \cup \left(\overline{A \cup B}\right) \cap (A \cup B \cup C)$
Or : $(A \cup B) \cup \left(\overline{A \cup B}\right) = E$ Ainsi : $B_4 = (A \cup B \cup C)$
Exercice 2

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E.On suppose que :

$A \cap B \neq \emptyset$; $A \cup B \neq E$; $A \nsubseteq B$; $B \nsubseteq A$
Calculer :

1. $(A \cap B) \cap \left(A \cap \overline{B}\right)$
2. $\left(A \cap \overline{B}\right) \cap \left(\overline{A} \cap B\right)$
3. $\left(\overline{A} \cap B\right) \cap \left(\overline{A \cup B}\right)$
4. $(A \cap B) \cap \left(\overline{A \cup B}\right)$
5. $(A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(\overline{A \cup B}\right)$

Solution 2

1.$(A \cap B) \cap \left(A \cap \overline{B}\right) = A \cap B \cap \overline{B} = A \cap \emptyset = \emptyset$
2. $\left(A \cap \overline{B}\right) \cap \left(\overline{A} \cap B\right) = A \cap \overline{B} \cap \overline{A} \cap B = A \cap \overline{A} \cap B \cap \overline{B} = \emptyset$
3. $\left(\overline{A} \cap B\right) \cap \left(\overline{A \cup B}\right) = \left(\overline{A} \cap B\right) \cap \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \overline{A} \cap B \cap \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B \cap \overline{B} = \overline{A} \cap \emptyset = \emptyset$
4. $(A \cap B) \cap \left(\overline{A \cup B}\right) = (A \cap B) \cap \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = A \cap B \cap \overline{A} \cap \overline{B} = A \cap \overline{A} \cap B \cap \overline{B} = \emptyset$
5. $(A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(\overline{A \cup B}\right)$
$= (A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$
$= \left((A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)\right) \cup \left(\left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)\right)$
$= \left(A \cap \left(B \cup \overline{B}\right)\right) \cup \left(\overline{A} \cap \left(B \cup \overline{B}\right)\right)$
$= (A \cap E) \cup \left(\overline{A} \cap E\right) = A \cup \overline{A} = E$

2.2 Applications

Exercice 3

1. Soit f l' applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

.L'application f est-elle injective ? surjective ?

2. Soit l'application f définie par

$$f(x) = \frac{x + 2}{2x - 3}$$

.Déterminer $f \circ f$, f^{-1}et $(f \circ f)^{-1}$ainsi que leurs domaine de définition .

3. Soit l′application f définie par
$$f\ (x) = \frac{1}{x}$$
Déterminer $f \circ f$ et $f^{\ -1}$.
4. Déterminer $g \circ h$ et hog pour les applications définies de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$ par :

$h\ (x) = \sqrt{x}$ et $g\ (x) = x^2$

Solution 3

1) Soit f l' applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f\ (x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

L'application f n'est pas injective car :

$f\,(2) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$ et $2 \neq \frac{1}{2}$

L'application f n'est pas surjective car :

Pour $y = 2$, $f\,(x) = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

2) Soit l′application f définie par $f\ (x) = \dfrac{x+2}{2x-3}$.

Déterminons $f \circ f$, $f^{\ -1}$et $(f \circ f)^{-1}$ainsi que leurs domaine de définition .

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$

$$f \circ f\ (x) = f\,(f\,(x)) = \frac{\left(\dfrac{x+2}{2x-3}\right)+2}{2\left(\dfrac{x+2}{2x-3}\right)-3} = \frac{5x-4}{-4x+13}$$

Domaine de définition de $f \circ f$ est : $\mathrm{D}_{fof} = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right\}$

→Calculons : $f^{\ -1}\,(x)$

Pour cela montrons que f est bijective.

ie : $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}\ x\ unique\ /\ y = f\,(x)$

Posons $f\ (x) = \dfrac{x+2}{2x-3} = y \Rightarrow x = \dfrac{3y+2}{2y-1}$ avec $y \neq \frac{1}{2}$

Par suite : $f^{\ -1}\,(x) = \dfrac{3x+2}{2x-1}$ et le domaine de définition de $f^{\ -1}$est :$\mathrm{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

→Calculons : $(f \circ f)^{-1}\,(x)$

Pour cela : Posons $f \circ f\ (x) = \dfrac{5x-4}{-4x+13} = y \Rightarrow x = \dfrac{13y+4}{4y+5}$

Par suite :$(f \circ f)^{-1}\,(x) = \dfrac{13x+4}{4x+5}$ et le domaine de définition de $(f \circ f)^{-1}$est : $\mathrm{D}_{(f \circ f)^{-1}} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right\}$

3) Soit l′application f définie par $f\ (x) = \dfrac{1}{x}$

Déterminons $f \circ f$ et $f^{\ -1}$.

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}^*$

$$f \circ f\ (x) = f\,(f\,(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

fof est l'application identitée notée par : $id_{\mathbb{R}^*}$

Domaine de définition de $f \circ f$ et : $\mathrm{D}_{fof} = \mathbb{R}^*$

Calculons : $f^{-1}(x)$

Pour cela : Posons $f(x) = \dfrac{1}{x} = y \Rightarrow x = \dfrac{1}{y}$

Par suite : $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} = f(x)$ et le domaine de définition de f^{-1}est :

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^*$

4) Déterminons $g \circ h$ et hog pour les applications définies de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$ par :

$h(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$

$g \circ h(x) = g(h(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$

$hog(x) = h(g(x)) = \sqrt{(x^2)} = |x| = x$ car $x \in \mathbb{R}_+^*$

Ainsi : $g \circ h = hog = id_{\mathbb{R}_+^*}$

Exercice 4

Soit f l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si} & x < 0 \\ 1 + x, \text{ si} & x \geq 0 \end{cases}$$

Déterminer $f(\mathbb{R}), f^{-1}(\{1\}), f^{-1}([1,2]), f^{-1}(\{-1\})$. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

Solution 4

Soit f l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si} & x < 0 \\ 1 + x, \text{ si} & x \geq 0 \end{cases}$$

Déterminons $f(\mathbb{R}), f^{-1}(\{1\}), f^{-1}([1,2]), f^{-1}(\{-1\})$. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

$\rightarrow f(\mathbb{R}) = \{f(x)/x \in \mathbb{R}\} = \left\{f(x)/x \in \mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+\right\} = \{1\} \cup [1, +\infty[$
$= [1, +\infty[$

$\rightarrow f^{-1}(\{1\}) = \{x / f(x) \in \{1\}\} = \{x / f(x) = 1\} =]-\infty, 0[\cup \{0\}$
$=]-\infty, 0]$

$\rightarrow f^{-1}(\{-1\}) = \{x / f(x) \in \{-1\}\} = \{x / f(x) = -1\} = \varnothing$

$\rightarrow f^{-1}([1,2]) = \{x / f(x) \in [1,2]\} = \{x / f(x) = 1 \text{ ou bien } f(x) \in]1,2]\}$
$=]-\infty, 0] \cup \{x / f(x) \in]1,2]\}$

On a $f(x) \in]1,2]$ cela veut dire que : $1 \prec f(x) \leq 2 \Rightarrow 1 \prec 1 + x \leq 2 \Rightarrow 0 \prec x \leq 1$

Ainsi : $f^{-1}([1,2]) =]-\infty, 0] \cup \{x / f(x) \in]1,2]\} =]-\infty, 0] \cup]0,1] =]-\infty, 1]$

$\mapsto f$ est injective si et seulement si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

On a : $f(-2) = f(-3) = 1$ or $-2 \neq -3 \Rightarrow f$ n'est pas injective.

$\mapsto f$ est surjective si et seulement si $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}\ /\ f(x) = y$

Pour $y = -1$ on a $f^{-1}(\{-1\}) = \varnothing$ cela veut dire que $f(x) = -1$ n'a pas de solution$\Rightarrow f$ n'est pas surjective.

Chapitre 3

Relations d'Equivalences et Relations d'Ordre

3.1 Relations d'Equivalence

Exercice 5

1)- Dans l'ensemble $\mathbb{R}$,on définit la relation $\Re$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\Re y \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$$

Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.

2)- Meme question pour la relation binaire $\Re$ sur $\mathbb{R}$définit par

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\Re y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.

Quelle est la classe d'équivalence d'un nombre x de $\mathbb{R}$.

3)-Soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.On définit la relation binaire $*$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x * y \Leftrightarrow f\ (x) = f\ (y)$$

Montrer que $*$ est une relation d'équivalence. Quelle est la classe d'équivalence d'un nombre x tel que $f\ (x) = x^2 - x + 2$

Solution 5

1)- Dans l'ensemble $\mathbb{R}$,on définit la relation $\Re$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\Re y \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$$

Montrons que $\Re$ est une relation d'équivalence.

En effet :

$\rightarrow \Re$ est réfléxive car $\forall x \in \mathbb{R} : \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow x \Re x$
$\rightarrow \Re$ est symétrique si est seulement si $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \Re y \Rightarrow y \Re x$
$x \Re y \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$
De plus : $\forall x \in \mathbb{R} : \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\forall y \in \mathbb{R} : \cos^2 y + \sin^2 y = 1$
En sommant on aura : $\cos^2 x + \sin^2 y + \cos^2 y + \sin^2 x = 2$
Sachant que : $\cos^2 x + \sin^2 y = 1$ alors : $\cos^2 y + \sin^2 x = 1$ cela veut dire que : $y \Re x$
d'ou la symétrique de $\mathbb{R}$.
$\rightarrow \Re$ est transitive si est seulement si $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \Re y$ et $y \Re z \Rightarrow x \Re z$

$$\begin{cases} x \Re y \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1 \text{et} \\ y \Re z \Leftrightarrow \cos^2 y + \sin^2 z = 1 \end{cases}$$

En sommant on trouve : $\cos^2 x + \sin^2 y + \cos^2 y + \sin^2 z = 2$
Or : $\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \forall y \in \mathbb{R}$
D'ou : $\cos^2 x + \sin^2 z = 1$ cela veut dire que : $x \Re z$.
Il s'ensuit que $\Re$ est une relation d'équivalence.

2)- Meme question pour la relation binaire $\Re$ sur $\mathbb{R}$définit par

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \Re y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

Montrons que $\Re$ est une relation d'équivalence.
En effet :
$\rightarrow \Re$ est réfléxive car $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - x^2 = 0 = x - x \Leftrightarrow x \Re x$
$\rightarrow \Re$ est symétrique si est seulement si $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \Re y \Rightarrow y \Re x$
$x \Re y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y \Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y$
Or l'égalité est commutative, cela veut dire :
$y^2 - y = x^2 - x \Leftrightarrow y^2 - x^2 = y - x \Rightarrow y \Re x$
$\rightarrow \Re$ est transitive si est seulement si $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \Re y$ et $y \Re z \Rightarrow x \Re z$

On a : $\begin{cases} x \Re y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y \Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y \quad \text{et} \\ y \Re z \Leftrightarrow y^2 - z^2 = y - z \Leftrightarrow y^2 - y = z^2 - z \end{cases}$

Or : $x^2 - x = y^2 - y = z^2 - z \Rightarrow x^2 - x = z^2 - z \Leftrightarrow x^2 - z^2 = x - z \Leftrightarrow x \Re z$

Il s'ensuit que $\Re$ est une relation d'équivalence.
$\rightarrow$Classe d'équivalence d'un nombre x de $\mathbb{R}$.
$\dot{x} = \{y \in \mathbb{R} / x \Re y\} = \left\{y \in \mathbb{R} / x^2 - y^2 = x - y\right\} = \left\{y \in \mathbb{R} / x^2 - y^2 - (x - y) = 0\right\} = \{y \in \mathbb{R} / (x - y)(x + y - 1) = 0\} = \{x, 1 - x\}$
3)Soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.On définit la relation binaire $*$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x * y \Leftrightarrow f\ (x) = f\ (y)$$

Montrons que $(*)$ est une relation d'équivalence , en effet :
$\rightarrow$ $(*)$ est réflexive ssi $\forall x \in \mathbb{R} : x * x$ cela veut dire $f\ (x) = f\ (x)$ c'est évident .
$\rightarrow$ $(*)$ est symétrique ssi $\forall x, y \in \mathbb{R}\ x * y \implies y * x$
$x * y \Leftrightarrow f\ (x) = f\ (y) \Leftrightarrow f\ (y) = f\ (x)$ cela veut dire $y * x$
$\rightarrow$ $(*)$ est transitive ssi $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$; $x * y$ cela veut dire $y * z \implies x * z$

On a : $\begin{cases} x*y \Leftrightarrow f\ (x) = f\ (y) \\ y*z \Leftrightarrow f\ (y) = f\ (z) \end{cases} \Longrightarrow f\ (x) = f\ (z)$ cela veut dire $x*z$

Par suite : $(*)$ est une relation d'équivalence

$\rightarrow$La classe d'equivalence d'un nombre x tel que $f\ (x) = x^2 - x + 2$ est :

$\dot{x} = \{y \in \mathbb{R}\ /\ x*y\} = \{y \in \mathbb{R}\ /\ f\ (x) = f\ (y)\}$

$= \left\{y \in \mathbb{R}\ /\ x^2 - x + 2 = y^2 - y + 2\right\}$

$= \left\{y \in \mathbb{R}\ /\ y^2 - x^2 - y + x = 0\right\}$

$= \left\{y \in \mathbb{R}\ /\ \left(y^2 - x^2\right) - (y - x) = 0\right\}$

$= \{y \in \mathbb{R}\ /\ (y - x)(y + x - 1) = 0\}$

$= \{y \in \mathbb{R}\ /\ (y - x) = 0$ ou bien $(y + x - 1) = 0\}$

$= \{y \in \mathbb{R}\ /\ y = x$ ou bien $y = 1 - x\}$

$= \{x\ \ , 1 - x\}$

3.2 Relations d'Ordre

Exercice 6

1)-Dans l'ensemble $\mathbb{Z}^*$,on définit la relation δ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^* : x\delta y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*; y + 1 = n\ (x + 1)$$

Montrer que δ est une relation d'ordre.

2)- On munit $\mathbb{R}^2$de la relation notée $\prec$ définie par :

$$(x, y) \prec (x', y') \Leftrightarrow x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y'$$

Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$. L'ordre est-il total ?

Solution 6

Montrons que δ est une relation d'ordre.

En effet :

$\rightarrow \delta$ est réfléxive si est seulement si :$\forall x \in \mathbb{Z}^* : x\delta x$

$\exists n = 1 \in \mathbb{N}^*; x + 1 = n\ (x + 1)$ cela veut dire que $x\delta x$

$\rightarrow \delta$ est antisymétrique si est seulement si $\forall x, y \in \mathbb{Z}^* : x\delta y$ et $y\delta x \Rightarrow x = y$

$\begin{cases} x\delta y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*; y + 1 = n\,(x + 1) \ldots (1) \text{ et} \\ y\delta x \Leftrightarrow \exists n' \in \mathbb{N}^*; x + 1 = n'\,(y + 1) \ldots (2) \end{cases}$

Remplaçons l'équation (1) dans l'équation (2) on trouve :

$\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists n' \in \mathbb{N}^* /\ x + 1 = n'n\ (x + 1)$

Si $x \neq -1$ alors :$n'n = 1 \Rightarrow n = n'$ car $n, n' \in \mathbb{N}^*$et donc $x = y$

Si $x = -1$ remplaçons dans l'équation (1) on trouve $y = -1$,cela veut dire que $x = y$

dans tous les cas δ est antisymétrique.

$\rightarrow \delta$ est transitive si est seulement si $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}^* : x\delta y$ et $y\delta z \Rightarrow x\delta z$

$\begin{cases} x\delta y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*; y + 1 = n\,(x + 1) \ldots (1) \text{ et} \\ y\delta z \Leftrightarrow \exists n' \in \mathbb{N}^*; z + 1 = n'\,(y + 1) \ldots (2) \end{cases}$

Remplaçons l'équation (1) dans l'équation (2) on trouve :
$\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists n' \in \mathbb{N}^* / z+1 = n'\ n\ (x+1)$
$\exists n" = n'n \in \mathbb{N}^* / z+1 = n"\ (x+1) \Leftrightarrow x\delta z$
Il s'ensuit que δ est une relation d'ordre.
2)- On munit $\mathbb{R}^2$de la relation notée $\prec$ définie par :

$$\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2 / (x,y) \prec (x',y') \Leftrightarrow x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y'$$

Montrons que $\prec$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.
En effet :
$\rightarrow$ $\prec$ est réfléxive si est seulement si :$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \prec (x,y)$
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $x \leqslant x$ et $y \leqslant y$ cela veut dire que : $(x,y) \prec (x,y)$
$\rightarrow$ $\prec$ est antisymétrique si est seulement si
$\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \prec (x',y')$ et $(x',y') \prec (x,y) \Rightarrow (x,y) = (x',y')$
$\begin{cases} (x,y) \prec (x',y') \Leftrightarrow x \leqslant x' \ et\ y \leqslant y' \\ (x',y') \prec (x,y) \Leftrightarrow x' \leqslant x \ et\ y' \leqslant y \end{cases}$
On a à la fois $x \leqslant x'$ et $x' \leqslant x$ cela veut dire que: $x = x'$
De meme : $y \leqslant y'$et $y' \leqslant y$ cela veut dire que : $y = y'$
Ainsi : $(x,y) = (x',y')$ d'ou $\prec$ est antisymétrique .
$\prec$ est transitive si est seulement si
$\forall (x,y), (x',y'), (x",y") \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \prec (x',y')$ et $(x',y') \prec (x",y") \Rightarrow (x,y) \prec \left(x",y"\right)$

On a : $\left.\begin{array}{c} (x,y) \prec (x',y') \Leftrightarrow x \leqslant x' et\ y \leqslant y' \\ et \\ (x',y') \prec (x",y") \Leftrightarrow x' \leqslant x" et\ y' \leqslant y" \end{array}\right\} \Rightarrow x \leqslant x"\ et\ y \leqslant y"$

cela veut dire que: $(x,y) \prec \left(x",y"\right)$
Il s'ensuit que $\prec$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.
L'ordre n'est pas total car : on ne peut pas comparer $(0,1)$ et $(1,0)$.

Chapitre 4

Structure algébrique

Exercice 7

On défint sur $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ la loi $(*)$ comme suit :

$x* \, y=3xy+x+y$

1)Montrer que $*$ est une loi interne .

2)Montrer que $\left(\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\},*\right)$ est un groupe abélien .

Solution 7

$\left(\mathbb{R}_{+}^{*},*\right)$est -il un groupe commutatif ?

$x*y=3xy+x+y \quad \forall x,y\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{-1}{3}\right\}$

1) $*$ est une loi interne en effet :$\forall x,y\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{-1}{3}\right\}$; $x*y\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{-1}{3}\right\}$?

Supposons que $\forall x,y\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{-1}{3}\right\}$;$x*y\notin\mathbb{R}-\left\{\dfrac{-1}{3}\right\}$cela veut dire que :

$3xy+x+y=\dfrac{-1}{3}\Rightarrow 9xy+3x+3y+1=0\Rightarrow(3x+1)(3y+1)=0\Rightarrow$

$\begin{cases}(3x+1)=0 \text{ ou bien}\\ (3y+1)=0\end{cases}$

cela veut dire : $x=\dfrac{-1}{3}$ *ou bien* $y=\dfrac{-1}{3}$ contradiction

d'ou $x*y\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{-1}{3}\right\}$.

2)$\left(\mathbb{R}-\left\{\dfrac{-1}{3}\right\},*\right)$ *est un groupe abélien en effet :*

a) $*$ est commutative ssi $\forall x,y\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{-1}{3}\right\} \qquad x*y=y*x$

$x*y=3xy+x+y=3yx+y+x=y*x$

b) $*$ est associative ssi $\forall x,y,z\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{-1}{3}\right\} \qquad (x*y)*z=x*(y*z)$

$(x*y)*z=3(x*y)z+(x*y)+z=3(3xy+x+y)z+(3xy+x+y)+z$

$= 9xyz + 3xz + 3yz + 3xy + x + y + z = 3x\,(3yz + y + z) + x + (3yz + y + z)$
$= 3x\ (y * z) + x + (y * z) = x * (y * z)$ ce qu'il fallait démontrer .

c) Existence de l'élement neutre : $\exists\ e \in \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{3}\right\}$ / $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{3}\right\}$ $x * e = e * x = x$

$*$ est commutative par suite on va résoudre une seule équation .

Soit $x * e = x \Longrightarrow 3xe + x + e = x \Longrightarrow (3x + 1)\, e = 0 \Longrightarrow e = 0$ car $x \neq \frac{-1}{3}$ et $0 \in \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{3}\right\}$

d) Existence de l'élement symétrique :$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{3}\right\}$ $\exists\ x^{'} \in \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{3}\right\}$ / $x * x^{'} = x^{'} * x = e = 0$

$*$ est commutative par suite on va résoudre une seule équation .

Soit $x*x^{'} = 0 \Longrightarrow 3xx^{'} + x + x^{'} = 0 \Longrightarrow (3x + 1)\, x^{'} = -x \Longrightarrow x^{'} = \frac{-x}{(3x+1)}$ car $x \neq \frac{-1}{3}$

On a :$\frac{-x}{(3x+1)} \neq \frac{-1}{3}$ car si $\frac{-x}{(3x+1)} = \frac{-1}{3}$ on aura :$-1 = 0$ absurde

ainsi $x^{'} = \frac{-x}{(3x+1)} \in \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{3}\right\}$

d'aprés a) b) c) et d) $\left(\mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{3}\right\}, *\right)$ *est un groupe abélien*

Exercice 8

On défint sur $]-1, 1[$ la loi $(*)$ comme suit :

$$x * y = \frac{x+y}{1+xy}$$

1)Montrer que $*$ est une loi interne .

2)Montrer que $(]-1, 1[\,, *)$ est un groupe abélien .

Solution 8

On défint sur $]-1, 1[$ la loi $(*)$ comme suit :

$$x * y = \frac{x+y}{1+xy}$$

1)Montrons que $*$ est une **loi interne** .

$\forall x, y \in\,]-1, 1[\ \Rightarrow x * y \in\,]-1, 1[$

1^{er}*cas : si* $0 \prec x \prec 1$ *et* $0 \prec y \prec 1$ *alors* : $(x - 1)\,(y - 1) \succ 0 \Rightarrow xy - x - y + 1 \succ 0 \Rightarrow xy + 1 \succ x + y \Rightarrow \frac{x+y}{1+xy} \prec 1$ cela veut dire que $x * y \prec 1$

$2^{ème}$*cas : si* $-1 \prec x \prec 0$ *et* $-1 \prec y \prec 0$ *alors* : $(x + 1)\,(y + 1) \succ 0 \Rightarrow xy + x + y + 1 \succ 0 \Rightarrow xy + 1 \succ -(x + y) \Rightarrow \frac{x+y}{1+xy} \succ -1$ cela veut dire que $x * y \succ -1$

2)Montrer que $(]-1, 1[\,, *)$ est un groupe abélien . *en effet :*

a) $*$ est c**ommutative** ssi $\forall x, y \in\,]-1, 1[\quad x * y = y * x$

$x * y = \frac{x+y}{1+xy} = \frac{y+x}{1+yx} = y * x$

b) $*$ est **associative** ssi $\forall x,y,z \in]-1,1[\quad (x*y)*z = x*(y*z)$

$$(x*y)*z = \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)*z = \frac{\dfrac{x+y}{1+xy}+z}{1+\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)z} = \frac{\dfrac{x+y+z+xyz}{1+yx}}{\dfrac{1+xy+xz+yz}{1+yx}} =$$

$\dfrac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$......... (1)

$$x*(y*z) = x* \frac{y+z}{1+yz} = \frac{x+\dfrac{y+z}{1+yz}}{1+x\left(\dfrac{y+z}{1+yz}\right)} = \frac{\dfrac{x+xyz+y+z}{1+yz}}{\dfrac{1+yz+xy+xz}{1+yz}} =$$

$\dfrac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$........... (2)

(1)=(2) ce qu'il fallait démontrer .

c) **Existence de l'élement neutre** : $\exists\ e \in]-1,1[\ /\ \forall x \in]-1,1[\ x*e = e*x = x$

$*$ est commutative par suite on va résoudre une seule équation .

Soit $x*e = x \Longrightarrow \dfrac{x+e}{1+xe} = x \Longrightarrow x+e = x+x^2e \Longrightarrow \left(x^2-1\right)e = 0$ or $x \neq 1$ et $x \neq -1$ cela veut dire que $e = 0 \in]-1,1[$

d) **Existence de l'élement symétrique** :$\forall x \in]-1,1[\ \exists\ x^{'} \in]-1,1[/$ $x*x^{'} = x^{'}*x = e = 0$

$*$ est commutative par suite on va résoudre une seule équation .

Soit $x*x^{'} = 0 \Longrightarrow \dfrac{x+x'}{1+xx'} = 0 \Longrightarrow x+x^{'} = 0$ car $xx' \neq -1 \Longrightarrow x^{'} = -x \in]-1,1[$

Exercice 9

On définit sur $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ la loi interne $(*)$ comme suit :

$$\forall\ (x,y),(x',y')\ \in G \qquad (x,y)*(x',y') = (xx', xy'+y)$$

Montrer que $(G,*)$ est un groupe non abélien .

Solution 9

Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

$\forall\ (x,y),(x',y')\ \in G\ \ ; (x,y)*(x',y') = (xx', xy'+y)$

Montreons que $(G,*)$ est un groupe non abélien ; en effet :

a) $(*)$ **est associative** ssi $\forall (x,y),(x',y')\ ,(x",y") \in G$

$((x,y)*(x',y'))*(x",y") = (x,y)*((x',y')*(x",y"))$

On a :

$((x,y)*(x',y'))*(x",y") = (xx', xy'+y)*(x",y") = (xx'x", xx'y"+xy'+y)$ .... (1)

Et :

$(x,y)*((x',y')*(x",y")) = (x,y)*(x'x", x'y"+y') = xx'x", x(x'y"+y') = (xx'x", xx'y"+xy'+y)$ .... (2)

(1) = (2) ie : $*$ est associative

b) $(e,e') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ **est l'élément neutre de** $*$ ssi

$(e,e')*(x,y)=(x,y)*(e,e')=(x,y\ )\,;\ \ \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

Soit : $(x,y)*(e,e')=(x,y\ )\Leftrightarrow(xe,xe'+y)=(x,y\ )$

$\Longleftrightarrow\begin{cases} xe=x \\ xe'+y=y\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases} e=1 \text{ car } x\neq0 \\ e'=0 \text{ car } x\neq0\end{cases}$

Soit maintenant : $(e,e')*(x,y)=(x,y\ )\Leftrightarrow(ex,ey+e')=(x,y\ )$

$\Longleftrightarrow\begin{cases} ex=x \\ ey+e'=y\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases} e=1 \text{ car } x\neq0 \\ e'=0\end{cases}$

Par suite :$(e,e')=(1,0)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ est l'élément neutre de $*$.

c) **Existence de l'élément inverse.**

$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\exists\,(x',y')\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\ /$

$(x,y)*(x',y')=(x',y')*(x,y)=(e,e')=(1,0)$

Soit : $(x,y)*(x',y')=(1,0)\Leftrightarrow(xx',xy'+y)=(1,0)$

$\Longleftrightarrow\begin{cases} xx'=1 \\ xy'+y=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases} x'=\dfrac{1}{x} \text{ car } x\neq0 \\ y'=\dfrac{-y}{x}= \text{car } x\neq0\end{cases}$

Soit maintenant : $(x',y')*(x,y)=(e,e')=(1,0)\Leftrightarrow(x'x,x'y+y')=(1,0)$

$\Longleftrightarrow\begin{cases} x'x=1 \\ x'y+y'=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases} x'=\dfrac{1}{x} \text{ car } x\neq0 \\ y'=-x'y=\dfrac{-y}{x}\text{car } x\neq0\end{cases}$

D'ou : l'inverse de (x,y) est $\left(\dfrac{1}{x}\ ,\dfrac{-y}{x}\right)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

Il s'ensuit que $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},*)$ est un groupe .

d) $(*)$ **est commutatif** ssi $\forall\,(x,y)\,,(x',y')\ \in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

$(x,y)*(x',y')=(x',y')*(x,y)$

Prenons : $(x,y)=(1,2)$ et $(x',y')=(2,0)$

On a :$(1,2)*(2,0)=(2,2)$ et $(2,0)*(1,2)=(2,4)$

$(1,2)*(2,0)\neq\ (2,0)*(1,2)$

$(*)$ **n'est pas commutatif**

Il s'ensuit que $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},*)$ est un groupe non abélien .

Exercice 10

sur$\left(\mathbb{Z}^2,+\right)$,on défint une loi interne $*$ par :

$$(x_1,x_2)*(y_1,y_2)=(x_1y_1+x_2y_2,x_1y_2+x_2y_1)$$

L'ensemble $\left(\mathbb{Z}^2,+,*\right)$ est-il un anneau commutatif ?

Solution 10

L'ensemble $\left(\mathbb{Z}^2,+,*\right)$ est un anneau commutatif ssi

i) $\left(\mathbb{Z}^2,+\right)$ groupe abélien (facile à vérifier)

2i) $(*)$distributive par rapport à $(+)$

3i) $(*)$ associative

4i) $(*)$ commutative (facile à vérifier)

2i) $(*)$**distributive** par rapport à $(+)$ en effet :

$\forall\ (x_1,x_2)\,,(y_1,y_2)\ \,,(z_1,z_2)\in\mathbb{Z}^2$;

$(x_1,x_2)*[(y_1,y_2)\ +(z_1,z_2)]=[(x_1,x_2)*(y_1,y_2)]+[(x_1,x_2)*(z_1,z_2)]$

On a : $(x_1,x_2)*[(y_1,y_2)\ +(z_1,z_2)]=\ (x_1,x_2)*(y_1+z_1,y_2+z_2)$

$= (x_1 (y_1 + z_1) + x_2 (y_2 + z_2), x_1 (y_2 + z_2) + x_2 (y_1 + z_1))$
$= (x_1y_1 + x_1z_1 + x_2y_2 + x_2z_2, x_1y_2 + x_1z_2 + x_2y_1 + x_2z_1)$
$= (x_1y_1 + x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1z_1 + x_2z_2, x_1z_2 + x_2z_1)$
$= \; [(x_1, x_2) * (y_1, y_2)] \; + [(x_1, x_2) * (z_1, z_2)]$ CQFD

3i) $(*)$ **associative** ssi $\forall \; (x_1, x_2), (y_1, y_2) \; , (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$; on a :
$(x_1, x_2) * [(y_1, y_2) \; * (z_1, z_2)] = [(x_1, x_2) * (y_1, y_2) \;] * (z_1, z_2)$
En effet :
$(x_1, x_2) * [(y_1, y_2) \; * (z_1, z_2)] = (x_1, x_2) * (y_1z_1 + y_2z_2, y_1z_2 + y_2z_1)$
$=(x_1 (y_1z_1 + y_2z_2) + x_2 (y_1z_2 + y_2z_1), x_1 (y_1z_2 + y_2z_1) + x_2 (y_1z_1 + y_2z_2))$
$=(x_1y_1z_1 + x_1y_2z_2 + x_2y_1z_2 + x_2y_2z_1, x_1y_1z_2 + x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1 + x_2y_2z_2)$
$=(x_1y_1z_1 + x_2y_2z_1 + x_1y_2z_2 + x_2y_1z_2, x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_1y_1z_2)$
$=([x_1y_1 + x_2y_2] z_1 + [x_1y_2 + x_2y_1] z_2, [x_2y_2 + x_1y_1] z_2 + [x_1y_2 + x_2y_1] z_1)$
$=(x_1y_1 + x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1) * (z_1, z_2)$
$=[(x_1, x_2) * (y_1, y_2) \;] * (z_1, z_2)$ CQFD

Il s'ensuit que :$\left(\mathbb{Z}^2, +, *\right)$ est un anneau commutatif
Exercice 11

On désigne par $(\mathbb{Q}, +, *)$ l'ensemble des rationnels structuré par l'addition usuelle
et $*$ définie par :

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} : \; a *b = a + b - ab$$

L'ensemble $(\mathbb{Q}, +, *)$ est-il un corps commutative ?
Meme question pour l'ensembles suivant :
$\left(\mathbb{R}^2, +, x\right)$ avec :$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall (a', b') \in \mathbb{R}^2$

$$(a., b) + (a.', b') = (a + a', b + b') \text{ et}$$
$$(a., b) (a.', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$$

Solution11
L'ensemble $(\mathbb{Q}, +, *)$ est un corps commutative ssi
i) $(\mathbb{Q}, +)$ groupe abélien (facile à montrer)
2i) $(\mathbb{Q}^*, *)$ groupe abélien
3i) $(*)$distributive par rapport à $(+)$
Montrons 2i) $(\mathbb{Q}^*, *)$ **groupe abélien**
$\rightarrow *$commutative ,en effet :
$\forall a, b \in \mathbb{Q}^* : \; a *b = a + b - ab = b + a - ba = b * a$
$\rightarrow *$**associative**,en effet :
$\forall a, b, c \in \mathbb{Q}^* : \; (a * b) * c = (a + b - ab) * c = a + b - ab + c - (a + b - ab) c = a + b + c - ab - ac - bc + abc... (1)$
$a * (b * c) = a * (b + c - bc) = a + b + c - bc - a (b + c - bc) = a + b + c - bc - ab - ac + abc... (2)$
$(1) = (2)$,par suite $(a * b) * c = a * (b * c)$,d'ou $*$associative
$\rightarrow$ **Existence de l'élement neutre** : $\exists \; e \in \mathbb{Q}^* \; / \; \forall a \in \mathbb{Q}^* / \; a*e = e*a = a$
$*$ est commutative par suite on va résoudre une seule équation .
Soit $a * e = a \Longrightarrow a + e - ae = a \Rightarrow e (1 - a) = 0 \Rightarrow e = 0 \; pour \; a \neq 1$

$\rightarrow$ **Existence de l'élement symétrique** :$\forall a \in \mathbb{Q}^* \ \exists \ x^{'} \in \mathbb{Q}^*/ \ x * x^{'} = x^{'} * x = e = 0$

$*$ est commutative par suite on va résoudre une seule équation .

Soit $a * a^{'} = 0 \Longrightarrow a + a^{'} - aa' = 0$

$$\Longrightarrow (1-a)\, a^{'} = -a \Longrightarrow x^{'} = \frac{a}{(a-1)} \text{ si } a \neq 1$$

$(\mathbb{Q}^*, *)$ n'est pas un groupe abélien , or $(\mathbb{Q} - \{1\}, *)$ est un groupe abélien.

Par suite l'ensemble $(\mathbb{Q}, +, *)$ n'est pas un corps commutative.

Exercice 12 (suplémentaire)

1)Soit $*$la loi definie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x * y = xy + \left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right)$$

a) Verifier que $*$est commutative,non associative, et admet un élément neutre .

b) Résoudre les équations suivantes : $2 * y = 5$; $x * x = 1$

2)Dans l'ensemble E des couples de réels $(a.b)$ tels que $a \neq 0$,une opération , notée $*$ est définie par :

$$(a., b) * (a.', b') = \left(aa', ba' + b'a^2\right)$$

Montrer que l'ensemble $(E, *)$ est un groupe .

3)Soit : $x * \ y = \ln\left(e^{\ x} + e^{\ y}\right)$ sur $\mathbb{R}$

$(\mathbb{R}, *)$est -il un groupe commutatif ?

Pour :$x * \ y = \ln\left(e^{\ x} + e^{\ y} - 1\right)$

Chapitre 5

Limites,continuité et dérivabilité

Exercice 13

Calculer les limites suivantes (sans utilisation de la régle de l'hopital) :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{tg\ x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{1-\cos x}}\right)^m /m \in \mathbb{N}^*$; 6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ *avec* $a \in \mathbb{R}_*^+$;7) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin nx}{\sin mx}$;

8) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}Arc\cos x$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Arctg\left(\frac{x}{1+x}\right)}{x}$;10) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\dfrac{1}{x}}$;11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$;

12) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x^2-\pi^2}$;13) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan g\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$;

Solution 13

Calcul de limites

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\ x\sin\frac{1}{x} = 0$ car : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x} = 0\left(\sin\frac{1}{x}\text{ bornée et }\lim\limits_{x\to 0}x = 0\right)$

2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+e^x} = \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x\left(1+e^{-x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\left(1+e^{-x}\right)} = 1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x} = 0\end{cases}$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x+1} = 0$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{tg\ x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\frac{\sin\ x}{\cos x}} = \lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{1-\cos x}}\right)^m /m \in \mathbb{N}^*$

On a : $\sin 2x{=}2\sin x\cos x = 4\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos x$

Et : $1-\cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{1-\cos x}}\right)^m = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos x}{2\sqrt{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\right)^m = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos x}{\sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}\right)^m$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos x}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}\right)^m = \begin{cases} \left(\sqrt{2}\right)^m \text{ quant } x\to 0^+ \\ \left(-\sqrt{2}\right)^m \text{ quant } x\to 0^- \end{cases}$

6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}} - \dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)$ $\quad$ *(avec* $a\in\mathbb{R}_*^+$*)*

$= \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} - \dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)$

$= \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{(x-a)}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} - \dfrac{1}{\sqrt{x+a}}\right)$

$= \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\left(\sqrt{x-a}\right)^2}{\left(\sqrt{x-a}\right)\left(\sqrt{x+a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} - \dfrac{1}{\sqrt{x+a}}\right)$

$= \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\left(\sqrt{x-a}\right)}{\left(\sqrt{x+a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} - \dfrac{1}{\sqrt{x+a}}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$

7) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin nx}{\sin mx} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin n(y+\pi)}{\sin m(y+\pi)} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin ny\cos n\pi + \cos ny\sin n\pi}{\sin my\cos m\pi + \cos my\sin m\pi}$

$= \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin ny\,(-1)^n}{\sin my\,(-1)^m} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{ny}{my}\dfrac{\dfrac{\sin ny}{ny}(-1)^n}{\dfrac{\sin my}{my}(-1)^m} = \dfrac{n}{m}(-1)^{n-m}$

8) $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}Arc\cos x$

Posons : $\begin{cases} y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y \textit{ et } y\to 0^+ \textit{ quant } x\to 1^- \\ 1-x = 1-\cos y = 2\sin^2\left(\frac{y}{2}\right) \end{cases}$

Par suite : $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}Arc\cos x = \lim\limits_{y\to 0^+}\left(\sqrt{\cos y+1}\right)\dfrac{y}{\sqrt{2\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}} = \lim\limits_{y\to 0^+}\left(\sqrt{\cos y+1}\right)\dfrac{2\frac{y}{2}}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{y}{2}\right)} =$

2

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Arctg\left(\frac{x}{1+x}\right)}{x}$

Posons : $\begin{cases} y = Arctg\left(\frac{x}{1+x}\right) \Leftrightarrow \dfrac{x}{1+x} = \tan y \Rightarrow x = \dfrac{\tan y}{1-\tan y} \\ y\to 0 \textit{ quant } x\to 0 \end{cases}$

Par suite : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Arctg\left(\frac{x}{1+x}\right)}{x} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\dfrac{\tan y}{1-\tan y}} = \lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{y}{\tan y}\right)(1-\tan y) = 1$

10) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\log(1+x)} = e$

11) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt[3]{x})^3-1^3}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt[3]{x}-1)\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1\right)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1\right)}{(\sqrt{x}+1)}=$
$\dfrac{3}{2}$

12) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x^2-\pi^2}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\sin(y+\pi)}{y(y+2\pi)}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{-\sin y}{y(y+2\pi)}=\dfrac{-1}{2\pi}$

13) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan g\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

Posons :$y=x-1\Leftrightarrow x=y+1$ avec $y\to0$ quant $x\to1$

$\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan g\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)=\lim\limits_{y\to0}-y\tan\dfrac{\pi}{2}(y+1)=\lim\limits_{y\to0}-y\tan\left(\dfrac{\pi}{2}y+\dfrac{\pi}{2}\right)$ or
$\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{-1}{\tan\alpha}$

$=\lim\limits_{y\to0}(-y)\dfrac{-1}{tg\left(\frac{\pi}{2}y\right)}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{2}{\dfrac{\pi tg\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{\frac{\pi}{2}y}}=\dfrac{2}{\pi}$

Exercice 14

En utilisant les fonctions équivalentes Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos\ x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{5x}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(tg^2x\right)(1-\cos\ x)}{x^3.\ln(x+1)}$
5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$;6) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\sqrt{1+\frac{1}{x}}$.

Solution 14

Calcul de limite on utilisons les fonctions équivalentes

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos\ x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ x}{\frac{x^2}{2}}=2$

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{2}=0$

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{5x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{5x}=\dfrac{3}{5}$

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(tg^2x\right)(1-\cos\ x)}{x^3.\ln(x+1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\frac{x^2}{2}}{x^3x}=\dfrac{1}{2}$

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2\sin\left(\frac{(m+n)x}{2}\right)\sin\left(\frac{(m-n)x}{2}\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2\left(\frac{(m+n)x}{2}\right)\left(\frac{(m-n)x}{2}\right)}{x^2}=$
$\dfrac{-(m-n)(m+n)}{2}=\dfrac{n^2-m^2}{2}$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to+0}\dfrac{\ln\sqrt{1+y}}{y}=\lim\limits_{y\to+0}\dfrac{\ln(1+y)^{\frac{1}{2}}}{y}=\lim\limits_{y\to+0}\dfrac{\ln(1+y)}{2y}=$
$\lim\limits_{y\to+0}\dfrac{y}{2y}=\dfrac{1}{2}$

Exercice 15

Etudier la continuité et la dérivabilité sur le domaine de définition , puis le prolongement par continuité des fonctions suivantes s'il existe :

1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$;2) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}e^{\frac{1}{x}}$;3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\arccos x$

4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arcsin x}{x} & pour \quad x \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 & pour \quad x = 0 \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si} x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} & \text{si} x \in]0, \pi] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Solution 15

Etude de la continuité et la dérivabilité sur le domaine de définition , puis le prolongement par continuité des fonctions suivantes s'il existe :

1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$

$\rightarrow$ $D_f = \mathbb{R}^*$

$\rightarrow$ f est dérivable sur son domaine de définition car c'est le rapport de fonctions dérivables sur D_f par suite f est continue sur son domaine de définition.

$\rightarrow$ Etudions le prolongement par continuité 0

$$\lim_{x \overset{\prec}{\rightarrow} 0} f(x) = \lim_{x \overset{\prec}{\rightarrow} 0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \overset{\prec}{\rightarrow} 0} \frac{\sin x}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \overset{\succ}{\rightarrow} 0} f(x) = \lim_{x \overset{\succ}{\rightarrow} 0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \overset{\succ}{\rightarrow} 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \overset{\prec}{\rightarrow} 0} f(x) \neq \lim_{x \overset{\succ}{\rightarrow} 0} f(x)$$

Par suite f n'admet pas de prolongement par continuité en 0.

2) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}e^{\frac{1}{x}}$

$\rightarrow$ $D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, 0[\cup]0, +\infty[$

$\rightarrow$ f est dérivable sur son domaine de définition car c'est la composée de fonctions dérivables sur D_f par suite f est continue sur son domaine de définition.

$\rightarrow$ Etudions le prolongement par continuité en -2 et 0

$$\lim_{x \overset{\prec}{\rightarrow} -2} f(x) = \lim_{x \overset{\prec}{\rightarrow} -2} \frac{x^2}{x+2}e^{\frac{1}{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{\succ}{\rightarrow} -2} f(x) = \lim_{x \overset{\succ}{\rightarrow} -2} \frac{x^2}{x+2}e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

f n'admet pas de prolongement par continuité en -2

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{x^2}{x+2} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x^2}{x+2} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ par suite f n'admet pas de prolongement par continuité en 0.

3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \arccos x$

$\rightarrow D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/ -1 \leqslant x \leqslant 1 \ ,\ \dfrac{1+x}{1-x} \geqslant 0 \text{ et } x \neq 1 \right\}$

ie $\quad D_f = [-1, 1[$

$\rightarrow$ f est continue sur $D_f = [-1, 1[$ car c'est la composées de fonctions continues sur $[-1, 1[$.

On a :$1 \notin D_f$, et

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \arccos x = \lim_{x \to 1} \left(\sqrt{1+x}\right) \left(\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}\right)$$

Posons : $y = \arccos x \to 0$ quant $x \to 1$ et on a : $x = \cos y$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{y \to 0} \left(\sqrt{1+\cos y}\right) \left(\frac{y}{\sqrt{1-\cos y}}\right) = \lim_{y \to 0} \left(\sqrt{1+\cos y}\right) \left(\frac{y}{\sqrt{2\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}}\right)$$

$$= \lim_{y \to 0} \left(\sqrt{1+\cos y}\right) \left(\frac{y}{\sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{y}{2}\right)\right|}\right)$$

$$= \lim_{y \to 0} \left(\sqrt{1+\cos y}\right) \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{\frac{y}{2}}{\left|\sin\left(\frac{y}{2}\right)\right|}\right) = 2$$

Ainsi f admet un prolongement par continuité aux points 1 et le prolongement est donner par :

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \arccos x & \text{si} \quad x \in [-1, 1[\\ 2 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

$\rightarrow$ f est dérivable sur $D_f = [-1, 1[$ car c'est la composées de fonctions dérivables sur $[-1, 1[$ et on a :

$$f'(x) = \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \arccos x\right)' = \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)' \arccos x - \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

$$= \left(\frac{\arccos x}{(1-x)^2}\right) \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) - \frac{1}{|1-x|}$$

4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arcsin x}{x} & \textit{pour} \quad x \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 & \textit{pour} \quad x = 0 \end{cases}$

→ f est définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

→ f est dérivable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ car c'est le rapport de deux fonctions dérivables en particulier sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$

Il s'ensuit que f est continue sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$

→Etudions la continuité en $x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = \frac{0}{0}$

utilisons la régle de l'Hopitale

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\arcsin x)'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = 1 = f(0)$$

Par suite / $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$ ie : f est continue en 0

→Etudions la dérivabilité en $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\arcsin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x - x}{x^2} = \frac{0}{0}$$

utilisons la régle de l'Hopitale

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\arcsin x - x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{2x} = \frac{0}{0}$$

utilisons la régle de l'Hopitale une $2^{éme}$ fois

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right)'}{(2x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

D'ou : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 = f'(0)$

Ainsi f est dérivable en 0.par suite f est dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

Et on a :

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x^2} & pour \quad x \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & pour \quad x = 0 \end{cases}$$

5) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si} x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

→ f est définie sur $\mathbb{R}$

→ f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$car c'est le rapport de deux fonctions dérivables en particulier sur $\mathbb{R}^*$

Il s'ensuit que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

→Etudions la continuité en $x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1 = f(0)$

f est continue en 0

→Etudions la dérivabilité en $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(x^2)'} =$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)}{2x}=\dfrac{1}{2}$

f est dérivable en 0 ,par suite f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Et on a :

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2} & pour\quad x\neq 0\\ \dfrac{1}{2} & pour\quad x=0\end{cases}$$

6) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} & \text{si} x\in\,]0,\pi]\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

$\rightarrow$ f est définie sur $[0,\pi]$

$\rightarrow$ f est dérivable sur $]0,\pi]$ car c'est le rapport et la composition de deux fonctions dérivables en particulier sur $]0,\pi]$

Il s'ensuit que f est continue sur $]0,\pi]$

$\rightarrow$Etudions la continuité en $x=0$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}x\frac{x\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=0=f(0)\left(car\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1\ et\lim_{x\to 0}x\sin\tfrac{1}{x}=0\right)$$

f est continue en 0

$\rightarrow$Etudions la dérivabilité en $x=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\sin\tfrac{1}{x}$$ et cette limite n'existe pas.$\left(car\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1\right)$

f n'est pas dérivable en 0

Et on a :

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)\sin x-x^2\cos x\sin\frac{1}{x}}{(\sin x)^2} & pour\quad x\neq 0\\ n'existe\ pas & pour\quad x=0\end{cases}$$

Exercice 16

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1)arcsin$\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$; 2)$\frac{1}{2}\left(\arcsin x-x\sqrt{1-x^2}\right)$; 3)arc cos$\sqrt{x}$; 4)arc tg$\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

5) $\sin(\ln x)$; 6) $\ln\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$; 7)e^{arctgx}; 8) $\cos(\arcsin x)$; 9)$\dfrac{(shx)^2}{e^x}$; 10) $\arctan g\left(\dfrac{2x}{3+x}\right)$

Solution 16

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$1)\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\Rightarrow f_1'(x)=\frac{\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}=\frac{\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{\frac{x^4-2x^2+1}{(1+x^2)^2}}}$$

$$\Rightarrow f_1'(x)=\frac{\frac{-2\left(x^2-1\right)}{(1+x^2)}}{\sqrt{(x^2-1)^2}}=\frac{-2\left(1-x^2\right)}{(1+x^2)(x^2-1)}=\frac{2}{(x^2+1)}$$

2)$\frac{1}{2}\left(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}\right) \Rightarrow f\,'_2(x) = \frac{1}{2}\left(\left(\arcsin x\right)' - \left(x\sqrt{1-x^2}\right)'\right)$

$\Rightarrow f\,'_2(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}\right) =$
$\frac{1}{2}\left(\frac{1+x^2-1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

3)$\text{arc }\cos\sqrt{x} \;\Rightarrow f\,'_3(x) = \frac{-\left(\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{1-x}} = \frac{-\frac{1}{2\left(\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{1-x}} = \frac{-1}{2\left(\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x}\right)}$

4)$\text{arc tg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Rightarrow f\,'_4(x) = \frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} = \frac{\left(\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}\right)}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} = \frac{-2}{1+2x+x^2+1-2x+x^2} =$
$\frac{-2}{2+2x^2} = \frac{-1}{1+x^2}$

5) $\sin(\ln x) \Rightarrow f\,'_5(x) = \frac{1}{x}\cos(\ln x)$

6) $\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f\,'_6(x) = \frac{1}{x^2}\tan g\frac{1}{x}$

7)$e^{arctgx} \Rightarrow f\,'_7(x) = (arctgx)'\,e^{arctgx} = \frac{e^{arctgx}}{1+x^2}$

8) $\cos(\arcsin x) \Rightarrow f\,'_8(x) = -\left(\arcsin x\right)'\sin(\arcsin x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

9)$\frac{(shx)^2}{e^x} \Rightarrow f\,'_9(x) = \frac{2shx\ chx - (shx)^2}{e^x}$

10) $\arctan g\left(\frac{2x}{3+x}\right) \Rightarrow f\,'_{10}(x) = \frac{\left(\frac{2x}{3+x}\right)'}{1+\left(\frac{2x}{3+x}\right)^2} = \frac{6}{5x^2+6x+9}$

Exercice 17

Calculer les dérivées nième des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = (1+x)^\alpha$; Pour$\alpha = -1$, $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$

2) $f_2(x) = \ln(1+x)$;3) $f_3(x) = (x+1)^3 e^{-x}$

Solution 17

Calcule des dérivées nième des fonctions

1) $f_1(x) = (1+x)^\alpha \Longrightarrow f\,'_1(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow f\,''_1(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$

$\Rightarrow f_1^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ ....(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

→On montre par récurrence que la dérivée nième trouvée est vraie.

Pour cela ,on suppose que $f_1^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ ....(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ et on montre que la relation est vraie à l'ordre n+1

C'est à dire : $f_1^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ ....(\alpha-(n+1)+1)(1+x)^{\alpha-(n+1)}$

On a :$f_1^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ ....(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \Rightarrow f_1^{(n+1)}(x) =$
$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ ....(\alpha-n+1)(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}$ CQFD

→Pour $\alpha = -1 \Rightarrow$

$f_1(x)=\dfrac{1}{1+x}\Rightarrow f_1^{(n)}(x)=(-1)(-2)(-3)......(-n)(1+x)^{-1-n}=(-1)^n$
$n!\,(1+x)^{-1-n}$

$\rightarrow$Pour $\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow$

$f_1(x)=\sqrt{1+x}\Rightarrow f_1^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)...\left(\frac{1}{2}-n+1\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-n}=$
$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)......\left(\frac{3}{2}-n\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-n}$

$=\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n}\right)1.3.5.7....(2n-3)(1+x)^{\frac{1}{2}-n}\quad\forall n\geq 2$

$\rightarrow$Pour $\alpha=-\frac{1}{2}\Rightarrow$

$f_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\Rightarrow f_1^{(n)}(x)=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right).....\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)(1+x)^{-\frac{1}{2}-n}$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)..........\left(\frac{1}{2}-n\right)(1+x)^{-\frac{1}{2}-n}$

$=\left(\frac{-1}{2}\right)^n 1.3.5.7..........(2n-1)(1+x)^{\frac{-1}{2}-n}\quad\forall n\geq 2$

2) $f_2(x)=\ln(1+x)\Longrightarrow f_2'(x)=\dfrac{1}{1+x}\Rightarrow f_2''(x)=\dfrac{-1}{(1+x)^2}\Rightarrow f_2^{(3)}(x)=\dfrac{2}{(1+x)^3}$

$\Rightarrow...........\Rightarrow f_2^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$

3) $f_3(x)=(x+1)^3e^{-x}$

Formule de Leibnitz : $(fg)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{k=n}C_n^k\ f^{\ (n-k)}\ g^{(k)}$

Prenons :$g(x)=(x+1)^3\Rightarrow g'(x)=3(x+1)^2\Rightarrow g''(x)=6(x+1)\Rightarrow g^{(3)}(x)=6$;

$g^{(n)}(x)=0\forall n\geq 4$ et $g^{(n)}(x)=\dfrac{3!}{(3-n)!}(x+1)^{3-n}\qquad\forall n=0,1,2,3$

Et $\quad f(x)=e^{-x}\Rightarrow f^{(n)}(x)=(-1)^n e^{-x}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

D'ou :

$\left((x+1)^3e^{-x}\right)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{k=3}C_n^k\ (e^{-x})^{(n-k)}\ \left((x+1)^3\right)^{(k)}=\sum\limits_{k=0}^{k=3}C_n^k\ (-1)^{n-k}e^{-x}\ \dfrac{3!}{(3-k)!}(x+1)^{3-k}$

Exercice 18

En utilisant la régle de l'hopital Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{\ x}-1}{\log x-x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x^2-\pi^2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}-e}{\cos x-1}$;6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$

Solution 18

En utilisant la régle de l'hopital Calculer les limites suivantes :

$\rightarrow$1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}= \quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}-e\right]}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e\right]}{x}=\frac{0}{0}$

Appliquons pour la $1^{ère}$fois la Règle de l'Hopital :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e\right]'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\right)'=\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)'e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{-1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}\right]e=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{-(x+1)\ln(1+x)+x}{x^2(1+x)}\right]e$

Appliquons pour la $2^{ème}$fois la RH :

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(-(x+1)\ln(1+x)+x)'}{(x^2(1+x))'}\right]e=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{-\ln(1+x)-1+1}{3x^2+2x}\right]e=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{-\ln(1+x)}{x(3x+2)}\right]e=\dfrac{-e}{2}$

$\rightarrow$2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1}=\frac{0}{0}$

Appliquons la Règle de l'Hopital

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)'}{(e^x-1)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x}=0$

$\rightarrow$3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{\ x}-1}{\log x-x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x\ln x}-1}{\log x-x+1}=\frac{0}{0}$

Appliquons la Règle de l'Hopital

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(e^{x\ln x}-1\right)'}{(\log x-x+1)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\ln x+1)e^{x\ln x}}{\frac{1}{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}x\dfrac{(\ln x+1)e^{x\ln x}}{1-x}=\frac{1}{0}=\infty$

D'ou : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{\ x}-1}{\log x-x+1}=\infty$

$\rightarrow$4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x^2-\pi^2}=\frac{0}{0}$

Appliquons la Règle de l'Hopital

$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(\sin x)'}{(x^2-\pi^2)'}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos x}{2x}=\dfrac{-1}{2\pi}$

D'ou : $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x^2-\pi^2}=\dfrac{-1}{2\pi}$

$\rightarrow$5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}-e}{\cos x-1}=\frac{0}{0}$

Appliquons la Règle de l'Hopital

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{\cos x}-e)'}{(\cos x-1)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin xe^{\cos x}}{-\sin x}=e$

D'ou : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}-e}{\cos x-1}=e$

$\rightarrow$6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y^2}\left(y-\ln(1+y)\right)=\frac{0}{0}$

Appliquons la Règle de l'Hopital

$$\lim_{y\to 0}\frac{\left(y-\ln\left(1+y\right)\right)'}{\left(y^2\right)'}=\lim_{y\to 0}\frac{\left(1-\dfrac{1}{1+y}\right)}{2y}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{2y\left(1+y\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{2\left(1+y\right)}=\frac{1}{2}$$

D'ou : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\dfrac{1}{2}$

Chapitre 6

Développement limité

Exercice 19

Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 pour les fonctions suivantes :

1) $f\ (x) = \log\left(\dfrac{1}{x}\right)$; 2) $g\,(x) = 1 - x\sin\frac{1}{x}$

Solution 19

1) $f\ (x) = \log\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0} f\ (x) = \lim\limits_{x\to 0} \log\left(\dfrac{1}{x}\right) = \infty$ par suite f n'admet pas de DL au v(0)à l'ordre 3.

2) $g\ (x) = 1 - x\sin\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} g\ (x) = 1$;or $g'\ (0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g\ (x) - g\ (0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - x\sin\frac{1}{x} - 1}{x-0} =$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\sin\frac{1}{x}\right)$ cette limite n'existe pas .

g n'est pas dérivable en 0 par suite g n'admet pas de DL au v(0)à l'ordre 3 .

Exercice 20

Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0
des fonctions suivantes :

1) $f_1\,(x) = \sqrt{1+x}$; 2) $f_2\,(x) = \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$; 3) $f_3\,(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

4) $f_4\,(x) = \log\,(2+x)$; 5) $f_5\,(x) = \log\,(1+e^x)$; 6) $f_6\,(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

7) $f_7\,(x) = e^{3+\sin x}$; 8) $f_8\,(x) = \sin\left(e^{2x} - 1\right)$; 9) $f_9\,(x) = Argthx\ (n = 5)$

Solution 20

Développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0

·1) $f_1\,(x) = \sqrt{1+x}$

On sait que :

$(1+x)^{\alpha} = 1+\dfrac{\alpha}{1!}x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4+o\left(x^4\right)$

Prenons : $\alpha = \frac{1}{2}$

$f_1(x) = \sqrt{1+x} = 1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{16}-\dfrac{5x^4}{128}+o\left(x^4\right)$

·2) $f_2(x) = \dfrac{e^x-1-x}{x^2}$

$e^x = 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^5}{5!}+\dfrac{x^6}{6!}+o\left(x^6\right)$

$f_2(x) = \dfrac{e^x-1-x}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^5}{5!}+\dfrac{x^6}{6!}\right)$

$= \dfrac{1}{2!}+\dfrac{x}{3!}+\dfrac{x^2}{4!}+\dfrac{x^3}{5!}+\dfrac{x^4}{6!}+o\left(x^4\right)$

·3) $f_3(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)}{2+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)}$

En utilisant la division suivant les puissances croissantes on trouve :

$f_3(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{2}+\dfrac{x}{4}-\dfrac{x^3}{48}+o\left(x^3\right)$

·4) $f_4(x) = \log(2+x)$

$\log(2+x) = \int \dfrac{dx}{2+x} = \int \dfrac{dx}{2\left(1+\dfrac{x}{2}\right)}$

Or : $\dfrac{1}{1+t} = 1-t+t^2-t^3+o\left(t^3\right)$

Cela veut dire que : $\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{2}} = 1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x^3}{8}+o\left(x^3\right)$

Par suite : $\log(2+x) = \frac{1}{2}\int \dfrac{dx}{1+\dfrac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int\left(1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}\right)dx = \frac{1}{2}\left(x-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{24}\right)+c+o\left(x^3\right)$

avec : $c = f_4(0) = \log 2$

$f_4(x) = \log(2+x) = \log 2+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{24}+o\left(x^3\right)$

·5) $f_5(x) = \log(1+e^x) = \log(2+(e^x-1)) = \log(2+X)$ / $X = e^x-1 \to 0$ quant $x \to 0$

$X = x+\frac{x^2}{2|}+\frac{x^3}{3|}$

$f_5(x) = \log(2+X) = \log 2+\dfrac{\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)}{2}-\dfrac{\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)^2}{8}+\dfrac{\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)^3}{24}+o\left(x^3\right)$

$= \log 2+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{8}+o\left(x^3\right)$

$\cdot 6)\ f_6(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\log(1+x)}$

$$\begin{cases} \log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + o\left(x^4\right) \quad \text{et} \\ \frac{1}{x}\log(1+x) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + o\left(x^3\right) = 1+t \text{ avec : } t = \left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4}\right) \to 0 \text{ quant } x \to 0 \end{cases}$$

Ainsi : $f_6(x) = e^{\frac{1}{x}\log(1+x)} = e^{1+t} = ee^t = e\left(1 + t + \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^3}{3!}\right) + o\left(t^3\right)$

$= e\left(1 + \left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4}\right) + \dfrac{\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^2}{2!} + \dfrac{\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^3}{3}\right) +$
$o\left(x^3\right)$

$= e\left(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{11x^2}{24} - \dfrac{7x^3}{16}\right) + o\left(x^3\right)$

$\cdot 7)\ f_7(x) = e^{3+\sin x} = e^3\ e^{\sin x} = e^3\ e^{\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o\left(x^3\right)}$

$= e^3\left(1 + \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \dfrac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \dfrac{x^3}{6}\right)^3\right) + o\left(x^3\right)$

$= e^3\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + o\left(x^3\right)$

$\cdot 8)\ f_8(x) = \sin\left(e^{2x} - 1\right) = \sin t$

avec : $t = e^{2x} - 1 = 2x + \dfrac{(2x)^2}{2!} + \dfrac{(2x)^3}{3!} + o\left(x^3\right) = \left(2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3\right) + o\left(x^3\right)$

et $\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o\left(t^3\right)$

$f_8(x) = \sin\left(e^{2x} - 1\right) = \left(2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3\right) - \frac{1}{6}\left(2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3\right)^3 + o\left(x^3\right)$
$= 2x + 2x^2 + o\left(x^3\right)$

$\cdot 9)\ f_9(x) = Argthx \qquad x_0 = 0\ ;\ n = 5$

$f_1(x) = Arg\ th\ x = \int \dfrac{1}{1 - x^{\ 2}} dx$

$\dfrac{1}{1 - x^{\ 2}} = \left(1 - x^{\ 2}\right)^{-1} = 1 + x^{\ 2} + x^{\ 4} + o\left(x^{\ 4}\right)$

$f_9(x) = Arg\ th\ x = \int \left(1 + x^2 + x^{\ 4}\right) dx\ +\ o\left(x^5\right)$

$= x + \dfrac{x^{\ 3}}{3} + \dfrac{x^{\ 5}}{5} + c + o\left(x^{\ 5}\right)$ avec : $c = Arg\ th\ 0 = 0$

Ainsi : $f_9(x) = Arg\ th\ x = x + \dfrac{x^{\ 3}}{3} + \dfrac{x^{\ 5}}{5} + o\left(x^{\ 5}\right)$ $\to$DL au v(0) à l'ordre 5.

Exercice 21

Donner le développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = Argth\ (x-1) \qquad x_0 = 1\ ;\ n = 5$

2) $f_2(x) = arctg\dfrac{1}{1+x} \qquad x_0 = +\infty\ ;\ n = 3$

3) $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x-\frac{\pi}{2}+1}$ $\qquad x_0 = \frac{\pi}{2}$; $n = 3.$

4) $f_4(x) = Sh\ 2(x-1)$ $\qquad x_0 = 1$; $n = 5$

5) $f_5(x) = \frac{1}{2}\log\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ $\qquad x_0 = +\infty$; $n = 4$

6) $f_6(x) = \log\left(\dfrac{1+2x}{x}\right)$ $\qquad x_0 = +\infty$; $n = 3$

Solution 21

·1) $f_1(x) = Argth\ (x-1)$ $\qquad x_0 = 1$; $n = 5$

Posons : $Y = (x-1) \to 0$ quant $x \to 1$

$f_1(x) = Argth\ (x-1) = Argth\ Y = \int \dfrac{dy}{1-y^2}$

Or : $\dfrac{1}{1-y^2} = \dfrac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + o\left(t^3\right) = 1 - \left(-y^2\right) + \left(-y^2\right)^2 + o\left(y^4\right) = 1 + y^2 + y^4 + o\left(y^4\right)$

$f_1(x) = \int \dfrac{dy}{1-y^2} = \int \left(1 + y^2 + y^4\right) dy + o\left(y^5\right) = y + \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{y^5}{5} + c + o\left(y^5\right)$

Avec : $c = Argth 0 = 0$

D'ou : $\qquad f_1(x) = (x-1) + \dfrac{(x-1)^3}{3} + \dfrac{(x-1)^5}{5} + o\left((x-1)^5\right)$

·2) $f_2(x) = arctg\dfrac{1}{1+x}$ $\qquad x_0 = +\infty$; $n = 3$

Posons : $Y = \dfrac{1}{x} \to 0$ quant $x \to \infty$

$f_2(x) = arctg\dfrac{1}{1+\frac{1}{Y}} = arctg\left(\frac{Y}{1+Y}\right) = arctg\left(Y\left(\dfrac{1}{1+Y}\right)\right)$

$= arctg\left(Y\left(1 - Y + Y^2\right)\right) = arctg\left(Y - Y^2 + Y^3\right) = arctg\,(t)$

$arctg\,(t) = \int \dfrac{dt}{1+t^2} = \int \left(1 - t^2\right) dt = t - \frac{t^3}{3} + c$ avec : $c = arctg\,(0) = 0$

$f_2(x) = arctg\left(\dfrac{Y}{1+Y}\right) = \left(Y - Y^2 + Y^3\right) - \dfrac{\left(Y - Y^2 + Y^3\right)^3}{3} + o\left(Y^3\right) = Y - Y^2 + \frac{2}{3}Y^3 + o\left(Y^3\right)$

$= \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{3x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

·3) $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x-\frac{\pi}{2}+1}$ $\qquad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$; $n = 3.$

Posons : $Y = \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \to 0$ quant $x \to \dfrac{\pi}{2}$

$f_3(x) = \dfrac{\sqrt{1-\cos\left(Y+\dfrac{\pi}{2}\right)}}{Y+1}$;Or: $\cos\left(Y + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin Y$

Par suite : $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{1+\sin Y}}{Y+1} = \dfrac{1}{Y+1}\left(\sqrt{1+\sin Y}\right)$

On a : $\sqrt{1+\sin Y} = \sqrt{1+t}$ avec $t = \sin Y \to 0$ quant $y \to 0$

$$\text{Et : }\begin{cases} \sqrt{1+\sin Y} = \sqrt{1+t} \ = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + o\left(t^4\right) \\ t = \sin Y = Y - \frac{Y^3}{6} + O\left(Y^3\right) \quad \text{et} \\ \frac{1}{Y+1} = 1 - Y + Y^2 - Y^3 + o\left(Y^3\right) \end{cases}$$

Ainsi :

$f_3\left(x\right) = \frac{1}{Y+1}\left(\sqrt{1+\sin Y}\right)$

$= \left(1 - Y + Y^2 - Y^3\right)\left(1 + \frac{\left(Y - \frac{Y^3}{6}\right)}{2} - \frac{\left(Y - \frac{Y^3}{6}\right)^2}{8} + \frac{\left(Y - \frac{Y^3}{6}\right)^3}{16}\right) + o\left(Y^3\right)$

$= 1 - \frac{Y}{2} + \frac{3}{8}Y^2 - \frac{29}{48}Y^3 + o\left(Y^3\right)$ et

$f_3\left(x\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{8}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{29}{48}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3\right)$

·4) $f_4\left(x\right) = Sh\ 2(x-1) \qquad x_0 = 1\ ;\ n = 5$

Posons : $X = (x-1) \to 0$ quant $x \to 1$

D'ou : $f_1\left(x\right) = Sh\ 2X = 2ShX\ ChX$

$ShX = X + \frac{X^{\ 3}}{6} + \frac{X^{\ 5}}{120} + o\left(X^{\ 5}\right)$

$ChX = 1 + \frac{X^{\ 2}}{2} + \frac{X^{\ 4}}{24} + o\left(X^{\ 5}\right)$

$f_4\left(x\right) = 2\left(X + \frac{X^{\ 3}}{6} + \frac{X^{\ 5}}{120}\right)\left(1 + \frac{X^{\ 2}}{2} + \frac{X^{\ 4}}{24}\right) = 2X + \frac{4}{3}X^{\ 3} + \frac{4}{15}X^{\ 5} + o\left(X^{\ 5}\right)$

$f_4\left(x\right) = 2(x-1) + \frac{4}{3}\left(x-1\right)^3 + \frac{4}{15}(x-1)^5 + o\left(\ (x-1)^5\right)$

·5) $f_5\left(x\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad x_0 = +\infty\ ;\ n = 4$

Posons : $X = \frac{1}{x} \to 0$ quant $x \to \infty$

D'ou : $f_5\left(x\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\frac{1}{X}+1}{\frac{1}{X}-1}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+X}{1-X}\right) = Arg\,thX = \int \frac{1}{1-X^{\ 2}}dx$

$\frac{1}{1-X^{\ 2}} = \left(1-X^{\ 2}\right)^{-1} = 1 + X^{\ 2} + X^{\ 4} + o\left(X^{\ 4}\right)$

$f_5\left(x\right) = Arg\ th\ X = \int \frac{1}{1-X^{\ 2}}dx = \int \left(1 + X^{\ 2} + X^{\ 4}\right)dx + o\left(X^{\ 5}\right)$

$= X + \frac{X^{\ 3}}{3} + \frac{X^{\ 5}}{5} + c + o\left(X^{\ 5}\right)$ avec : $c = Arg\ th\ 0 = 0$

$f_5\left(x\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^{\ 3}} + \frac{1}{5x^{\ 5}} + o\left(\frac{1}{x^{\ 5}}\right)$

·6) $f_6(x) = \log\left(\dfrac{1+2x}{x}\right) \qquad x_0 = +\infty \ ; \ n = 3$

Posons : $X = \dfrac{1}{x} \to 0$ quant $x \to \infty$

D'ou : $f_6(x) = \log\left(2 + \dfrac{1}{x}\right) = \log(2+X) = \log\left(2\left(1+\frac{X}{2}\right)\right) = \log 2 + \log\left(1+\frac{X}{2}\right)$

Or :$\log\left(1+\frac{X}{2}\right) = \frac{X}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{X}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{X}{2}\right)^3 + o\left(X^3\right)$

$f_6(x) = \log\left(\dfrac{1+2x}{x}\right) = \log\left(2+\dfrac{1}{x}\right) = \log 2 + \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{8x^{\ 2}} + \dfrac{1}{24x^{\ 3}} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

$\to$DL au v(∞) à l'ordre 3.

Exercice 22

a) Donner le développement limité à l'ordre 5 au v(0) de la fonction

$$f\ (x) = Arc\ tgx$$

(utiliser la dérivée de f)

b) Donner le développement limité à l'ordre 5 au v(0) de la fonction

$$g\ (x) = \frac{Arc\ tgx}{1+x^2}$$

c) En déduire le développement limité à l'ordre 6 au v(0) de la fonction

$$h\ (x) = (Arc\ tgx)^2$$

Solution 22

a) Donner le développement limité à l'ordre 5 au v(0) de la fonction

$f\ (x) = Arc\ tgx = \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int (1-x^2+x^4)dx + \theta\left(x^5\right)$

$= x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + c + \theta\left(x^5\right)$ avec :$c = arctg\ 0 = 0$

b) Donner le développement limité à l'ordre 5 au v(0) de la fonction

$g\ (x) = \dfrac{Arc\ tgx}{1+x^2} = (Arctgx)\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) = \left(x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}\right)\left(1-x^2+x^4\right) + \theta\left(x^5\right)$

$= x - \dfrac{4x^3}{3} + \dfrac{23x^5}{15} + \theta\left(x^5\right)$

c) En déduire le développement limité à l'ordre 6 au v(0) de la fonction

$h\ (x) = (Arc\ tgx)^2$

On remarque que :$h'(x) = \dfrac{2Arc\ tgx}{1+x^2} = 2g\ (x)$

celaveut dire que : $h\ (x) = 2\int g\ (x)\,dx = 2\int\left(x - \dfrac{4x^3}{3} + \dfrac{23x^5}{15}\right)dx + \theta\left(x^6\right)$

$= x^2 - \frac{2x^4}{3} + \frac{23x^6}{45} + c + \theta\left(x^6\right)$ avec :$c = h\ (0) = 0$

Exercice 23

Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de la fonction suivante :

1) $f\ (x) = \frac{e^x}{1+x} + \cos x$

2) En déduire la $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{e^x}{1+x} + \cos x \quad - 2}{x^3}\right)$

Solution 23

1) $f\ (x) = \frac{e^x}{1+x} + \cos x$

On a :$\begin{cases} \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o\left(x^3\right) \\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right) \\ \cos x = e^x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o\left(x^3\right) \end{cases}$

Ainsi : $f\ (x) = \frac{e^x}{1+x} + \cos x \ = \left(1 - x + x^2 - x^3\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) + 1 - \frac{x^2}{2!} + o\left(x^3\right)$

$= 2 - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$

2) En déduire la $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{e^x}{1+x} + \cos x \quad - 2}{x^3}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{e^x}{1+x} + \cos x \quad - 2}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2 - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right) \ - 2}{x^3}\right) = \frac{-1}{3}$$

Chapitre 7

Les éspaces véctoriels

Exercice 24 : Vérifier si les ensembles suivants sont des s- ev de $\mathbb{R}^3$:

$A = \{(x\ ,y\ ) \in \mathbb{R}^2/x + y = 1\}$
$B = \{(x\ ,y\ ,\ z\ ) \in \mathbb{R}^3/x \geq 0\}$
$C = \{(x\ ,y\ ,\ 1\ ) \in \mathbb{R}^3/x, y \in \mathbb{R}\}$
$D = \{(x\ ,y\ ,\ z\ ) \in \mathbb{R}^3/x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

Solution 24

$\rightarrow$ $A = \{(x\ ,y\ ,\ z\ ) \in \mathbb{R}^3/x + y + z = a\ , a \in \mathbb{R}^*\}$ n'est pas un s- ev de $\mathbb{R}^3$ car $(0, 0, 0) \notin A$

$\rightarrow$ $B = \{(x\ ,y\ ,\ z\ ) \in \mathbb{R}^3/x \geq 0\}$ n'est pas un s- ev de $\mathbb{R}^3$ car :

pour $(x\ ,y\ ,\ z\ ) = (1,1\ ,1\ ) \in B$ et $\lambda = -2$ on a : $\lambda\,(x\ ,y\ ,\ z\ ) = (-2\ ,-2\ ,-2\ ) \notin B$

$\rightarrow$ $C = \{(x\ ,y\ ,\ 1\ ) \in \mathbb{R}^3/x, y \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un s- ev de $\mathbb{R}^3$ car $(0, 0, 0) \notin C$

$\rightarrow$ $D = \{(x\ ,y\ ,\ z\ ) \in \mathbb{R}^3/x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ n'est pas un s- ev de $\mathbb{R}^3$ car /

pour $(x\ ,y\ ,\ z\ ) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\ , \frac{1}{2}\ \right) \in D$ et $\lambda = 4$ on a : $\lambda\,(x\ ,y\ ,\ z\ ) = (2\ ,2\ ,2\ ) \notin D$

Exercice 25 :

Soit F=$\{(x - y + 2z\ ,\ 3y - z\ ,\ x)\ \ / \ x\ ,\ y\ ,\ z \in \mathbb{R}\}$

1) Montrer que F est un sous éspace véctoriel de $\mathbb{R}^3$.
2) Donner une base pour F.
3) Montrer que F =$\mathbb{R}^3$.

Solution 25

$F = \{(x - y + 2z\ ,\ 3y - z\ ,\ x)\ \ / \ x\ ,\ y\ ,\ z \in \mathbb{R}\}$

1) F est un sous espace véctoriel de $\mathbb{R}^3$ en effet :

On a : a) $(0, 0, 0) \in F$ d'ou $F \neq \varnothing$

b) $\forall u, v \in F\ \ et\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \alpha u + \beta v \in F$

$u \in F$ ie :$u = (x_1 - y_1 + 2z_1, 3y_1 - z_1, x_1)$
$v \in F$ ie :$v = (x_2 - y_2 + 2z_2, 2y_2 - z_2, x_2)$

$$\alpha u+\beta v=\alpha\left(x_1-y_1+2z_1,3y_1-z_1,x_1\right)+\beta\left(x_2-y_2+2z_2,2y_2-z_2,x_2\right)$$
$$=\ (\underbrace{(\alpha x_1+\beta x_2)}\ -\underbrace{(\alpha y_1+\beta y_2)}+2\underbrace{(\alpha z_1+\beta z_2)},3\underbrace{(\alpha y_1+\beta y_2)}$$
$$-\underbrace{(\alpha z_1+\beta z_2)},\underbrace{(\alpha x_1+\beta x_2)})$$
$$=(x_3-y_3+2z_3\ ,3y_3-z_3\ ,x_3)\in F$$

Ainsi F *est un sous espace véctoriel de* $\mathbb{R}^3$.

2) Donnons une base pour F.

$$F=\{(x-y+2z\ ,\ 3y-z\ ,\ x)\ \ /\ x\ ,\ y\ ,\ z\in\mathbb{R}\}$$
$$=\{(x\ ,0,x\ )+(-y\ ,3y\ ,0)+(2z,-z,0)\ \ /\ x\ ,\ y,z\in\mathbb{R}\}$$
$$=\left\{x\ \underbrace{(1\ ,0\ ,1)}+y\ \underbrace{(-1,3\ ,0)}\ +z\ \underbrace{(2,-1\ ,0)}/\ x\ ,\ y\ ,z\in\mathbb{R}\right\}$$
$$=\left\{x\ \underbrace{v_1}+y\ \underbrace{v_2}\ +z\ \underbrace{v_3}/\ x\ ,y,z\in\mathbb{R}\right\}$$

F est le s-ev engendré par $\{v_1\ ,v_2\ ,v_3\}$,

ie : La famille de vécteurs $\{v_1\ ,v_2\ ,v_3\}$ est une famille génératrice pour F.

$\rightarrow$ La famille de vécteurs $\{v_1\ ,v_2\ ,v_3\}$est-elle libre ?

ie : $\forall\ \alpha,\beta,\delta\in\mathbb{R}\ \ /\ \alpha v_1+\beta v_2+\delta v_3=0_{\mathbb{R}^3}\Longrightarrow\alpha=\beta=\delta=0$?

$$\alpha v_1+\beta v_2+\delta v_3=\alpha\left(1\ ,0\ ,1\right)+\beta\left(-1,3\ ,0\right)+\delta\left(2,-1\ ,0\right)=(0,0,0)\Longrightarrow$$
$$(\alpha-\beta+2\delta,3\beta-\delta,\alpha)=(0,0,0)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha-\beta+2\delta=0\\3\beta-\delta=0\\\alpha=0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c}-\beta+2\delta=0\\3\beta-\delta=0\\\alpha=0\end{array}\right.$$
$$\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c}-\beta+6\beta=0\text{ ie : }\beta=0\\3\beta=\delta=0\\\alpha=0\end{array}\right.\Longrightarrow$$
$$\alpha=\beta=\delta=0$$

D'ou $\{v_1\ ,v_2\ ,v_3\}$est libre et comme elle est génératrice ,elle forme une base pour F.

$$\dim F=3$$

3)On a : F *est un sous espace véctoriel de* $\mathbb{R}^3$ et $\dim F=3=\dim\mathbb{R}^3$et donc : $F=\mathbb{R}^3$

Exercice 26 :

Soient les sous ensembles de $\mathbb{R}^3$suivant :

$$F=\left\{(x\ ,y\ ,\ z\ )\in\mathbb{R}^3/\ x+y-z=0\right\}$$
$$G=\left\{(x-y\ ,x+y\ ,x-3y\ )\in\mathbb{R}^3/\ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1) Montrer que F et G sont des sous éspace véctoriel de $\mathbb{R}^3$.

2)Calculer la dimension de F et de G.

3) Déterminer $F\cap G$.

Solution 26

Soient les sous ensembles de $\mathbb{R}^3$suivant :

$$F=\left\{(x\ ,y\ ,\ z\ )\in\mathbb{R}^3/\ x+y-z=0\right\}$$
$$G=\left\{(x-y\ ,x+y\ ,x-3y\ )\in\mathbb{R}^3/\ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1) Montrons que F et G sont des sous éspace véctoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$\rightarrow F=\left\{(x\ ,y\ ,\ z\ )\in\mathbb{R}^3/\ x+y-z=0\right\}$$
$$=\left\{(x\ ,y\ ,\ z\ )\in\mathbb{R}^3/\ x+y=z\right\}=\{(x\ ,y\ ,\ x+y)\ /x,y\in\mathbb{R}\}$$

F est un sous espace véctoriel de $\mathbb{R}^3$ en effet :

On a : a) $(0,0,0) \in F$ d'ou $F \neq \varnothing$

b) $\forall u, v \in F$ *et* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \alpha u + \beta v \in F$

$u \in F$ ie :$u = (x_1, y_1, x_1 + y_1)$

$v \in F$ ie :$v = (x_2, y_2, x_2 + y_2)$

$$\alpha u + \beta v = \alpha (x_1, y_1, x_1 + y_1) + \beta (x_2, y_2, x_2 + y_2)$$
$$= (\underbrace{(\alpha x_1 + \beta x_2)}, \underbrace{(\alpha y_1 + \beta y_2)}, \underbrace{(\alpha x_1 + \beta x_2)} + \underbrace{(\alpha y_1 + \beta y_2)})$$
$$= (x_3, y_3\ , x_3 + y_3) \in F$$

Ainsi F *est un sous espace véctoriel de* $\mathbb{R}^3$.

$\rightarrow G = \left\{(x - y\ , x + y\ , x - 3y\ ) \in \mathbb{R}^3 /\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

G est un sous espace véctoriel de $\mathbb{R}^3$ en effet :

On a : a) $(0,0,0) \in G$ d'ou $G \neq \varnothing$

b) $\forall u, v \in G$ *et* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \alpha u + \beta v \in G$

$u \in G$ ie :$u = (x_1 - y_1\ , x_1 + y_1\ , x_1 - 3y_1)$

$v \in G$ ie :$v = (x_2 - y_2\ , x_2 + y_2\ , x_2 - 3y_2)$

$$\alpha u + \beta v = \alpha (x_1 - y_1\ , x_1 + y_1\ , x_1 - 3y_1) + \beta (x_2 - y_2\ , x_2 + y_2\ , x_2 - 3y_2)$$
$$= (\underbrace{(\alpha x_1 + \beta x_2)} - \underbrace{(\alpha y_1 + \beta y_2)}, \underbrace{(\alpha x_1 + \beta x_2)} + \underbrace{(\alpha y_1 + \beta y_2)}, \underbrace{(\alpha x_1 + \beta x_2)} - 3\underbrace{(\alpha y_1 + \beta y_2)})$$
$$= (x_3 - y_3\ , x_3 + y_3, x_3 - 3y_3) \in G$$

Ainsi G *est un sous espace véctoriel de* $\mathbb{R}^3$.

2)Calculons la dimension de F et de G.

$\rightarrow F = \left\{(x\ , y\ ,\ z\ ) \in \mathbb{R}^3 /\ x + y - z = 0\right\} = \{(x\ , y\ ,\ x + y) / x, y \in \mathbb{R}\}$

$= \{(x\ , 0\ ,\ x) + (0, y, y)\ \ / \ x, y \in \mathbb{R}\} = \{x (1\ , 0\ ,\ 1) + y (0, 1, 1)\ \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$

$= \{x v_1 + y v_2\ \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$

F est le s-ev engendré par $\{v_1\ , v_2\ \}$,

ie : La famille de vécteurs $\{v_1\ , v_2\ \}$ est une famille génératrice pour F.

$\rightarrow$ La famille de vécteurs $\{v_1\ , v_2\ \}$est-elle libre ?

ie : $\forall\ \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}\ \ / \ \alpha v_1 + \beta v_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$?

$\alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha (1\ , 0\ , 1) + \beta (0, 1, 1) = (0, 0, 0) \Longrightarrow$

$$(\alpha, \beta, \alpha + \beta) = (0,0,0) \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

D'ou $\{v_1\ , v_2\ \}$est libre et comme elle est génératrice ,elle forme une base pour F.

$$\dim F = 2$$

$\rightarrow G = \left\{(x - y\ , x + y\ , x - 3y\ ) \in \mathbb{R}^3 /\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

$= \{(x,\ x\ ,\ x) + (-y, y, -3y)\ \ / \ x, y \in \mathbb{R}\} = \{x (1\ , 1\ ,\ 1) + y (-1, 1, -3)\ \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$

$= \{x v_1 + y v_2\ \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$

G est le s-ev engendré par $\{v_1\ , v_2\ \}$,

ie : La famille de vécteurs $\{v_1\ , v_2\ \}$ est une famille génératrice pour G.

$\rightarrow$ La famille de vécteurs $\{v_1\ , v_2\ \}$est-elle libre ?

ie : $\forall\ \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}\ \ / \ \alpha v_1 + \beta v_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$?

$\alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha (1\ , 1\ , 1) + \beta (-1, 1, -3) = (0, 0, 0) \Longrightarrow$

$$(\alpha-\beta,\alpha+\beta,\alpha-3\beta)=(0,0,0)\Longrightarrow\begin{cases}\alpha-\beta=0\\ \alpha+\beta=0\\ \alpha-3\beta=0\end{cases}\Longrightarrow\alpha=\beta=0$$

D'ou $\{v_1\ ,v_2\ \}$est libre et comme elle est génératrice ,elle forme une base pour G.

$$\dim G=2$$

3) Déterminer $F\cap G$.

Soit $U\in F\cap G\Rightarrow U\in F$ et $U\in G$

Cela veut dire que : $U=(x-y\ ,x+y,x-3y)=(x\ ,y,x+y)$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-y=x\\ x+y=y\\ x-3y=x+y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ x=0\end{cases}$$

$F\cap G=\{(0,0,z)\ /\ z\in\mathbb{R}\}$

Exercice 27 :

Soit $F=\{(0,y\ ,\ z\ )\ \ /\ 2y-\ z=0\}$

1) Montrer que F est un sous éspace véctoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) Donner une base pour F et calculer la dimension de$F$.

3) F est - il égale à $\mathbb{R}^3$?,justifier.

Solution 27

Soit F=$\{(0,y\ ,\ z\ )\ \ /\ 2y-\ z=0\}=\{(0,y\ ,\ 2y)\ \ /\ y\in\mathbb{R}\}$

1) F est un sous espace véctoriel de $\mathbb{R}^3$ en effet :

On a : a) $(0,0,0)\in F$ d'ou $F\neq\varnothing$

b) $\forall u,v\in F$ *et* $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R};\alpha u+\beta v\in F$

$u\in F$ ie :$u=(0,y_1,2y_1)$

$v\in F$ ie :$v=(0,y_2,2y_2)$

$$\alpha u+\beta v=\alpha\,(0,y_1,2y_1)+\beta\,(0,y_2,2y_2)$$
$$=(\underbrace{0}\ ,\underbrace{(\alpha y_1+\beta y_2)}\ ,2\,\underbrace{(\alpha y_1+\beta y_2)})$$
$$=(0,y_3\ ,2y_3)\in F$$

Ainsi F *est un sous espace véctoriel de* $\mathbb{R}^3$.

2)Calculons la dimension de F

$F=\{(0,y\ ,\ 2y)\ \ /\ y\in\mathbb{R}\}=\{y\,(0,1\ ,\ 2)\ \ /\ y\in\mathbb{R}\}$

F est le s-ev engendré par $\{v=(0,1\ ,\ 2)\}$

ie : La famille de vécteurs $\{v\ \}$ est une famille génératrice pour F et comme $v=(0,1\ ,\ 2)\neq(0,0,0)$

Alors $\{v\ \}$est libre ,par bsuite cette famille forme une base pour F et $\dim F=1$

3) On a : $\dim F=1=\dim\mathbb{R}^3$et donc : $F\neq\mathbb{R}^3$

Exercice 28 :

Soit $F=\{(x-y+z\ ,2x+y+4z\ ,3y+2z)\ \ /\ x\ ,\ y\ ,\ z\in\mathbb{R}\}$

1) Montrer que F est un sous éspace véctoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) Donner une base pour F et calculer la dimension de$F$.

Solution 28

$$F=\{(x-y+z\ ,2x+y+4z\ ,3y+2z)\ \ /\ x\ ,\ y\ ,\ z\in\mathbb{R}\}$$

1) F est un s-ev de $\mathbb{R}^3$en effet :$\forall u,v\in F\ \ et\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R};\alpha u+\beta v\in F$

$u\in F$ ie :$u=(x_1-y_1+z_1\ ,2x_1+\ y_1+4z\ _1,\ 3y_1+2z_1)$

$v\in F$ ie :$v=(x_2-y_2+z_2\ ,2x_2+\ y_2+4z\ _2,\ 3y_2+2z_2)$

$\alpha u+\beta v=\alpha\left(x_1-y_1+z_1\ ,2x_1+\ y_1+4z\ _1,\ 3y_1+2z_1\right)+$

$\beta\left(x_2-y_2+z_2\ ,2x_2+\ y_2+4z\ _2,\ 3y_2+2z_2\right)$

$=(\underbrace{(\alpha x_1+\beta x_2)}-\underbrace{(\alpha y_1+\beta y_2)}+\underbrace{(\alpha z_1+\beta z_2)},2\underbrace{(\alpha x_1+\beta x_2)}+\underbrace{(\alpha y_1+\beta y_2)}+$

$4\underbrace{(\alpha z_1+\beta z_2)},$

$+3\underbrace{(\alpha y_1+\beta y_2)}+2\underbrace{(\alpha z_1+\beta z_2)})$

$=(x_3-y_3+z_3,2x_3+y_3+4z_3,3y_3+2z_3)\in F$

2)$F=\{(x-y+z\ ,2x+\ y+4z\ ,\ 3y+2z)\ \ /\ x\ ,\ y\ ,\ z\in\mathbb{R}\}$

$=\{(x\ ,2x\ ,0)+(-y\ ,y\ ,3y)\ \ +(z,4z\ ,2z)\ /\ x\ ,\ y\ ,\ z\in\mathbb{R}\}$

$=\left\{x\ \underbrace{(1\ ,2\ ,0)}+y\ \underbrace{(-1\ ,1\ ,3)}\ \ +z\ \underbrace{(1,4\ ,2)}/\ x\ ,\ y\ ,\ z\in\mathbb{R}\right\}$

$=\left\{x\ \underbrace{u_1}+y\ \underbrace{u_2}\ \ +z\ \underbrace{u_3}\ /\ x\ ,\ y\ ,\ z\in\mathbb{R}\right\}$

F est le s-ev engendré par $\{u_1,u_2,u_3\}$

La famille de vécteurs $\{u_1,u_2,u_3\}$ est - elle libre ?

Soit $\alpha,\beta,\delta\in\mathbb{R}\ \ /\ \alpha u_1+\beta u_2+\delta u_3=0_{\mathbb{R}^3}\Longrightarrow\alpha=\beta=\delta=0$

$\alpha u_1+\beta u_2+\delta u_3=\alpha\left(1,2,0\right)+\beta\left(-1,1,3\right)+\delta\left(1,4,2\right)=(0,0,0)\Longrightarrow$

$$(\alpha-\beta+\delta,2\alpha+\beta+4\delta,3\beta+2\delta)\ =\ (0,0,0)\ \Longrightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha-\beta+\delta=0\\2\alpha+\beta+4\delta=0\\3\beta+2\delta=0\end{array}\right.\ \ \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha=\frac{-5}{3}\delta\\\beta=-\dfrac{2}{3}\delta\end{array}\right.$$

$\Longrightarrow$pour $\delta=1$ on a $\alpha=\frac{-5}{3}$ et $\beta=-\dfrac{2}{3}$

Ainsi :$\{u_1,u_2,u_3\}$est liée

Or : $\{u_1,u_2\}$est libre (facile à voir) et donc cette famille forme une base pour F

et $\dim F=2$

Exercice 29 :

Considèrons les trois vécteurs de $\mathbb{R}^3$ définis comme suit :

$v_1=(1,-1,1)\ \ ,v_2=\left(\sqrt{2},\sqrt{3},0\right)\ \ ,v_3=(0,0,1)$

1) La famille de vécteurs $\{v_1\ ,v_2\ ,v_3\}$est-elle libre ?

2) Considèrons les sous éspaces véctoriels de $\mathbb{R}^3$ définis comme suit :

$F_1=\{\lambda_1v_1+\lambda_2v_2\ /\ \lambda_1,\lambda_2\ \ \in\mathbb{R}\}$

$F_2=\{\beta_1v_3+\beta_2v_2\ /\ \beta_1,\beta_2\ \ \in\mathbb{R}\}$

a) Quelle est la dimension de F_1 et de F_2 ?.

b) calculer $F_1\cap F_2$.

c) En déduire la dim $(F_1\cap F_2)$.

Solution 29

$v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = \left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, 0\right)$, $v_3 = (0, 0, 1)$

1) La famille de vécteurs $\{v_1 , v_2 , v_3\}$est libre ssi :

$\forall\ \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}\ \ / \ \alpha v_1 + \beta v_2 + \delta v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow \alpha = \beta = \delta = 0$?

$\alpha v_1 + \beta v_2 + \delta v_3 = \alpha (1, -1, 1) + \beta \left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, 0\right) + \delta (0, 0, 1) = (0, 0, 0) \Longrightarrow$

$$\left(\alpha + \sqrt{2}\beta, -\alpha + \sqrt{3}\beta, \alpha + \delta\right) = (0, 0, 0) \Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \sqrt{2}\beta = 0 \\ -\alpha + \sqrt{3}\beta = 0 \\ \alpha + \delta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\beta = 0 & \text{ie} \quad \beta = 0 \\ \alpha = \sqrt{3}\beta & \text{ie} \quad \alpha = 0 \\ \delta = -\alpha & \text{ie} \quad \delta = 0 \end{cases}$$

$\alpha = \beta = \delta = 0$

2)

a) dimension de F_1 et de F_2 avec :

$F_1 = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \ / \ \lambda_1, \lambda_2 \ \in \mathbb{R}\}$; $F_2 = \{\beta_1 v_3 + \beta_2 v_2 \ / \ \beta_1, \beta_2 \ \in \mathbb{R}\}$

$\rightarrow$Comme $\{v_1 , v_2 , v_3\}$ sont lineairement indépendant , il en est de meme pour toute partie de cette famille .

ie :$\{v_1 , v_2 \}, \{v_1 , v_3\}, \{v_2 , v_3\}$sont libres .

$\rightarrow$Comme $\{v_1 , v_2 \}$est une famille génératrice pour F_1 et cette famille est libre alors elle forme une base pour F_1et

$$dim\ F_1 = 2$$

$\rightarrow$Comme $\{v_3 , v_2 \}$est une famille génératrice pour F_2 et cette famille est libre alors elle forme une base pour F_2et

$$dim\ F_2 = 2$$

b) calculons $F_1 \cap F_2$ et $dim\ F_1 \cap F_2$.

Soit $u \in F_1 \cap F_2 \Longrightarrow u \in F_1$ et $u \in F_2$

$u \in F_1$ ie $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \ / \ u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

$u \in F_2$ ie $\exists \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \ / \ u = \beta_1 v_3 + \beta_2 v_2$

$\Longrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \beta_1 v_3 + \beta_2 v_2$

$\Longrightarrow \lambda_1 v_1 - \beta_1 v_3 + (\lambda_2 - \beta_2) v_2 = 0$

Comme $\{v_1 , v_2 , v_3\}$ sont lineairement indépendant alors :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ -\beta_1 = 0 \\ (\lambda_2 - \beta_2) = 0 \end{cases}$$

Ainsi : $u = \lambda_2 v_2 \ / \ \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$F_1 \cap F_2 = \{\lambda_2 v_2 \ / \ \lambda_2 \ \in \mathbb{R}\}$$

$\{v_2\}$est une famille génératrice pour $F_1 \cap F_2$ et comme $v_2 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ alors $\{v_2\}$est libre et donc :

cette famille forme une base pour $F_1 \cap F_2$ et $dim\ F_1 \cap F_2 = 1$.

Chapitre 8

Applications Linéaires

Exercice 30. Dire les quelles parmi les applications suivantes sont des applications
linéaires de E dans F et, dans ce cas, déterminer le noyau et l'image :
1) $E = F = \mathbb{R}^2$
a) $f\ (x, y) = (2x + 3y, x)$
b) $f\ (x, y) = (y, x + y + 1)$
c) $f\ (x, y) = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \dfrac{y}{x^2 + y^2 + 1}\right)$.
2) $E = F = \mathbb{R}^3$
a) $f\ (x, y, z) = (-y + z, -x - z, x - y)$
b) $f\ (x, y, z) = \left(-x + \frac{1}{2}y, z, 2x - y + 2z\right)$
Solution 30
1) $E = F = \mathbb{R}^2$
a) $f\ (x, y) = (2x + 3y, x)$

f est linéaire $\Leftrightarrow \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall (x, y), (x', y',) \in \mathbb{R}^2$,
$f\ (\alpha (x, y) + \beta (x', y')) = \alpha f\ (x, y) + \beta f\ (x', y')$

$$\begin{aligned} f\ (\alpha (x, y) + \beta (x', y')) = &\ f\ (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') = (2 (\alpha x + \beta x') + 3 (\alpha y + \beta y'), \alpha x + \beta x') \\ &= (\alpha (2x + 3y) + \beta (2x' + 3y'), \alpha x + \beta y) \\ &= (\alpha (2x + 3y), \alpha x) + (\beta (2x' + 3y'), \beta y) \\ &= \alpha (2x + 3y, x) + \beta (2x' + 3y', y) \\ &= \alpha f\ (x, y) + \beta f\ (x', y') \text{ cela veut dire que } f \text{ est} \end{aligned}$$

linéaire

$\rightarrow$**ker**$f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ \ f\ \ (x, y) = 0_{\mathbb{R}^2}\right\}$
$=\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ \ (2x + 3y, x) = (0, 0)\right\}$
$=\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ \left\{\begin{array}{c} 2x + 3y = 0 \\ x = 0 \end{array}\right.\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y = 0\ \right\}$
$= \{(0, 0)\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\} \Rightarrow \dim(\ker f) = 0$
$\rightarrow \mathrm{Im}\ f = \left\{f\ \ (x, y)\ \ /\ \ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}\ = \left\{(2x + 3y, x)\ \ /\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

$$= \left\{ (2x\ ,\ x)\ \ + (3y, 0) \ / \ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
$$= \left\{ x\,(2\ ,\ 1)\ \ + y\,(3, 0) \ / \ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Im f est le sous éspace véctoriel engendré par la famille de vécteurs $\{v_1 = (2,1)\ \ , v_2 = (3,0)\}$,cette famille de vécteurs est - elle libre ?

$\rightarrow$ La famille de vécteurs $\{v_1\ , v_2\ \}$est-elle libre ?

ie : $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \ / \ \alpha v_1 + \beta v_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$?

$\alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha\,(2,1) + \beta\,(3,0) = (0,0) \Longrightarrow$

$(2\alpha + 3\beta, \alpha) = (0,0) \Longrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$

D'ou $\{v_1\ , v_2\ \}$est libre et comme elle est génératrice ,elle forme une base pour Im f

$$\dim \mathrm{Im}\ \ f = 2$$

Or Im f est un sous espace véctoriel de $\mathbb{R}^2$ et $\dim \mathrm{Im}\ \ f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$cela veut dire que Im $f = \mathbb{R}^2$.

b) $f\ (x,y) = (y, x + y + 1)$

On a : $f\ (0,0) = (0,1) \neq (0,0)$ cela veut dire que f n'est pas linéaire.

c) $f\ (x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \dfrac{y}{x^2 + y^2 + 1} \right)$.

On a : $f\ (0,0) = (0,0)$

Or pour $X = (1,0)$ et $Y = (0.1)$

$f\,(X + Y) = f\,(1,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et $f\,(X) + f\,(Y) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) + \left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Ainsi : $f\,(X + Y) \neq f\,(X) + f\,(Y)$ cela veut dire que f n'est pas linéaire.

2) $E = F = \mathbb{R}^3$

a) $f\ (x,y,z) = (-y + z, -x - z, x - y)$

f est linéaire $\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall\,(x,y,z)\,,(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$,

$f\ (\alpha\,(x,y,z) + \beta\,(x',y',z')) = \alpha f\ (x,y,z) + \beta f\,(x',y',z')$

$f\ (\alpha\,(x,y,z) + \beta\,(x',y',z')) = f\ (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')$

$= (-\,(\alpha y + \beta y') + (\alpha z + \beta z')\,, -\,(\alpha x + \beta x') - (\alpha z + \beta z')\,, (\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y$

$= (\alpha\,(-y + z) + \beta\,(-y' + z')\,, \alpha\,(-x - z) + \beta\,(-x' - z')\,, \alpha\,(x - y) + \beta\,(x' + y'))$

$= \ (\alpha\,(-y + z)\,, \alpha\,(-x - z)\,, \alpha\,(x - y)) +$ $(\beta\,(-y' + z')\,, \beta\,(-x' - z')\,, \beta\,(x' + y'))$

$= \ \alpha\,(-y + z, -x - z, x - y)\ +$ $\beta\,(-y' + z', -x' - z', x' + y')$

$= \alpha f\,(x,y,z) + \beta f\,(x',y',z')$ cela veut dire que f est linéaire

$\rightarrow$ Im $f = \left\{ f\ \ (x,y,z)\ \ / \ \ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

$= \left\{ (-y + z, -x - z, x - y)\ \ / \ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

$= \left\{ (0\ , -x, x) + (-y\ , 0, -y) + (z, -z, 0)\ \ / \ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

$= \left\{ x\,(0,-1,1) + y\,(-1,0,-1) + z\,(1,-1,0)\ \ / \ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

Im f est le sous espace engendré par $\{(0,-1,1)\,, (-1,0,-1)\,, (1,-1,0)\ \ \}$

Cette famille de vécteurs est - elle libre ?

$\forall\ \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}\ \ / \ \alpha v_1 + \beta v_2 + \delta v_3 = 0_{\mathbb{R}^2} \Longrightarrow \alpha = \beta = \delta = 0$?

$\alpha\,(0,-1,1) + \beta\,(-1,0,-1) + \delta\,(1,-1,0) = (-\beta + \delta, -\alpha - \delta, \alpha - \beta) = (0,0,0)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\beta+\delta=0 \\ -\alpha-\delta=0 \\ \alpha-\beta=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta=\delta \\ -\alpha=\delta \\ -2\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=\delta=0$$

D'ou $\{v_1\ ,v_2\ ,v_3\}$est libre et comme elle est génératrice ,elle forme une base pour Im f

$$\dim \operatorname{Im}\ f=3$$

Or Im f est un sous espace véctoriel de $\mathbb{R}^3$ et $\dim \operatorname{Im}\ f=3=\dim \mathbb{R}^3$cela veut dire que Im $f=\mathbb{R}^3$.

$\rightarrow$On a dim(ker$f$) +dim(Imf) $=3$; or dim(Imf) $=3$ ie : dim(ker$f$) $=0$ et ker$f=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

b) $f\ (x,y,z)=\left(-x+\frac{1}{2}y,z,2x-y+2z\right)$

f est linéaire $\Leftrightarrow \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall\,(x,y,z)\,,(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$,

$f\ (\alpha\,(x,y,z)+\beta\,(x',y',z'))=\alpha f\ (x,y,z)+\beta f\,(x',y',z')$

$$\begin{aligned} f\ (\alpha\,(x,y,z)+\beta\,(x',y',z')) &= f\ (\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha z+\beta z') \\ &= \left(-\left(\alpha x+\beta x'\right)+\tfrac{1}{2}\left(\alpha y+\beta y'\right),\left(\alpha z+\beta z'\right),2\left(\alpha x+\beta x'\right)-\left(\alpha y+\beta y'\right)+2\left(\alpha z+\beta z'\right)\right) \\ &= \left(\alpha\left(-x+\tfrac{1}{2}y\right)+\beta\left(-x'+\tfrac{1}{2}y'\right),\alpha z+\beta z',\alpha\left(2x-y+2z\right)+\beta\left(2x'-y'+2z'\right)\right) \\ &= \left(\alpha\left(-x+\tfrac{1}{2}y\right),\alpha z,\alpha\left(2x-y+2z\right)\right)+\left(\beta\left(-x'+\tfrac{1}{2}y'\right),\beta z',\beta\left(2x'-y'+2z'\right)\right) \\ &= \alpha\left(-x+\tfrac{1}{2}y,z,2x-y+2z\right)+\beta\left(-x'+\tfrac{1}{2}y',z',2x'-y'+2z'\right) \\ &= \alpha f\,(x,y,z)+\beta f\,(x',y',z') \end{aligned}$$

cela veut dire que f est linéaire

$$\begin{aligned} \rightarrow \operatorname{Im}\ f &= \left\{f\ \ (x,y,z)\ \ /\ \ \ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{\left(-x+\tfrac{1}{2}y,z,2x-y+2z\right)\ /\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{(-x\ ,0,2x)+\left(\tfrac{1}{2}y\ ,0,-y\right)+(0,z,2z)\ /\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{x\,(-1,0,2)+y\left(\tfrac{1}{2},0,-1\right)+z\,(0,1,2)\ /\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\} \end{aligned}$$

Im f est le sous espace engendré par $\left\{(-1,0,2)\,,\left(\frac{1}{2},0,-1\right),(0,1,2)\ \right\}$

Cette famille de vécteurs est - elle libre ?

$\forall\ \alpha,\beta,\delta\in\mathbb{R}\ \ /\ \alpha v_1+\beta v_2+\delta v_3=0_{\mathbb{R}^2}\Longrightarrow\alpha=\beta=\delta=0$?

$\alpha\,(-1,0,2)+\beta\left(\frac{1}{2},0,-1\right)+\delta\,(0,1,2)=\left(-\alpha+\frac{1}{2}\beta,\delta,2\alpha-\beta+2\delta\right)=(0,0,0)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\alpha+\frac{1}{2}\beta=0 \\ \delta=0 \\ 2\alpha-\beta+2\delta=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\beta=\alpha \\ -\alpha=\delta \\ 2\alpha=\beta \end{cases}$$

$\Rightarrow$pour $\alpha=1$ on a $\beta=2$ et $\delta=-1$

D'ou $\{v_1\ ,v_2\ ,v_3\}$sont liées

Or :$\{v_1\ ,v_3\ \}$sont libres car:

$\alpha\,(-1,0,2)+\beta\,(0,1,2)=(-\alpha,\beta,2\alpha+2\beta)=(0,0,0)\Rightarrow\alpha=\beta=0$

Et comme elle est génératrice ,elle forme une base pour Im f et $\dim\operatorname{Im}\ f=2$

$$\begin{aligned} \rightarrow \mathbf{ker}f &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ \ f\ \ (x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3}\right\} \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ \left(-x+\tfrac{1}{2}y,z,2x-y+2z\right)=(0,0,0)\right\} \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ \begin{cases} -x+\frac{1}{2}y=0 \\ z=0 \\ 2x-y+2z=0 \end{cases}\right\} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ \begin{cases} 2x=y \\ z=0 \end{cases}\right\} \\ &= \{(x,2x,0)\,/\ x\in\mathbb{R}\ \}=\{x\,(1,2,0)\,/\ x\in\mathbb{R}\ \} \end{aligned}$$

ker$f$ est le sous espace véctoriel engendré par le vécteur $v = (1,2,0)$ et comme ce vécteur est non nul ,il forme une base pour ker$f$ et dim(ker$f$) = 1

Exercice 31 :

Considérons l'application f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$par $f\,(x,y) = (x+y, x-y)$.

1) Montrer que f est linéaire.

2) déterminer ker f , Im f et donner leurs dimension.f est elle bijective ?

3) déterminer $f \circ f$.. $f\,(x,y) = (x+y, x-y)$.

1) Montrer que f est linéaire.

Solution 31

f est linéaire $\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall\,(x,y)\,,(x',y',) \in \mathbb{R}^2$,

$f\,(\alpha\,(x,y) + \beta\,(x',y')) = \alpha f\,(x,y) + \beta f\,(x',y')$

$$\begin{aligned} f\,(\alpha\,(x,y) + \beta\,(x',y')) &= f\,(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') = ((\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y')\,, (\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y \\ &= (\alpha\,(x+y) + \beta\,(x'+y')\,, \alpha\,(x-y) + \beta\,(x'-y')) \\ &= (\alpha\,(x+y)\,, \alpha\,(x-y)) + (\beta\,(x'+y')\,, \beta\,(x'-y')) \\ &= \alpha\,((x+y)\,,(x-y)) + \beta\,((x'+y')\,,(x'+y')) \\ &= \alpha f\,(x,y) + \beta f\,(x',y') \text{ cela veut dire que } f \text{ est} \end{aligned}$$

linéaire

2) déterminons ker f , Im f et leurs dimension.

$\rightarrow$**ker**$f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \;\; f\,(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}\right\}$

$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \;\; (x+y, x-y) = (0,0)\right\}$

$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \;\; \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = y = 0\right\}$

$= \{(0,0)\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\} \Rightarrow$dim(ker$f$) = 0

$\rightarrow$ Im $f = \left\{f\,(x,y) \;/\;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{(x+y, x-y) \;/\;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

$= \left\{(x\;,\;x) \;\; + (y, -y) \,/\;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

$= \left\{x\,(1\;,\;1) \;\; + y\,(1,-1) \,/\;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Im f est le sous éspace véctoriel engendré par la famille de vécteurs $\{v_1 = (1,1) \;\; , v_2 = (1,-1)\}$,cette famille de vécteurs est - elle libre ?

$\rightarrow$ La famille de vécteurs $\{v_1 \;, v_2\;\}$est-elle libre ?

ie : $\forall\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \;\; / \; \alpha v_1 + \beta v_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$?

$\alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha\,(1,1) + \beta\,(1,-1) = (0,0) \Longrightarrow (\alpha + \beta, \alpha - \beta) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$

D'ou $\{v_1 \;, v_2\;\}$est libre et comme elle est génératrice ,elle forme une base pour Im f

$$\dim \mathrm{Im}\;\; f = 2$$

$\begin{cases} \text{Im}f \text{ est le sous éspace véctoriel de } \mathbb{R}^2 et \dim \mathrm{Im}\;\; f = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \Rightarrow f \text{ est surjective.} \\ dim\,(\ker f) = 0 \Rightarrow f \text{ est injective} \end{cases} \Rightarrow$

f est bijective.

3) déterminons $f \circ f$.

$f \circ f\,(x) = f\;\;(x+y, x-y) = (x+y+x-y, x+y-x+y) = 2\,(x,y) = 2id_{\mathbb{R}^2}\,(x,y)$

Exercice 32.

i) Considérons l'application f définie de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$

par $f\ (x, y, z, t) = (x + y, y - z, x + z)$.

Montrer que f est linéaire ; donner une base pour $\ker f$ et pour$\operatorname{Im} f$. Quel est le rang de f?

2i) Considérons l'application g définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$

par $g\ (x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$.

1. Montrer que g est un automorphismede $\mathbb{R}^3$. Quel est le rang de cette application ?

2. Déterminer $g \circ f$.

Solution 32

i) $f\ (x, y, z, t) = (x + y, y - z, x + z)$.

Montrons que f est linéaire

f est linéaire $\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall (x, y, z, t), (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$,

$f\ (\alpha (x, y, z, t) + \beta (x', y', z', t')) = \alpha f\ (x, y, z, t) + \beta f\ (x', y', z', t')$

$$\begin{aligned} f\ (\alpha (x, y, z, t) + \beta (x', y', z', t')) &= f\ (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z', \alpha t + \beta t') \\ &= ((\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y'), (\alpha y + \beta y') - (\alpha z + \beta z'), (\alpha x + \beta x') + (\alpha z + \beta z')) \\ &= (\alpha (x + y) + \beta (x' + y'), \alpha (y - z) + \beta (y' - z'), \alpha (x + z) + \beta (x' + z')) \\ &= (\alpha (x + y), \alpha (y - z), \alpha (x + z)) + (\beta (x' + y'), \beta (y' - z'), \beta (x' + z')) \\ &= \alpha ((x + y), (y - z), (x + z)) + \beta ((x' + y'), (y' - z'), (x' + z')) \\ &= \alpha f\ (x, y, z, t) + \beta f\ (x', y', z', t') \end{aligned}$$

cela veut dire que f est linéaire

$\rightarrow$déterminons $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ et leurs dimension.

$$\begin{aligned} \rightarrow \operatorname{Im} f &= \left\{ f\ (x, y, z, t)\ /\ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \right\} \\ &= \left\{ (x + y, y - z, x + z)\ /\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ (x\ , 0, x) + (y\ , y, 0) + (0, -z, z)\ /\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ x (1, 0, 1) + y (1, 1, 0) + z (0, -1, 1)\ /\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \end{aligned}$$

$\operatorname{Im} f$ est le sous espace engendré par $\{v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (0, -1, 1)\ \}$

Cette famille de vécteurs est - elle libre ?

On a : $v_3 = v_1 - v_2$;d'ou $\{v_1\ , v_2\ , v_3\}$est liée .

Or $\{v_1\ , v_2\ \}$est libre ;par suite cette famille forme une base pour $\operatorname{Im}\ f$ et $\dim \operatorname{Im}\ f = 2$

$$\begin{aligned} \rightarrow \mathbf{ker} f &= \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 /\ f\ (x, y, z, t) = 0_{\mathbb{R}^3} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 /\ (x + y, y - z, x + z) = (0, 0, 0) \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \left\{ \begin{array}{c} x + y = 0 \\ y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right. \right\} = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = -y = -z\ \right\} \\ &= \{(x, -x, -x, t) / x \in \mathbb{R}\} = \{x (1, -1, -1, 0) + t (0, 0, 0, 1)\ /\ x, t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$\ker\ f$ est le sous espace engendré par $\{v_1 = (1, -1, -1, 0), v_2 = (0, 0, 0, 1)\}$

Il facile de montrer que cette famille de vécteurs est libre ,par suite elle forme une base pour $\ker f$ $\Rightarrow$$\dim(\ker f) = 2$

$\rightarrow$le rang de cette application$=rg\,(f)=\dim\operatorname{Im}\ f=2$

2i) $g\ (x,y,z)=(y+z,x+z,x+y)$.

1. g est un automorphismede $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} g \text{ linéaire de } \mathbb{R}^3 dans\ \mathbb{R}^3 \\ g \text{ bijective} \Leftrightarrow \ker g=\{0_{\mathbb{R}^3}\} \Leftrightarrow \dim\operatorname{Im}\ g=3=rg\,(g) \end{cases}$

$\cdot g$ linéaire de $\mathbb{R}^3 dans\ \mathbb{R}^3$ (facile à montrer)

$\cdot \ker g=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/g\,(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3}\right\}$

$\ker g=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\,(y+z,x+z,x+y)=(0,0,0)\right\}$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\begin{cases} y+z=0\\ x+z=0\\ x+y=0\end{cases}\right\}$$

$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x=y=-z \text{ et } z=y\right\}$

$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x=y=z\ =0\right\}=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

$\cdot$Le rang de cette application : $rg\,(g)=\dim\operatorname{Im} g$

On a : $\dim\operatorname{Im}\ g+\dim\ker\ g=\dim\mathbb{R}^3=3\Longrightarrow\dim\operatorname{Im}\ g=3=rg\,(g)$

2. Déterminons $g\circ f$.

$g\circ f\,(x,y,z.t)=g\,(f\,(x,y,z.t))=g\,(x+y,y-z,x+z)=(y+x,\ 2x+y+z,\ x+2y-z)$

Exercice 33. Soient (e_1,e_2) et (u_1,u_2,u_3) les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

1. Donner l'application $f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^3$ qui vérifie

$$f\ \ (e_1)=2u_1-u_3, f\ \ (e_2)=u_3-u_1$$

2. Montrer que $\operatorname{Im} f$ est un sous espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

Solution 33

Soient (e_1,e_2) et (u_1,u_2,u_3) les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

1. Donner l'application $f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^3$ qui vérifie : $f\ (e_1)=2u_1-u_3, f\ (e_2)=u_3-u_1$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$; $(x,y)=(x,0)+(0,y)=x\,(1,0)+y\,(0,1)$

$\Rightarrow f\,(x,y)=xf\,(1,0)+yf\,(0,1)=x\,(2,0,-1)+y\,(-1,0,1)=(2x-y,0,-x+y)$

2. Montrer que $\operatorname{Im} f$ est un sous espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

$\rightarrow \operatorname{Im}\ f=\left\{f\ \ (x,y,z)\ \ /\ \ \ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$

$=\left\{(2x-y,0,-x+y)\ \ /\ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

$=\left\{(2x\ ,0,-x)+(-y\ ,0,y)\ \ /\ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

$=\left\{x\,(2,0,-1)+y\,(-1,0,1)\ \ /\ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

$\operatorname{Im} f$ est le sous espace engendré par $\{v_1=(2,0,-1)\,,v_2=(-1,0,1)\}$

$\rightarrow$ La famille de vécteurs $\{v_1\ ,v_2\ \}$est-elle libre ?

ie : $\forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \ /\ \alpha v_1+\beta v_2=0_{\mathbb{R}^3}\Longrightarrow\alpha=\beta=0$?

$\alpha v_1+\beta v_2=\alpha\,(2,0,-1)+\beta\,(-1,0,1)=(0,0)\Longrightarrow(2\alpha-\beta,0,-\alpha+\beta)=(0,0,0)\Rightarrow\begin{cases}2\alpha-\beta=0\\-\alpha+\beta=0\end{cases}\Longrightarrow\alpha=\beta=0$

D'ou $\{v_1\ , v_2\ \}$est libre et comme elle est génératrice ,elle forme une base pour Im f

$$\dim \mathrm{Im}\ \ f = 2$$

Chapitre 9

Matrices et Systèmes Linéaires

Exercices 34 :

Donner la matrice associée à chaque application linéaire suivant la base canonique

$$f: \quad \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \to (x - y + 2z \ , \ 3y - z \ , \ x) \end{array}$$

$$f: \quad \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \to (3x - y \ , \ 3y - x \ , \ 5x + 3y) \end{array}$$

Solution 34 :

$$f: \quad \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \to (x - y + 2z \ , \ 3y - z \ , \ x) \end{array}$$

On a : $\begin{cases} f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 0, 1) = e_1 + e_3 \\ f(e_2) = f(0, 1, 0) = (-1, 3, 0) = -e_1 + 3e_3 \\ f(e_3) = f(0, 0, 1) = (2, -1, 0) = 2e_1 - e_2 \end{cases}$

Dou :

$$M_{(B_3, B_3)}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

$$f: \quad \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \to (3x - y \ , \ 3y - x \ , \ 5x + 3y) \end{array}$$

On a : $\begin{cases} f(u_1) = f(1, 0) = (3, -1, 5) = 3e_1 - e_2 + 5e_3 \\ f(u_2) = f(0, 1) = (-1, 3, 3) = -e_1 + 3e_2 + 3e_3 \end{cases}$

Dou : $\quad f(u_1) \quad f(u_2)$

$$M_{(B_2,B_3)}(f) = \begin{array}{c c} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

Exercice 35 :

On considére la matrice suivante :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$dans $\mathbb{R}^2$dont la matrice suivant la base canonique B_4 et B_2 est A.

1) Determiner l'application f .

2) Montrer que B_4'=$(v_1 = (1,1,0,1)\,, v_2 = (-1,0,1,2)\,, v_3 = (1,2,3,4)\,, v_4 = (-1,1,3,0))$ forment une base pour$\mathbb{R}^4$.

3) Montrer que B_2'=$(u_1 = (1,2)\,, u_2 = (-1,0))$ forment une base pour $\mathbb{R}^2$.

4) Donner la matrice associée à f suivant les nouvelles bases B_4'et B_2'.

Solution 35 :

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

2) On a : determinant $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = -10 \neq 0$

Par suite :B_4'=$(v_1 = (1,1,0,1)\,, v_2 = (-1,0,1,2)\,, v_3 = (1,2,3,4)\,, v_4 = (-1,1,3,0))$ forment une base pour$\mathbb{R}^4$.

3) On a : determinant$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$

Par suite :B_2'=$(u_1 = (1,2)\,, u_2 = (-1,0))$ forment une base pour $\mathbb{R}^2$

4) Donner la matrice associée à f suivant les nouvelles bases B_4'et B_2'.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B_4' & & B_4 & & B_2 & & B_2' \\ & P & & A & & Q^{-1} & \end{array}$$

$$A' = Q^{-1} A \ \ P$$

la matrice A'associée à f suivant la base B_4'et B_2' est :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 5 & 15 & 5 \\ \frac{1}{2} & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Avec : $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, Q^{-1}= $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 36 :

On considére la matrice suivante :

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$dans $\mathbb{R}^3$dont la matrice suivant la base canonique

B $=(e_1, e_2, e_3)$ est A.

1) Determiner l'application f .

2)Soit la famille B'=$(v_1 = e_1 - e_3, v_2 = e_2 + e_3, v_3 = e_1 + e_3)$

Montrer que B'=(v_1, v_2, v_3)forment une base pour$\mathbb{R}^3$.

3) Donner la matrice associée à f suivant la nouvelle base B'.

Solution 36 :

On considére la matrice suivante :

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$dans $\mathbb{R}^3$dont la matrice suivant la base canonique

B $=(e_1, e_2, e_3)$ est A.

1)Déterminons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$dans $\mathbb{R}^3$dont la matrice suivant la base canonique B $=(e_1, e_2, e_3)$ est A.

$$f\ (x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (3x - y + z, 2y, x - y + 3z)$$

2)Soit la famille B'=$(v_1 = e_1 - e_3, v_2 = e_2 + e_3, v_3 = e_1 + e_3)$

Montrer que B'=(v_1, v_2, v_3)forment une base pour$\mathbb{R}^3$.

$$\det\{v_1 = (1\ , 0, -1)\,, v_2 = (0\ , 1, 1)\,, v_3 = (1, 0, 1)\ \} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Par suite : B'=(v_1, v_2, v_3)forment une base pour$\mathbb{R}^3$.

3) Donnons la matrice associée à f suivant la nouvelle base B'.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ =matrice de passage de la base B à la base B'.

$$P^{\ -1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ = matrice de passage de la base B'à la base B .

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{P} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{P^{\ -1}} & \mathbb{R}^3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B\ ' & & B & & B & & B\ ' \end{array}$$

$A' = P^{-1} A \ \ P$

la matrice A'associée à f suivant la base B' est :

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercices 37 :

1) Calculer les valeurs et les vécteurs propres des matrices suivantes : .

$$A= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} ; \quad A= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} ;A= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2) ces matrices sont-elles diagonalisables ?

Solution 37 :

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Les valeurs propres et les vecteurs propres :

λ valeur propre$\Longleftrightarrow$ $\det(A - \lambda Id_3) = 0$

$$\det(A - \lambda Id_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$$

$(-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0, \lambda = 1, \lambda = 2.$

les vecteurs propres :

pour $\lambda = 0$

$$E_0 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ x+2y+z \\ -x-2y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y, z = -3y$$

$E_0 = \{(y, y, -3y) / y \in \mathbb{R}\} = \{y(1, 1, -3) / y \in \mathbb{R}\}$

E_0 est engendré par le vecteur propre $(1, 1, -3)$ qui forme une base pour E_0

pour $\lambda = 1$

$$E_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ x+2y+z \\ -x-2y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0, y = -z$$

$E_1 = \{(0, -z, z) / z \in \mathbb{R}\} = \{z(0, -1, 1) / y \in \mathbb{R}\}$

E_1 est engendré par le vecteur propre $(0, -1, 1)$ qui forme une base pour E_1

pour $\lambda = 2$

$$E_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \right\}$$

$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y+z\\x+2y+z\\-x-2y-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}\Rightarrow x=-z, y=-z$

$E_2=\{(-z,-z,z)\,/z\in\mathbb{R}\}=\{z\,(-1,-1,1)\,/y\in\mathbb{R}\}$

E_2 est engendré par le vecteur propre $(-1,-1,1)$ qui forme une base pour E_2

2)A est diagonalisables car elle admet trois valeurs propres simples

$\rightarrow A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\0&2&0\\1&-1&3\end{pmatrix}$

1) $\rightarrow$ λ est une valeure propre de A ssi $\det(A-\lambda I)=0$

$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}3-\lambda&-1&1\\1&2-\lambda&0\\1&-1&3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+8\lambda^2-21\lambda+18=(\lambda-2)^2(\lambda-4)$

$\det(A-\lambda I)$=0$\Rightarrow\lambda=2$ racine double ; $\lambda=4$ racine simple

2) Calculons l'éspace propre associé à chaque valeur propre.

$\rightarrow \mathbf{E}_2=\left\{v=(x,y,z)\in\ \mathbb{R}^3/Av=2v\right\}$

$$=\left\{v=(x,y,z)\in\ \mathbb{R}^3/\begin{pmatrix}3&-1&1\\0&2&0\\1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\ \mathbb{R}^3/\begin{pmatrix}3x-y+z\\2y\\x-y+3z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\ \mathbb{R}^3/\begin{pmatrix}x-y+z\\-x-y+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\ \mathbb{R}^3/x=y-z\right\}=\{(y-z,y,z)\,/y,z\in\ \mathbb{R}\}$$

$$=\{(y,y,0)+(-z,0,z)\,/y,z\in\ \mathbb{R}\}$$

$$=\{y\,(1,1,0)+z\,(-1,0,1)\,/y,z\in\ \mathbb{R}\}$$

$\mathbf{E}_2$ est le sev engendré par les vecteurs propres $(1,1,0)$ et$(-1,0,1)$,par suite ces vécteurs forment une base pour $\mathbf{E}_2$ et $\dim\mathbf{E}_2=2$

$\rightarrow \mathbf{E}_4=\left\{v=(x,y,z)\in\ \mathbb{R}^3/Av=4v\right\}$

$$=\left\{v=(x,y,z)\in\ \mathbb{R}^3/\begin{pmatrix}3&-1&1\\0&2&0\\1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\ \mathbb{R}^3/\begin{pmatrix}3x-y+z\\2y\\x-y+3z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x\\4y\\4z\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} -x-y+z \\ y \\ x-y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = z \text{ et } y = 0 \right\} = \{(x,0,x) / x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x (1,0,1) / x \in \mathbb{R}\}$$

$\mathbf{E}_4$ est le sev engendré par le vecteurs propre non nul $(1,0,1)$,par suite ce vécteur forme une base pour $\mathbf{E}_4$ et $\dim \mathbf{E}_2 = 1$

On a :

$\dim \mathbf{E}_2 + dim \mathbf{E}_2 = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ par suite A est diagonalisable.

$\rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

1) $\rightarrow$ λ est une valeure propre de A ssi $\det(A - \lambda I) = 0$

$\det(A - \lambda I) = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$ et $\lambda = 3$

A est diagonalisables car elle admet deux valeurs propres simples distinctes.

Pour $\lambda = -1$ le vecteur propre associé est $\left\{ \begin{matrix} -3 \\ 1 \end{matrix} \right\}$

Pour$\lambda = 3$ le vecteur propre associé est$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}$

Exercice 38 :

Soit m$\in \mathbb{R}$.On considére la matrice suivante :

$$\text{A}_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

1) Calculer les valeurs et les vécteurs propres de A$_m$.

2) Montrer que A est diagonalisable

3) Pour m=2 , Montrer que :

B' $=\left(v_1 = \left(1+\sqrt{2}, 1, 0\right), v_2 = \left(1 - \sqrt{2}, 1, 0\right), v_3 = (0,0,1)\right)$ forment une base pour $\mathbb{R}^3$.

4) Pour m=2 ,déterminer f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$dans $\mathbb{R}^3$dont la matrice suivant la base canonique B $=(e_1, e_2, e_3)$ est A.

5) Calculer $ker\ f$; $Img\ f$ et leurs dimensions.

6) f est-elle bijective ?

7) Donner la matrice associée à f suivant la nouvelle base B'.

Solution 38 :

$$\text{A}_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

1) λ est une valeure propre de A_m ssi $\det(A_m - \lambda I_3) = 0$

$$\det(A_m - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} m-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & m-\lambda \end{vmatrix} = (m - \lambda)\left(\lambda^2 - m\ \lambda - 1\right)$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda = m; \lambda = \tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{2}\sqrt{m^2+4}; \lambda = \tfrac{1}{2}m - \tfrac{1}{2}\sqrt{m^2+4}$$

$\rightarrow v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$est un vécteur propre de A si $Av = \lambda v$

Pour $\lambda = m$: $Av = mv \iff \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx \\ my \\ mz \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour $\lambda = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\sqrt{m^2+4} : Av = \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\sqrt{m^2+4}\right) v$

$$\iff \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\sqrt{m^2+4}\right) x \\ \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\sqrt{m^2+4}\right) y \\ \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\sqrt{m^2+4}\right) z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\sqrt{m^2+4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda = \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\sqrt{m^2+4} : Av = \left(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\sqrt{m^2+4}\right) v$

$$\iff \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\sqrt{m^2+4}\right) x \\ \left(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\sqrt{m^2+4}\right) y \\ \left(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\sqrt{m^2+4}\right) z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\sqrt{m^2+4}\right) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

****

2) Les vécteurs propres sont :

$\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\} \leftrightarrow m \quad ; \left\{ \begin{matrix} \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\sqrt{m^2+4}\right) \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\sqrt{m^2+4}\right);$

$\left\{ \begin{matrix} \left(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\sqrt{m^2+4}\right) \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\sqrt{m^2+4}\right)$

→Les valeures propres sont distinctes $\left(\lambda = m \neq \lambda = \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\sqrt{m^2+4}\right) \neq \lambda = \left(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\sqrt{m^2+4}\right)\right)$

par suites A est diagonalisable .

****

3) B' $=(v_1, v_2, v_3)$ forment une base pour $\mathbb{R}^3 ssi$ $\mathbf{det}(v_1, v_2, v_3) \neq 0$

$\mathbf{det}(v_1, v_2, v_3) = \det\left(\left(1+\sqrt{2}, 1, 0\right), \left(1-\sqrt{2}, 1, 0\right), (0,0,1)\right)$

$$= \begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\sqrt{2} \neq 0$$

****

4) pour m=2

$f\ (x,y,z) = A_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2x+y, x, 2z)$

****

5)$\rightarrow$**ker**$f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ f \ (x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ (2x+y \ , \ x \ , \ 2z) = (0,0,0)\}$

$$=\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ \left\{\begin{array}{c} 2x+y=0 \\ x=0 \\ 2z=0 \end{array}\right.\right\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x=y=z=0 \ \}$$

$=\{0_{\mathbb{R}^3}\} \Longrightarrow \dim(\ker f) = 0$

$\rightarrow$ Im $f = \{f \ (x,y,z) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$

$=\{(2x+y \ , x, \ 2z) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$

$=\{(2x \ , x, \ 0) \ + (y,0, \ 0) + (0,0,2z) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$

$=\{x \ (2,1,0) \ + y \ (1,0, \ 0) + z \ (0,0,2) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$

Im f est le sous éspace véctoriel engendré par la famille de vécteur $\{ \ (2,1,0) \ , (1,0, \ 0) \, , (0,0,2)\}$

Or :det $(\ (2,1,0) \ , (1,0, \ 0) \, , (0,0,2)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

Par suite cette famille est libre et donc forme une base pour Im f et $\dim(\mathrm{Im} f) = 3$

****

6) $\rightarrow$On a :Im f est un sous éspace véctoriel de $\mathbb{R}^3$et $\dim(\mathrm{Im} f) = 3 = dim$ $\mathbb{R}^3$par suite : Im$f = \mathbb{R}^3$et donc f est surjéctive .

$\rightarrow\dim(\ker f) = 0 \Longrightarrow f$ est injéctive .

D'ou f est bijéctive .

****

7) $\mathbb{R}^3 \ \rightarrow \ \mathbb{R}^3 \ \rightarrow \mathbb{R}^3 \ \rightarrow \ \mathbb{R}^3$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$B' \quad B \quad B \quad B'$

$P \quad A \quad P^{\ -1}$

$$A' = P^{\ -1} A \ \ P$$

Avec :

$P = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ =matrice de passage de la base B à la base B'.

$P^{\ -1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ =matrice de passage de la base B'à la base B .

la matrice A'associée à f suivant la base B' est :

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 39 :

Résoudre les systémes suivants

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y+z=2 \\ x+2y+z=1 \end{cases} ; \begin{cases} x+3y-z=0 \\ 2x+2y-4z=3 \\ -x+y+3z=-3 \end{cases} ; \begin{cases} 3x+4y+z+t=1 \\ 6x+8y+2z=2 \\ 9x+12y+3z=-1 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ -x+2y=2 \\ -5x-5y-5z=1 \end{cases} ; \begin{cases} x+y+z=2 \\ -x-y-z=-2 \\ 2x+2y+2z=0 \end{cases}$$

Solution 39 :

1) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y+z=2 \\ x+2y+z=1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff AX=b$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$le systéme est de Cramer

Par suite :$\to x = \dfrac{1}{1} \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -1$

$\to y = \dfrac{1}{1} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2$

$\to z = \dfrac{1}{1} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$

2) $\begin{cases} x+3y-z=0 \\ 2x+2y-4z=3 \\ -x+y+3z=-3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \iff$ $AX=b$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$le systéme n'est pas de Cramer et le rgA$\neq$3

Or :$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$ donc le rgA= 2

Considerons le systéme suivant :

$\begin{cases} x+3y=z \\ 2x+2y=3+4z \end{cases}$ qui est de Cramer ;par suite :

$x = \dfrac{1}{-4} \det \begin{pmatrix} z & 3 \\ 3+4z & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{5}{2} z + \dfrac{4}{9}$

$y = \dfrac{1}{-4} \det \begin{pmatrix} 1 & z \\ 2 & 3+4z \end{pmatrix} = \dfrac{-1}{2} z - \dfrac{3}{4}$

Vérifion l'équation réstente :

$-x+y+3z=-3$
$-\left(\frac{5}{2}z+\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{-1}{2}z-\frac{3}{4}\right)+z=-3=-3$
l'équation est vérifiée .
et donc le systéme admet une infinité de solution.
Calculons le le rgA
$\det\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 6 & 8 & 2\\ 9 & 12 & 3\end{pmatrix}=0;\det\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 6 & 8 & 0\\ 9 & 12 & 0\end{pmatrix}=0\det\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 6 & 2 & 0\\ 9 & 3 & 0\end{pmatrix}=0;\det\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 8 & 2 & 0\\ 12 & 3 & 0\end{pmatrix}=$
0
Tous les mineurs d'ordre 3 ont un déterminant nul.

Or :$\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=-2\neq 0$ donc le rgA$=2$
Considerons le systéme suivant :
$$\begin{cases} z+t=1-3x-4y \\ 2z=2-6x-8y \end{cases} \text{ qui donne :}$$
$z=1-3x-4y$ et $t=0$
Vérifion la 3^{eme} équation :
$9x+12y+3z=9x+12y+3\left(1-3x-4y\right)=3\neq -1$
l'équation n'est pas vérifiée et donc le systéme n'admet pas de solution .
$$4)\begin{cases} x+y+z=3 \\ -x+2y=2 \\ -5x-5y-5z=1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ -5 & -5 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\iff$$
$AX=b$

$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ -5 & -5 & -5\end{pmatrix}=0\Rightarrow$le systéme n'est pas de Cramer et le rgA$\neq 3$

Or :$\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=3\neq 0$ donc le rgA$=2$
Considerons le systéme suivant :
$$\begin{cases} x+y=3-z \\ -x+2y=2 \end{cases} \text{ qui est de Cramer ;par suite :}$$
$x=\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix}3-z & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}z$
$y=\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix}1 & 3-z\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}z$
Vérifion l' équation réstente :
$-5x-5y-5z=1$
$-5\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}z\right)-5\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{3}z\right)-5z=-15\neq 1$
l'équation n'est pas vérifiée et donc le systéme n'admet pas de solution .

5) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ -x-y-z=-2 \\ 2x+2y+2z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$

$AX = b$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$le systéme n'est pas de Cramer et le rgA$\neq 3$

Tous les mineurs d'ordres 2 ont un déterminant nul ,donc le rgA$\neq 2$,

le rgA$= 1$

Considerons le systéme suivant :

$x = 2 - y - z$

Vérifions les 2 équations réstentes :

1) $-x-y-z=-2+y+z-y-z=-2$ l'équation est vérifiée .

2) $2x+2y+2z=2\,(2-y-z)+2y+2z=4\neq 0$

l'équation n'est pas vérifiée et donc le systéme n'admet pas de solution .

Chapitre 10

Les Intégrales Simples

Exercices 40 :

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int \left(x^2 - x\right) \cos x dx$; 2) $\displaystyle\int \arctan g\left(x\right) dx$; 3) $\displaystyle\int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx$;

5) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2 - 5x + 6} dx$; 6) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 2x + 3} dx$; 7) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$; 8) $\displaystyle\int \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} dx$

9) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{\left(x - 1\right)^3\left(x + 3\right)} dx$; 10) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 7}{\left(x^2 + 2\right)} dx$; 11) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$;

12) $\displaystyle\int \frac{x^3 - x + 2}{\left(x^3 - 2x^2 + 2x\right)} dx$; 13) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x + 3}{\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + x - 2\right)} dx$; 14) $\displaystyle\int \frac{x^3 - x^2 + 1}{\left(x + 1\right)\left(x^3 + 1\right)} dx$.

Solution 40 :

$\rightarrow$ 1) $\int \left(x^2 - x\right) \cos x dx$

Intégration par partie

On pose : $u = \left(x^2 - x\right) \Rightarrow du = 2x - 1$

$dv = \cos x \Rightarrow v = \sin x$

$\int \left(x^2 - x\right) \cos x dx = uv - \int du\ v = \left(x^2 - x\right) \sin x - \int \left(2x-1\right) \sin x\ dx$

Intégrons par partie une deuxième fois

Posons : $u = 2x - 1 \Rightarrow du = 2$

$dv = \sin x \Rightarrow v = \cos x$

$\int \left(2x-1\right) \sin x = \left(2x-1\right) \cos x - \int 2\cos x\ dx = \left(2x-1\right) \cos x - 2\sin x$

Par suite : $\int \left(x^2 - x\right) \cos x dx = \left(x^2 - x\right) \sin x - \left(2x-1\right) \cos x + 2\sin x = \left(x^2 - x + 2\right) \sin x - \left(2x-1\right) \cos x + cste$

$\rightarrow$ 2) $\displaystyle\int \arctan g\left(x\right)\ dx$

Intégration par partie

On pose :$u = \arctan g(x) \Rightarrow du = \dfrac{1}{1+x^2}$

$dv = 1 \Rightarrow v = x$

$\displaystyle\int \arctan g(x)\ dx = x \arctan g(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx$

$= x \arctan g(x) - \frac{1}{2} \log\left(1+x^2\right) + cste$

$\rightarrow$ 3) $\displaystyle\int \frac{\ln x - 1}{x^2}\ dx$

Intégration par partie

On pose :$u = \ln x - 1 \Rightarrow du = \dfrac{1}{x} dx$

$dv = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow v = -\dfrac{1}{x}$

$\displaystyle\int \frac{\ln x - 1}{x^2}\ dx = -\frac{(\ln x - 1)}{x} + \int \frac{1}{x^2}\ dx = -\frac{(\ln x - 1)}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{x}$

$\rightarrow$ 4)$\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx$

Posons :$u = \dfrac{1}{x} \Rightarrow du = \dfrac{-1}{x^2} dx, x = \dfrac{1}{u}$ et $dx = \dfrac{-1}{u^2} du$

$\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx = -\int \frac{u}{u^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2}} du = -\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du = -\arg shu + cste = -\arg sh\frac{1}{x} + cste$

$\rightarrow$ 5) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2 - 5x + 6}\ dx$

On a :$\dfrac{2x+3}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{2x+3}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x-3}$ avec $a = -7$ et $b = 9$

Ainsi :$\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2 - 5x + 6}\ dx = \int \left(\frac{-7}{x-2} + \frac{9}{x-3}\right) dx = -7 \ln|x-2| + 9 \ln|x-3| + cste$

$\rightarrow$ 6) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 2x + 3}\ dx$

On a :$x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 = 2\left(1 + \left(\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = 2\left(1+t^2\right)$

Avec $t = \dfrac{x-1}{\sqrt{2}}$ et $dx = \sqrt{2} dt$

$\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 2x + 3}\ dx = \int \frac{\sqrt{2} dt}{2\left(1+t^2\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} arctgt + cste = \frac{\sqrt{2}}{2} arctg\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + cste$

$\rightarrow$ 7)$\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$

On a :$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

$$= \tfrac{3}{4}\left(1+\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2\right) = \tfrac{3}{4}\left(1+t^2\right)$$

Avec $t = \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$ et $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$

$\displaystyle\int \frac{1}{x^2\ +\ x\ +\ 1}dx = \int \frac{3\sqrt{3}}{8}\left(1+t^2\right)dt = \frac{3\sqrt{3}}{8}arctgt{+}cste = \frac{3\sqrt{3}}{8}arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+$ $cste$

$\rightarrow$ 8) $\displaystyle\int \frac{x\ +\ 1}{x^2\ +\ x\ +\ 1}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x\ +\ 2}{x^2\ +\ x\ +\ 1}\ dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{2x\ +\ 1}{x^2\ +\ x\ +\ 1}+\frac{1}{x^2\ +\ x\ +\ 1}\right)$ dx

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2\ +\ x\ +\ 1\right| + \frac{3\sqrt{3}}{8}arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$\rightarrow$ 9)$\displaystyle\int \frac{x^2\ +\ 1}{\left(x\ -\ 1\right)^3\left(x\ +\ 3\right)}\ dx$

$\dfrac{x^2\ +\ 1}{\left(x\ -\ 1\right)^3\left(x\ +\ 3\right)} = \dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{\left(x-1\right)^2}+\dfrac{c}{\left(x-1\right)^3}+\dfrac{d}{(x+3)}$

avec $a = \frac{5}{32}$, $b = \frac{3}{8}$,$c = \frac{1}{2}$, $d = \frac{-5}{32}$

$\displaystyle\int \frac{x^2\ +\ 1}{\left(x\ -\ 1\right)^3\left(x\ +\ 3\right)}\ dx = \frac{5}{32}\int \frac{dx}{x-1}+\frac{3}{8}\int \frac{dx}{\left(x-1\right)^2}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-1\right)^3}-\frac{5}{32}\int \frac{dx}{(x+3)}$

$$= \tfrac{5}{32}\ln|x-1| - \frac{3}{8\left(x-1\right)} - \frac{1}{4\left(x-1\right)^2} -$$

$\dfrac{5}{32}\ln|x+3| + cste$

$\rightarrow$ 10) $\displaystyle\int \frac{x^3+\ 3x^2\ +5x\ +7}{\left(x^2\ +\ 2\right)}\ dx$

$\dfrac{x^3+\ 3x^2\ +5x\ +7}{\left(x^2\ +\ 2\right)} = x+3+\dfrac{3x+1}{\left(x^2+2\right)} = x+3+\dfrac{3x}{\left(x^2+2\right)}+\dfrac{1}{\left(x^2+2\right)}$

$\displaystyle\int \frac{x^3+\ 3x^2\ +5x\ +7}{\left(x^2\ +\ 2\right)}\ dx = \int\left(x+3+\frac{3x}{\left(x^2+2\right)}+\frac{1}{\left(x^2+2\right)}\right)dx$

$$= \frac{x^2}{2}+3x+\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2\right)+\int \frac{1}{\left(x^2+2\right)}dx$$

Or $\displaystyle\int \frac{1}{\left(x^2+2\right)}dx = \int \frac{1}{2\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)}dx = \int \frac{\sqrt{2}}{2\left(t^2+1\right)}dt$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+cste$$

$\rightarrow$ 11)$\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx = \int\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)dx = x - 2arctgx + cste$

$\rightarrow$ 12)$\displaystyle\int \frac{x^3-x+2}{\left(x^{\ 3}-2\ x^2+2x\right)}\ dx$

$\dfrac{x^3 - x + 2}{(x^{\ 3} - 2\ x^2 + 2x)} = 1 + \dfrac{2x^2 - 3x + 2}{(x^{\ 3} - 2\ x^2 + 2x)}$

Or $x^{\ 3} - 2\ x^2 + 2x = x\left(x^2 - 2x + 2\right)$

$1 + \dfrac{2x^2 - 3x + 2}{(x^{\ 3} - 2\ x^2 + 2x)} = 1 + \dfrac{2x^2 - 3x + 2}{x\,(x^2 - 2x + 2)} = 1 + \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx + c}{(x^2 - 2x + 2)}$

Avec : $a = 1, b = 1$ et $c = -1$

Ainsi : $\displaystyle\int \frac{x^3 - x + 2}{(x^{\ 3} - 2\ x^2 + 2x)}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{-x + 1}{(x^2 - 2x + 2)}\right) dx = 1 + \ln|x| + \int \left(\frac{-x + 1}{(x^2 - 2x + 2)}\right) dx$

Or $\displaystyle\int \left(\frac{-x + 1}{(x^2 - 2x + 2)}\right) dx = -\tfrac{1}{2} \int \left(\frac{2x - 2}{(x^2 - 2x + 2)}\right) dx = -\tfrac{1}{2} \ln\left|x^2 - 2x + 2\right| + cste$

Finallement : $\displaystyle\int \frac{x^3 - x + 2}{(x^{\ 3} - 2\ x^2 + 2x)}\ dx = 1 + \ln|x| - \tfrac{1}{2} \ln\left|x^2 - 2x + 2\right| + cste$

$\rightarrow$ 13) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x + 3}{(x^2 - 1)\,(x^2 + x - 2)}$

On a : $\dfrac{x^3 - 2x + 3}{(x^2 - 1)\,(x^2 + x - 2)} = \dfrac{x^3 - 2x + 3}{(x - 1)^2\,(x + 1)\,(x + 2)} = \dfrac{a}{x - 1} + \dfrac{b}{(x - 1)^2} + \dfrac{c}{(x + 1)} + \dfrac{d}{(x + 2)}$

Avec : $a = -\dfrac{1}{9}, b = \dfrac{1}{3}$, $c = 1$et $d = \dfrac{1}{9}$

$\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x + 3}{(x^2 - 1)\,(x^2 + x - 2)} = a \ln|x - 1| - \frac{b}{(x - 1)} + c \ln|x + 1| + +d \ln|x + 2|$

$\rightarrow$ **14**) $\displaystyle\int \frac{x^3 - x^2 + 1}{(x\ +\ 1)\,(x^{\ 3} +\ 1)} dx$

On a : $\dfrac{x^3 - x^2 + 1}{(x\ +\ 1)\,(x^{\ 3} +\ 1)} = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{(x\ +\ 1)^2\,(x^{\ 2} - x + 1)}$

$= \dfrac{A}{(x\ +\ 1)} + \dfrac{B}{(x\ +\ 1)^2} + \dfrac{C\ x + D}{(x^{\ 2} - x + 1)}$

Avec : $A = \dfrac{4}{3}; B = \dfrac{-1}{3}; C = \dfrac{-1}{3}; D = 0$

D'ou : $\displaystyle\int \frac{x^3 - x^2 + 1}{(x\ +\ 1)\,(x^{\ 3} +\ 1)}\ dx\ =$

$\displaystyle\int \left(\frac{4}{3\,(x\ +\ 1)} - \frac{1}{3\,(x\ +\ 1)^2} - \frac{x}{3\,(x^{\ 2} - x + 1)}\right) dx\ =$

$\displaystyle\frac{4}{3} \log|x + 1| + \frac{1}{3\,(x\ +\ 1)} - \frac{1}{6} \int \frac{2\ x - 1 + 1}{(x^{\ 2} - x + 1)} dx =$

$$\frac{1}{3\,(x\ +\ 1)}+\frac{4}{3}\log|x+1|-\frac{1}{6}\log\left|x^2-x+1\right|-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{(x^{\ 2}-x+1)}$$

Or : $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^{\ 2}-x+1)}=\int\frac{dx}{\left(\left(x\ -\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)}=\frac{4}{3}\int\frac{dx}{\left(\left(\frac{2x\ -1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}$

Posons : $t=\dfrac{2x\ -1}{\sqrt{3}}\Rightarrow dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}dt$

$$\int\frac{dx}{(x^{\ 2}-x+1)}=\frac{4}{3}\int\frac{dx}{\left(\left(\frac{2x\ -1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}=\frac{4}{3}\int\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dt}{t^2+1}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\int\frac{dt}{t^{\ 2}+1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}arctg\,t=\frac{2\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{2x\ -1}{\sqrt{3}}\right)+cste$$

Et donc :

$$\int\frac{x^3-x^2+1}{(x\ +\ 1)\,(x^{\ 3}+\ 1)}\ dx\ \ =$$

$$\frac{1}{3\,(x\ +\ 1)}+\frac{4}{3}\log|x+1|-\frac{1}{6}\log\left|x^2-x+1\right|-\frac{2\sqrt{3}}{18}arctg\left(\frac{2x\ -1}{\sqrt{3}}\right)+cste$$

Exercices 41 :

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\ x}{6-5\sin x\ +\sin^2\ x}dx$; 2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{3\ +\ \cos x}dx$; 3) $\displaystyle\int sinx\ sin2x\ sin3x\ dx$

4) $\displaystyle\int\frac{sinx-cosx}{4\ +\ \cos x\ +\ \sin x}dx$; 5) $\displaystyle\int\sin^{\ 6}x\ \cos^3\ x\ dx$; 6) $\displaystyle\int\frac{2cosx}{1+\ \cos\ x}dx$, 7) $\displaystyle\int\frac{tg\ x}{1\ +\ \cos x}dx$

8) $\displaystyle\int\frac{x}{\cos^{\ 2}x}dx$; 9) $\displaystyle\int\frac{1}{1\ +\ \cos x\ +\ \sin x}dx$

Solution 41 :

$\rightarrow$ 1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\ x}{6-5\sin x\ +\sin^2\ x}dx$

Posons : $t=\sin x$; $dt=\cos x\ dx$; $\sin\ 0=0$ et $\sin\frac{\pi}{2}=1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\ x}{6-5\sin x\ +\sin^2\ x}dx=\int_0^1\frac{dt}{6-5t\ +t^2}=$$

$$\frac{1}{t^2\ -\ 5t\ +\ 6}=\frac{1}{(t-2)\,(t-3)}=\frac{a}{t-2}+\frac{b}{t-3}\ \text{avec } a=-1 \text{ et } b=1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\ x}{6-5\sin x\ +\sin^2\ x}dx\ =\ \int_0^1\left(\frac{-1}{t-2}+\frac{1}{t-3}\right)dt\ =\ \left[\ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right|\right]_0^1\ =$$

$2\ln 2-\ln 3=\ln 4-\ln 3$

$\rightarrow$ 2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{3\ +\ \cos x}dx$

Posons : $t = tg\ \dfrac{x}{2}$; $dx = \dfrac{2dt}{1+t^{\,2}}$; $\cos x = \dfrac{1-t^{\,2}}{1+t^{\,2}}$ avec $tg\ 0 = 0$ et $tg\frac{\pi}{2} = +\infty$

$3+\cos x = 3+\dfrac{1-t^{\,2}}{1+t^{\,2}} = \dfrac{3+3t^{\,2}+1-t^{\,2}}{1+t^{\,2}} = \dfrac{2\left(t^{\,2}+2\right)}{1+t^{\,2}}$

$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{3\ +\ \cos x}dx = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t^{\,2}+2)} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

$\rightarrow$ 3) $\displaystyle\int sinx\ sin2x\ sin3x\ dx$

On a $sin2x\ sin3x = \frac{1}{2}\left(\cos x - \cos 5x\right)$

$sinx\ sin2x\ sin3x = \frac{1}{2}\left(\cos x-\cos 5x\right) sinx$

$\quad = \frac{1}{2}\left(\cos x-\cos 5x\right) sinx\ = \frac{1}{4}\left(\sin 2x - \sin 6x - \sin\left(-4x\right)\right)$

D'ou $\displaystyle\int sinx\ sin2x\ sin3x\ dx = \frac{1}{4}\int\left(\sin 2x-\sin 6x+\sin\left(4x\right)\right) = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{6}\cos 6x-\frac{1}{4}\cos 4x\right)+$ $cste$

$\rightarrow$ 4)$\displaystyle\int\frac{sinx-cosx}{4\ +\ \cos x\ +\ \sin x}dx$

Posons : $t = tg\ \dfrac{x}{2}$; $dx = \dfrac{2dt}{1+t^{\,2}}$; $\cos x = \dfrac{1-t^{\,2}}{1+t^{\,2}}$;$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^{\,2}}$

$$\frac{sinx-cosx}{4\ +\ \cos x\ +\ \sin x} = \frac{\dfrac{2t}{1+t^{\,2}}-\dfrac{1-t^{\,2}}{1+t^{\,2}}}{4\ +\ \dfrac{2t}{1+t^{\,2}}+\dfrac{1-t^{\,2}}{1+t^{\,2}}} = \frac{t^2+2t-1}{3t^2+2t+5}$$

$$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{t-2}{4\left(3t^2+2t+5\right)}\right) = \frac{1}{3}\left(1+\frac{6t+2}{24\left(3t^2+2t+5\right)}-\frac{7}{12\left(3t^2+2t+5\right)}\right)$$

$$\int\frac{sinx-cosx}{4\ +\ \cos x\ +\ \sin x}dx = \int\frac{1}{3}\left(1+\frac{6t+2}{24\left(3t^2+2t+5\right)}-\frac{7}{12\left(3t^2+2t+5\right)}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{3}\left(t+\frac{1}{24}\ln\left|\left(3t^2+2t+5\right)\right|\right)-\frac{7}{36}\int\frac{dt}{\left(3t^2+2t+5\right)}$$

Calculons :$\displaystyle\int\frac{dt}{\left(3t^2+2t+5\right)}$

On a :$\left(3t^2+2t+5\right) = \left(\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\dfrac{14}{3} = \dfrac{14}{3}\left(1+z^2\right)$ avec

$z = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{14}\left(\dfrac{3t+1}{3}\right)$ et $dz = \sqrt{14}dt$

$\displaystyle\int\frac{dt}{\left(3t^2+2t+5\right)} = \int\frac{dt}{\left(3t^2+2t+5\right)} = \int\frac{dz}{\sqrt{14}\frac{14}{3}\left(1+z^2\right)} = \frac{3}{14\sqrt{14}}arctg\ z+$ $cste$

$$= \left[\frac{3}{14\sqrt{14}}arctg\left(\sqrt{14}\left(\frac{3t+1}{3}\right)\right)\right]+cste$$

Par suite : $\displaystyle\int\frac{sinx-cosx}{4\ +\ \cos x\ +\ \sin x}dx\ =\ \frac{1}{3}\ \left(t+\frac{1}{24}\ln\left|\left(3t^2+2t+5\right)\right|\right)-$ $\displaystyle\frac{1}{24\sqrt{14}}arctg\left(\sqrt{14}\left(\frac{3t+1}{3}\right)\right)+cste$

****

5) $\int \sin^6 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^6 x\ \cos^2 x \cos x\, dx = \int \sin^6 x \left(1-\sin^2 x\right)$ cos $x\ dx$

Posons : $t = \sin x$; $dt = \cos x\ dx$

$$\int \sin^6 x \cos^3 x\ dx = \int t^6 \left(1-t^2\right)\ dt = \int \left(t^6 - t^8\right) dt$$

$$= \tfrac{1}{7}t^7 - \tfrac{1}{9}t^9 + c\ /\ c \in \mathbb{R}$$

$$= \tfrac{1}{7}\left(\sin x\right)^7 - \tfrac{1}{9}\left(\sin x\right)^9 + c\ /\ c \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow$ 6) $\int \frac{2\cos x}{1+\ \cos\ x} dx$

Posons : $t = tg\frac{x}{2}$; $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$; ; $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\int \frac{2\cos x}{1+\ \cos\ x} dx = \int \frac{2\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}{1+\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\ \left(\frac{2dt}{1+t^2}\right)$$

$$= \int -2\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right) dt$$

$$= \int \left(-2+\frac{4}{t^2+1}\right) dt$$

$$= -2t + 4arctgt + c$$

$$\int \frac{2\cos x}{1+\ \cos\ x} dx = -2tg\tfrac{x}{2} + 2x + c$$

$\rightarrow$ 7) $\int \dfrac{tg\ x}{1\ +\ \cos x} dx\ = \int \dfrac{\sin\ x}{\cos x\ \left(1\ + \cos x\right)} dx$

Posons : $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x\ dx$

$\int \dfrac{tg\ x}{1\ +\ \cos x} dx\ = \int \dfrac{-dt}{t\ \left(1\ + t\right)}\ = \int \dfrac{dt}{\left(1\ + t\right)} - \int \dfrac{dt}{t}\ = \log\left|\dfrac{1+\cos x}{\cos x}\right| + cste$

$\rightarrow$ 8) $\int \dfrac{x}{\cos^2 x} dx$ intégrons par partie.

Posons : $u'\left(x\right) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow u\ \left(x\right) = tg\ x$

$v\ \left(x\right) = x \Rightarrow v'\left(x\right) = 1$

D'ou : $\int \dfrac{x}{\cos^2 x} dx = x\ tg\ x - \int tg\ x\ dx = x\ tg\ x + \log\left|\cos x\right| + cste$

$\rightarrow$ 9) $\int \dfrac{1}{1\ +\ \cos x\ +\ \sin x} dx$

Posons : $t = tg\ \dfrac{x}{2}$; $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$; $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$1 + \cos x + \sin x = 1 + \dfrac{1-t^2}{1+t^2} + \dfrac{2t}{1+t^2} = 2\dfrac{1+t}{1+t^2}$

$$\int \frac{1}{1\ +\ \cos x\ +\ \sin x} dx = \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{2\dfrac{1+t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \log\left|1+t\right| = \log\left|1+tg\frac{x}{2}\right| +$$

cste

Exercices 42 :

1) Calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int \frac{x}{x^2\ +\ 2\ x\ -\ 3}dx$

2)En déduire : $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x\ -\ 3\ e^{-x}\ \ +\ 2}dx$

Solution 42 :

1) Calculons l'intégrale suivante : $\displaystyle\int \frac{x}{x^2\ +\ 2\ x\ -\ 3}dx$

On a :$x^2\ +2\ x\ -3 = (x-1)(x+3)$ et

$$\frac{x}{x^2\ +\ 2\ x\ -\ 3} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}$$

Avec : $a = \dfrac{1}{4}; b = \dfrac{3}{4}$

$$\int \frac{x}{x^2\ +\ 2\ x\ -\ 3}dx = \int \left(\frac{1}{4\,(x-1)} + \frac{3}{4\,(x+3)}\right)dx$$

$$\int \frac{x}{x^2\ +\ 2\ x\ -\ 3}dx = \frac{1}{4}\log|x-1| + \frac{3}{4}\log|x+3| + cste$$

2)En déduire : $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x\ -\ 3\ e^{-x}\ \ +\ 2}dx$

Posons : $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

$$\int \frac{e^x}{e^x\ -\ 3\ e^{-x}\ \ +\ 2}dx = \int \frac{1}{t\ -\ 3\ \frac{1}{t}\ \ +\ 2}dt = \int \frac{t}{t^{\ 2}\ +\ 2\ t\ -\ 3}dt$$

d'après la question 1

$$\int \frac{e^x}{e^x\ -\ 3\ e^{-x}\ \ +\ 2}dx = \frac{1}{4}\log|e^x-1| + \frac{3}{4}\log|e^x+3| + cste$$

Exercice 43 :

1) Calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int \frac{1}{x\ \ (x^3\ +\ 1)}dx$

2)En déduire : $\displaystyle\int \frac{x^2\ \log\ x}{(x^3\ +\ 1)^2}\ dx$

Solution 43 :

1) Calculons l'intégrale suivante : $\displaystyle\int \frac{1}{x\ \ (x^{\ 3}\ +\ 1)}dx$

on a : $\displaystyle\int \frac{1}{x\ \ (x^{\ 3}+1)}dx = \int \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+e}{x^2-x+1}dx.$

$a = 1, b = \dfrac{-1}{3}, c = \dfrac{-2}{3}, e = \dfrac{1}{3}$

$$\int \frac{1}{x\ \ (x^{\ 3}+1)}dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{\frac{-1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{-2}{3}x + \frac{1}{3}}{x^2-x+1}\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx + \left(\frac{-1}{3}\right)\int \frac{1}{x+1}dx + \left(\frac{-1}{3}\right)\int \frac{2x-1}{x^{\ 2}-x+1}dx$$

$$= \log|x| - \frac{1}{3}\log(x+1) - \frac{1}{3}\log\left(x^2-x+1\right) + C$$

2)En déduire : $\displaystyle\int \frac{x^2 \ \log \ x}{\left(x^3 \ + \ 1\right)^2} \ dx$

Intégrons par partie :

Posons $v\ (x) = \log x \Rightarrow v'\ (x) = \dfrac{1}{x}$

$$u'\ (x) = \frac{x^2}{\left(x^3+1\right)^2} \Rightarrow u\ (x) = -\frac{1}{3}\frac{1}{x^3+1}$$

$\int \dfrac{x^2 \log x}{\left(x^3+1\right)^2} dx = \dfrac{-\log x}{3x^3+1} + \frac{1}{3} \int \dfrac{1}{x\ \ (x^3+1)} dx$

d'après la question 1

$\int \dfrac{1}{x\,(x^3+1)} dx = \log|x| - \frac{1}{3}\log(x+1) - \frac{1}{3}\log\left(x^2-x+1\right) + cste$

alors

$\int \dfrac{x^2 \log x}{\left(x^3+1\right)^2} dx = \dfrac{-\log x}{3x^3+1} + \frac{1}{3}\left(\log|x| - \frac{1}{3}\log(x+1) - \frac{1}{3}\log\left(x^2-x+1\right)\right) + cste$

Chapitre 11

Les équations différentielles

Exercice 44 :
Résoudre les équations différentielles d'ordre 1 suivantes :
1) $\dfrac{y'}{1+y} = \dfrac{1}{x^2-1}$
2) $\dfrac{-y\ y'}{1-y^2} = x-1$
3) $y' = \dfrac{y}{x} - 1$
4) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)}$
5) $y' \sin x - y \cos x = 1$
6) $y' - \dfrac{y}{x-1} = 1 + x$
7) $y' - ytg\ x = \sin x$
8) $xy' - (1+2x)\, y = -x^2 e^x$
9) $xy' + y - x\ y^2 \log x = 0$
10) $y' - \dfrac{y}{x} + \dfrac{5}{2} x^2 y^3 = 0$
Solution 44
Résolution des équations différentielles d'ordre 1 :
$\rightarrow$ 1) $\dfrac{y'}{1+y} = \dfrac{1}{x^2-1}$

Equation différentielle à varible séparable :

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{1+y} = \frac{1}{x^2-1} \Rightarrow \frac{dy}{1+y} = \frac{dx}{x^2-1} \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y} = \int \frac{dx}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{1+y} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$\Rightarrow \ln|y+1| = \dfrac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|) = \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|^{\frac{1}{2}} + c \quad /c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y+1 = k\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|^{\frac{1}{2}} /c \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$y = k\left|\frac{x+1}{x-1}\right|^{\frac{1}{2}} - 1 \ / \ k \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow 2)\dfrac{-y\ y'}{1-y^2} = x-1$

Equation différentielle à varible séparable :

$\dfrac{-y\ \frac{dy}{dx}}{1-y^2} = x-1 \Rightarrow \dfrac{-y\ dy}{1-y^2} = (x-1)\,dx \Rightarrow \dfrac{1}{2}\int \dfrac{-2y\ dy}{1-y^2} = \int (x-1)\,dx$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\ln\left|1-y^2\right| = \dfrac{1}{2}x^2 - x + c \qquad /c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \ln\left|1-y^2\right| = x^2 - 2x + 2c \qquad /c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y^2 = 1 - k\left(x^2 - 2x\right) \qquad /k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$$y = \pm\sqrt{1 - k\,(x^2 - 2x)} \quad /k \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow 3)y' = \dfrac{y}{x} - 1$

Equation différentielle homogène :

Posons : $t = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = tx \Rightarrow y' = t'x + t$

$y' = \dfrac{y}{x} - 1 \Leftrightarrow t'x + t = t - 1 \Rightarrow t' = \dfrac{-1}{x} \Rightarrow \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{-1}{x} \Rightarrow dt = \dfrac{-dx}{x}$

$\Rightarrow \int dt = \int \dfrac{-dx}{x} \Rightarrow t = -\ln|x| + c \qquad /c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$$y = -x\ln|x| + cx \qquad /c \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow 4)\ y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$

Equation différentielle homogène :

Posons : $t = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = tx \Rightarrow y' = t'x + t$

$y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{\cos\left(\frac{y}{x}\right)} \Longleftrightarrow t'x + t = t + \dfrac{1}{\cos(t)}$

$\Rightarrow t'x = \dfrac{1}{\cos(t)} \Rightarrow \dfrac{dt}{dx}x = \dfrac{1}{\cos(t)} \Rightarrow \cos t\ dt = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \int \cos t\ dt = \dfrac{\int dx}{x}$

$\Rightarrow \sin t = \ln|x| + c \qquad /c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow t = \arcsin(\ln|x| + c) \qquad /c \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$y = x \arcsin(\ln|x| + c) \qquad /c \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow$ 5) $y' \sin x - y \cos x = 1....(E)$ *equation linéaire*
$y_G = y_0 + y_p$
y_0 est solution de : $y' \sin x - y \cos x = 0........(E_0)$
$\iff \dfrac{y'}{y} = \dfrac{\cos x}{\sin x} \iff \dfrac{dy}{y} = \dfrac{\cos x}{\sin x} dx$
$\implies \int \dfrac{dy}{y} = \int \dfrac{\cos x}{\sin x} dx \implies \ln|y| = \ln|\sin x| + c \ / \ c \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow y = k(\sin x) \quad / \ k \in \mathbb{R}.$
Par suite : $y_0 = k\ (\sin x)\,, \quad k \in \mathbb{R}.$
On remarque que $y_p = -\cos x$ est une solution particulière .
Ainsi :

$$y_G = y_0 + y_p = -\cos x + k(\sin x) \ / \ k \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow$ 6) $y' - \dfrac{y}{x-1} = 1 + x....(E)$ *équation linéaire*
$y_G = y_0 + y_p$
y_0 est solution de : $y' - \dfrac{y}{x-1} = 0........(E_0)$
$\iff \dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{x-1} \iff \dfrac{dy}{y} = \dfrac{1}{x-1} dx$
$\Rightarrow \int \dfrac{dy}{y} = \int \dfrac{1}{x-1} dx \Rightarrow \ln|y| = \ln|x-1| + c \ / \ c \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow y_0 = k(x-1) \quad / \ k \in \mathbb{R}.$
Trouvons une solution particulière.
$y_p = k(x)(x-1) \ \Rightarrow y_p' = k'(x)(x-1) + k(x)$
Remplaçons dans l'équation (E)
$(k'(x)(x-1) + k(x)) - \dfrac{(k(x)(x-1))}{x-1} = 1 + x \Rightarrow k'(x) = \dfrac{1+x}{x-1}$
Par suite : $k(x) = \int \left(\dfrac{1+x}{x-1}\right) dx = \int \left(1 + \dfrac{2}{x-1}\right) dx = x + 2\ln|x-1|$
Et : $y_p = (x + 2\ln|x-1|)(x-1)$
En fin :

$$y_G = y_0 + y_p = k(x-1) + (x + 2\ln|x-1|)(x-1) \ / \ k \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow$ 7) $y' - y\ tg\ x = \sin x......(E)$ *équation linéaire*
$y_G = y_0 + y_p$
y_0 est solution de : $y' - y\ tg\ x = 0........(E_0)$
$\iff \dfrac{y'}{y} = tgx \iff \dfrac{dy}{y} = (tgx)\ dx$
$\Rightarrow \int \dfrac{dy}{y} = \int (tgx)\, dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln|\cos x| + c \ / \ c \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow y_0 = k\dfrac{1}{\cos x} \quad / \ k \in \mathbb{R}.$

Trouvons une solution particulière.

$y_p = k(x)\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) \Rightarrow y_p' = k'(x)\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) + k(x)\left(\dfrac{\sin x}{(\cos x)^2}\right)$

Remplaçons dans l'équation (E)

$\left(k'(x)\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) + k(x)\left(\dfrac{\sin x}{(\cos x)^2}\right)\right) - k(x)\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) tgx = \sin x \Rightarrow k'(x) = \sin x \cos x$

Par suite : $k(x) = \int (\sin x \cos x)\, dx = \int t dt = \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}\sin x^2$

Et : $y_p = \left(\frac{1}{2}\sin x^2\right)\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) = \left(\frac{1}{2} tgx \sin x\right)$

En fin :

$$y_G = y_0 + y_p = k\frac{1}{\cos x} + \left(\frac{1}{2} tgx \sin x\right) \quad / \ k \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow$ 8) $xy' - (1+2x)\, y = -x^2 e^x$.........$(E)$ *equation linéaire*

$y_G = y_0 + y_p$

y_0 est solution de : $xy' - (1+2x)\, y = 0$........ (E_0)

$\Longleftrightarrow xy' = (1+2x)\, y \Longleftrightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{1+2x}{x}\, dx$

$\Longrightarrow \int \dfrac{dy}{y} = \int \dfrac{1+2x}{x}\, dx \Longrightarrow \log|y| = \log|x| + 2x + c \quad / \ c \in \mathbb{R}$

Par suite : $y_0 = k\ x\ e^{2x}, \quad k \in \mathbb{R}$.

On remarque que $y_p = xe^x$

Ou bien on utilise la méthode de la variation de la constante pour calculer la solution particuliére .

on pose $y_p = k(x)\, x\, \mathrm{e}^{2x}$ et $y_p' = k'(x)\, xe^{2x} + k(x)\left(e^{2x} + 2xe^{2x}\right)$.

Remplaçons y_p et y_p' dans (E), on obtient :

$k'(x) = -e^{-x}$ ie :$k(x) = \displaystyle\int -e^{-x} dx = e^{-x}$

Ainsi : $y_p = k(x)\ x\ e^{2x} = xe^x$

Et donc :

$$y_G = kxe^{2x} + xe^x \quad /k \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow$ 9) $xy' + y - xy^2 \log x = 0$ équation de Bernouilli

Divisons par y^2

$xy'y^{-2} + y^{-1} = x \log x$

Posons : $z = y^{-1} \Longrightarrow z' = -y'y^{-2}$

$xy'y^{-2} + y^{-1} = x \log x \Longleftrightarrow -x\ z' + z = x \log x$ .....(E) *équation linéaire*

$z_G = z_0 + z_p$

z_0 est solution de : $-x\ z' + z = 0$

$z_0 = kx$, $k \in \mathbb{R}$.

on pose $z_p = k(x)\ x$ et $z_p' = .\ k'(x)\ x + k\ (x)$

Remplaçons z_p et z_p' dans (E), on obtient :

$k\left(x\right)=-\int\frac{\log x}{x}dx=-\frac{1}{2}\left(\log x\right)^{2}$

Et donc $z_{\ p}=-\frac{1}{2}\ x\ \left(\log x\right)^{2}$

et $\ :z_{\ G}=kx-\frac{1}{2}\ x\ \left(\log x\right)^{2}$ or $:z=y^{-1}$

La solution de l'équation de Bernouilli est :

$$y_{G}=\frac{1}{k\ x-\frac{1}{2}x\ \left(\log x\right)^{2}}\qquad /k\in\mathbb{R}$$

$\rightarrow$ 10) $y'-\dfrac{y}{x}+\dfrac{5}{2}x^{2}y^{3}=0\Leftrightarrow y'-\dfrac{y}{x}=-\dfrac{5}{2}x^{2}y^{3}$

Equation différentielle de Bernouilli

Divisons les deux membres de l'équation par y^{3} :

$\dfrac{y'}{y^{3}}-\dfrac{y}{xy^{3}}=-\dfrac{5}{2}x^{2}$...................... (E)

Posons : $\quad Z=\dfrac{1}{y^{2}}$ $\quad$ alors $\quad Z\ '=\dfrac{-2y'}{y^{3}}$

Remplaçons dans (E) : $-\dfrac{Z\ '}{2}-\dfrac{Z}{x}=-\dfrac{5}{2}x^{2}$.................... (E')

$Z_{G}=Z_{0}+Z_{P}$

On remarque que $Z_{P}=x^{3}$ est une solution particuliére de (E')

Z_{P} est solution de : $\quad -\dfrac{Z\ '}{2}-\dfrac{Z}{x}=0$.................... (E'_{0})

C'est une équation à variable séparable

$-\dfrac{Z\ '}{2}-\dfrac{Z}{x}=0\Leftrightarrow-\dfrac{Z\ '}{2}=\dfrac{Z}{x}$

Ce qui donne : $-\dfrac{dZ}{2dx}=\dfrac{Z}{x}\quad\Rightarrow\quad-\dfrac{dZ}{2Z}=\dfrac{dx}{x}\quad\Rightarrow\int-\dfrac{dZ}{2Z}\ =\int\dfrac{dx}{x}$

Par suite : $\frac{-1}{2}\log\left|Z\right|\quad=\log\left|x\right|+C$

ie : $\quad\log\dfrac{1}{Z^{2}}=\log x\Rightarrow\quad\dfrac{1}{Z^{2}}=k\ x\Rightarrow Z=\pm\dfrac{1}{\sqrt{k\ x}}=Z_{0}$

$Z_{G}=Z_{0}+Z_{P}=x^{3}\pm\dfrac{1}{\sqrt{k\ x}}\qquad /\ \ k\in\mathbb{R}^{+}$

$y_{G}=\pm\sqrt{\dfrac{1}{Z_{G}}}$

$$y_{G}=\pm\sqrt{\frac{1}{\left(x^{3}\pm\frac{1}{\sqrt{k\ x}}\right)}}\qquad /k\in\mathbb{R}^{+}$$

Exercice 45 :

Résoudre les équations différentielles d'ordre 2 suivantes :

1) $y"-y'-6y=e^{-x}\left(16x-8\right)$

2) $y"-y'-6y=e^{3x}\left(20x+14\right)$

3)$y"+4y'+4y=x^{2}e^{x}$

4)$y" + 4y' + 4y = x^2 e^{-2x}$
5)$y" - 2y' + 2y = e^x \left(x^2 - x + 3\right)$
6)$y" - 2y' + 2y = 4e^{-x} (\sin x + \cos x)$
7)$y" - 2y' + 2y = 2e^x (\cos x - \sin x)$
Solution 45
Résoudre les équations différentielles d'ordre 2 :

1) $y" - y' - 6y = e^{-x} (16x - 8)$ .... (E)

$y_G = y_0 + y_p$
Avec y_0 solution de : $y" - y' - 6y = 0..... (E_0)$
L' équation caractéristique associée à (E_0) est $r^2 - r - 6 = 0$ avec $r = -2$ et $r = 3$
par suite $y_0 = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$
Cherchons une solution particulière de (E).

(-1) n' est pas racine de l'équation caractéristique d'ordre 2
par suite $y_p = (ax + b) e^{-x}$

En calculant y_p' , y_p'' et on remplaçons dans (E), on obtient :
$a = -4; b = 5$et donc $y_p = (-4x + 5) e^{-x}$
par conséquant la solution générale est :

$$y_G = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} + (-4x + 5) e^{-x} / c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow$ 2)$y" - y' - 6y = e^{3x} (20x + 14)$ .... (E)
$y_G = y_0 + y_p$
Avec y_0 solution de : $y" - y' - 6y = 0..... (E_0)$
L' équation caractéristique associée à (E_0) est $r^2 - r - 6 = 0$ avec $r = -2$ et $r = 3$
par suite $y_0 = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$
Cherchons une solution particulière de (E).

(-1) n' est pas racine de l'équation caractéristique d'ordre 2
par suite $y_p = (ax + b) e^{-x}$

En calculant y_p' , y_p'' et on remplaçons dans (E), on obtient :
$a = -4; b = 5$et donc $y_p = (-4x + 5) e^{-x}$
par conséquant la solution générale est :

$$y_G = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} + (-4x + 5) e^{-x} / c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow$ 3)$y" + 4y' + 4y = x^2 e^x$ .... (E)
$y_G = y_0 + y_p$
Avec y_0 solution de : $y" + 4y' + 4y = 0..... (E_0)$

L' équation caractéristique associée à (E_0) est $r^2+4r+4=0$ avec $r=-2$ racine double

par suite $y_0 = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Cherchons une solution particulière de (E).

1 n' est pas racine de l'équation caractéristique d'ordre 2

par suite $y_p = \left(ax^2+bx+c\right)e^x$

En calculant y_p', y_p'' et on remplaçons dans (E), on obtient :

$a=\dfrac{1}{9}; b=\dfrac{-12}{81}; c=\dfrac{6}{81}$ et donc $y_p = \dfrac{1}{9}\left(x^2-\dfrac{12}{9}x+\dfrac{6}{9}\right)e^x$

par conséquant

$$y_G = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + \frac{1}{9}\left(x^2-\frac{12}{9}x+\frac{6}{9}\right)e^x / c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$\to$ 4)$y" + 4y' + 4y = x^2 e^{-2x}$ .... (E)

$y_G = y_0 + y_p$

Avec y_0 solution de : $y" + 4y' + 4y = 0$..... (E_0)

L' équation caractéristique associée à (E_0) est $r^2+4r+4=0$ avec $r=-2$ racine double

par suite $y_0 = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Cherchons une solution particulière de (E).

-2 est une racine de l'équation caractéristique d'ordre 2

par suite $y_p = \left(ax^2+bx+c\right)x^2 e^{-2x}$

En calculant y_p', y_p'' et on remplaçons dans (E), on obtient :

$a=\frac{1}{12}; b=c=0$ et donc $y_p = \frac{1}{12}x^4 e^{-2x}$

par conséquant

$$y_G = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + \frac{1}{12}x^4 e^{-2x} / c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

5)$y" - 2y' + 2y = e^x\left(x^2-x+3\right)$

$y_G = y_0 + y_p$

Avec y_0 solution de : $y" - 2y' + 2y = 0$..... (E_0)

L' équation caractéristique associée à (E_0) est $r^2-2r+2=0$

avec $r_1 = 1+i$; $\quad r_2 = 1-i$

par suite $y_0 = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Cherchons une solution particulière de (E).

1 n'est pas racine de l'équation caractéristique d'ordre 2

par suite $y_p = \left(ax^2+bx+c\right)e^x$

En calculant y_p', y_p'' et on remplaçons dans (E), on obtient :

$a=1; b=-1; c=1$ et donc $y_p = \left(x^2-x+1\right)e^x$

par conséquant

$$y_G = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + \left(x^2-x+1\right)e^x / c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

6)$y" - 2y' + 2y = 4e^{-x}(\sin x + \cos x)$
Cherchons une solution particulière de (E).
$-1 \pm i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique d'ordre 2
par suite $y_p = e^{-x}(a\cos x + b\sin x)$

En calculant y_p' , y_p'' et on remplaçons dans (E), on obtient :
$a = 1; b = 0$ et donc $y_p = e^{-x}\cos x$
par conséquant

$$y_G = c_1e^x\cos x + c_2e^x\sin x + e^{-x}\cos x/c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

7)$y" - 2y' + 2y = 2e^x(\cos x - \sin x)$Cherchons une solution particulière de (E).
$1 \pm i$ est racine de l'équation caractéristique d'ordre 2
par suite $y_p = e^x(a\cos x + b\sin x)x$

En calculant y_p' , y_p'' et on remplaçons dans (E), on obtient :
$a = b = 1$ et donc $y_p = e^x(\cos x + \sin x)x$
par conséquant

$$y_G = c_1e^x\cos x + c_2e^x\sin x + e^x(\cos x + \sin x)x/c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$