

Table des matières

Introduction	3
1 Notions d'erreurs	4
1.1 Introduction	4
1.2 Erreurs absolue et relative	4
1.2.1 Erreur absolue	4
1.2.2 Erreur relative	5
1.2.3 Majoration des erreurs absolue et relative	5
1.3 Chiffres significatifs	8
1.4 Arrondissement et représentation des nombres	9
1.5 Exercices	10
1.6 Corrigés des exercices	11
2 Interpolation polynomiale	14
2.1 Existence du polynôme d'interpolation	14
2.2 Erreur d'interpolation	16
2.3 Interpolation de Lagrange	18
2.4 Interpolation de Newton	21
2.4.1 Relation entre différence divisées et les dérivées	23
2.4.2 Erreur d'interpolation de Newton	23
2.4.3 Interpolation de Newton dans le cas équidistant	24
2.5 Exercices	27
2.6 Corrigés des exercices	28
3 Dérivation et intégration numérique	33
3.1 Dérivation numérique	33
3.1.1 Utilisation de la formule de Taylor	33
3.1.2 Utilisation des formules d'interpolation	35
3.2 Erreur	37
3.2.1 Dérivée premier ordre	37
3.2.2 Dérivée second d'ordre	38
3.3 Intégration numérique	39

3.3.1	Méthodes des rectangles	40
3.3.2	Méthode des Trapèzes	40
3.3.3	Méthode de Simpson	41
3.3.4	Erreurs de quadrature	42
3.4	Exercices	44
3.5	Corrigés des exercices	46
4	Résolution d'équations algébriques	51
4.1	Méthode de Dichotomie (ou bisection)	51
4.1.1	Etude de convergence	52
4.2	Méthode de point fixe	54
4.3	Méthode de Newton-Raphson	57
4.3.1	Etude de convergence	58
4.4	Exercices	60
4.5	Corrigés des exercices	61
	Bibliographie	66

Introduction

Ce document notes de cours d'analyse numérique avec exercices corrigés recouvre le programme d'analyse numérique I de la deuxième année universitaire L.M.D.

Le lecteur trouvera une partie cours et à la fin de chaque chapitre une partie exercices corrigés.

Il est destiné principalement aux étudiants de la 2^{ème} année L.M.D.

L'objectif de l'analyse numérique est de concevoir et d'étudier des méthodes de résolution de certains problèmes mathématiques (en général issus et de la modélisation de problèmes réels), a titre d'exemples : commande optimale, structure (pneus, carrosserie, ...), biologie mathématique : propagation d'épidémie ..., modèle mathématique en médecine : cardiologie, cancer ..., et bien d'autres applications.

En pratique, l'analyse numérique se propose d'étudier les propriétés mathématiques des algorithmes et leur mise en œuvre (programmation).

Ce polycopie se décompose en quatre chapitres :

Le premier chapitre : Notions d'erreurs.

Le deuxième chapitre : Interpolation polynomiale.

Le troisième chapitre : dérivation et intégration numérique.

Le dernier chapitre : résolution d'équations algébriques.

Chapitre 1

Notions d'erreurs

1.1 Introduction

L'analyse numérique se distingue des autres champs plus classiques des mathématiques. En effet, pour un problème donné, il est possible d'utiliser plusieurs techniques de résolution qui résultent en différents algorithmes. Ces algorithmes dépendent de certains paramètres qui influent sur la précision du résultat. De plus, on utilise en cours de calcul des approximations plus ou moins précises. Par exemple, on peut remplacer une dérivée par une différence finie de façon à transformer une équation différentielle en une équation algébrique. Le résultat final et son ordre de précision dépendent des choix que l'on fait. Une partie importante de l'analyse numérique consiste donc à étudier et évaluer les erreurs pour les réduire.

1.2 Erreurs absolue et relative

Les quantités 10 , $\sqrt{2}$, e et $\frac{1}{3}$ sont exactes. Mais $\sqrt{2} = 1.414$, $e = 1.71$ et $\frac{1}{3} = 0.333$ sont des quantités approximatives. Puisqu'il y a toujours un écart entre la valeur exacte et la valeur approchée donc il y a une erreur.

1.2.1 Erreur absolue

Définition 1.1 Soit x une quantité à calculer et x^* la valeur calculée (la valeur approchée de x). L'erreur absolue de x^* (sur x), est définie par :

$$E_a(x) = |x - x^*|. \quad (1.1)$$

Exemple 1.1 On suppose que la valeur exacte est $x = 17,001$ et que les valeurs mesurées sont :

$x_1^* = 16,01$, $x_2^* = 18,01$ et $x_3^* = 17$. Alors, on a

$$E_{a_1}(x) = |x - x_1^*| = 0.991$$

$$E_{a_2}(x) = |x - x_2^*| = 1.009$$

$$E_{a_3}(x) = |x - x_3^*| = 0,001.$$

Comme l'erreur absolue $E_{a_3}(x)$ est la plus petite alors $x_3^* = 17$ est la valeur la plus proche de x .

Ainsi la valeur approchée x^* est plus précise lorsque l'erreur absolue de x^* est plus petite.

1.2.2 Erreur relative

Définition 1.2 Soit x une quantité à calculer et x^* la valeur calculée (la valeur approchée de x). L'erreur relative est définie par :

$$E_r(x) = \frac{E_a(x)}{|x|}. \quad (1.2)$$

Généralement, on donne l'erreur relative sous la forme de pourcentage tel qu'on multiplie $E_r(x)$ par 100%.

Exemple 1.2 On reprend l'exemple précédent $x^* = 17$ valeur approchée de x , alors

$$E_r(x) = \frac{E_a(x)}{|x|} = \frac{0,001}{|17,001|} = \frac{10^{-3}}{17001 \times 10^{-3}} = \frac{1}{17001}.$$

Alors $E_r(x) \simeq 6 \times 10^{-3}\%$.

1.2.3 Majoration des erreurs absolue et relative

En pratique, il est difficile d'évaluer les erreurs absolue et relative, car on ne connaît généralement pas la valeur exacte de x et l'on n'a que x^* . Pour les apprécier on introduit la notion de majorant de l'erreur absolue et de l'erreur relative.

Définition 1.3 On définit un majorant de l'erreur absolue Δx d'une valeur approchée x^* par :

$$E_a(x) = |x - x^*| \leq \Delta x \Leftrightarrow x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x$$

tel que Δx est un nombre réel positif.

Définition 1.4 On définit un majorant de l'erreur relative δx d'une valeur approchée x^* par :

$$E_r(x) = \frac{E_a(x)}{|x|} \leq \delta x \quad (1.3)$$

tel que δx est un nombre réel positif

Par suite le majorant de l'erreur relative à x^* est défini par

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x^*|}. \quad (1.4)$$

Dans le cas de quantités mesurées expérimentalement dont on ne connaît que la valeur approximative, on dispose souvent d'une borne supérieure pour l'erreur absolue qui dépend de la précision des instruments de mesure utilisés.

Remarque 1.1 Soit x un nombre tel que $x_1 \leq x \leq x_2$ alors $x^* = \frac{x_1+x_2}{2}$ est une approximation de x avec une majoration de l'erreur absolue $\Delta x = \frac{x_2-x_1}{2}$.

Exemple 1.3 Une surface est donné par $x = 60\text{m}^2 \pm 2\%$. L'erreur relative à la valeur approchée $x^* = 60\text{m}^2$ est $\delta x = 0,02$. Alors l'erreur absolue est :

$$\Delta x = x^* \delta x = 60 \times 0,02 = 1,2\text{m}^2.$$

D'où, la surface exacte est $x \in [x^* - \Delta x, x^* + \Delta x] = [58.8, 61.2]$.

Proposition 1.1 (Addition) Soient x, y deux valeurs positives, x^* et y^* deux valeurs approchées de x et y respectivement. Alors on a

1. $\Delta(x + y) = \Delta x + \Delta y$;
2. $\delta(x + y) \leq \max(\delta x, \delta y)$.

Preuve.

1. On a $x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x$ et $y^* - \Delta y \leq y \leq y^* + \Delta y$. Alors

$$(x^* + y^*) - (\Delta x + \Delta y) \leq x + y \leq (x^* + y^*) + \Delta x + \Delta y$$

Ainsi $\Delta x + \Delta y$ est un majorant de l'erreur absolue de $x + y$, donc $\Delta(x + y) = \Delta x + \Delta y$.

2. On a

$$\begin{aligned} \delta(x + y) &= \frac{\Delta(x + y)}{|x^* + y^*|} = \frac{\Delta x + \Delta y}{x^* + y^*} = \frac{\Delta x}{x^*} \frac{x^*}{|x^* + y^*|} + \frac{\Delta y}{y^*} \frac{y^*}{|x^* + y^*|} \\ &= \delta x \times \lambda_1 + \delta y \times \lambda_2 \quad \text{où } \lambda_1 = \frac{x^*}{|x^* + y^*|} > 0, \quad \lambda_2 = \frac{y^*}{|x^* + y^*|} > 0 \quad \text{et } \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ &\leq \max(\delta x, \delta y) \lambda_1 + \max(\delta x, \delta y) \lambda_2 = (\lambda_1 + \lambda_2) \max(\delta x, \delta y) = \max(\delta x, \delta y). \end{aligned}$$

■

Proposition 1.2 (Soustraction) Soient x, y deux valeurs positives, x^* et y^* deux valeurs approchées de x et y respectivement. Alors on a

1. $\Delta(x - y) = \Delta x + \Delta y$;
2. $\delta(x - y) \leq \frac{x^* + y^*}{x^* - y^*} \max(\delta x, \delta y)$.

Preuve.

1. On a $x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x$ et $y^* - \Delta y \leq y \leq y^* + \Delta y$. Alors

$$(x^* - y^*) - (\Delta x + \Delta y) \leq x - y \leq (x^* - y^*) + \Delta x + \Delta y$$

Ainsi $\Delta x + \Delta y$ est un majorant de l'erreur absolue de $x - y$, et par suite $\Delta(x - y) = \Delta x + \Delta y$.

2. On a

$$\begin{aligned} \delta(x - y) &= \frac{\Delta(x - y)}{x^* - y^*} = \frac{\Delta x + \Delta y}{x^* - y^*} \\ &= \frac{\Delta x}{x^*} \frac{x^*}{x^* + y^*} \frac{x^* + y^*}{x^* - y^*} + \frac{\Delta y}{y^*} \frac{y^*}{x^* + y^*} \frac{x^* + y^*}{x^* - y^*} \\ &= [\delta x \times \lambda_1 + \delta y \times \lambda_2] \frac{x^* + y^*}{x^* - y^*} \\ &\leq [\max(\delta x, \delta y) \lambda_1 + \max(\delta x, \delta y) \lambda_2] \frac{x^* + y^*}{x^* - y^*} \\ &\leq (\lambda_1 + \lambda_2) \max(\delta x, \delta y) \frac{x^* + y^*}{x^* - y^*} \\ &\leq \frac{x^* + y^*}{x^* - y^*} \max(\delta x, \delta y) \end{aligned}$$

avec $\lambda_1 = \frac{x^*}{|x^* + y^*|} > 0$, $\lambda_2 = \frac{y^*}{|x^* + y^*|} > 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

■

Exemple 1.4 Soient $x^* = 34217$ et $y^* = 34213$ avec $\delta x = 0,1\%$ et $\delta y = 0,01\%$. On a

$$\Delta x = \delta x |x^*| = 0,001 \times 34217 = 34,217$$

$$\Delta y = \delta y |y^*| = 0,0001 \times 34213 = 3,4213.$$

D'où

$$\Delta(x - y) = \Delta x + \Delta y = 37,6383 \simeq 38.$$

Alors $x - y = (x - y) \pm \Delta(x - y) = 4 \pm 37,6383$ Et

$$\delta(x - y) = \frac{\Delta(x - y)}{x^* - y^*} = 9,409575 \simeq 941\%.$$

Proposition 1.3 (Multiplication) Soient x, y deux valeurs positives, x^* et y^* deux valeurs approchées de x et y respectivement. Alors on a

1. $\Delta(xy) = x^* \Delta y + y^* \Delta x$;
2. $\delta(xy) = \delta x + \delta y$.

Preuve.

1. On a $x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x$ et $y^* - \Delta y \leq y \leq y^* + \Delta y$. En supposant que $x^* - \Delta x > 0$ et $y^* - \Delta y > 0$, donc

$$(x^* - \Delta y)(y^* - \Delta y) \leq xy \leq (x^* + \Delta x)(y^* + \Delta y)$$

$$\Leftrightarrow x^* y^* - x^* \Delta y - y^* \Delta x + \Delta x \Delta y \leq xy \leq x^* y^* + x^* \Delta y + y^* \Delta x + \Delta x \Delta y$$

Si on néglige l'erreur de second ordre $\Delta x \Delta y$, on obtient

$$x^* y^* - x^* \Delta y - y^* \Delta x \leq xy \leq x^* y^* + x^* \Delta y + y^* \Delta x$$

Ainsi $x^* \Delta y + y^* \Delta x$ est un majorant de l'erreur absolue de $x^* y^*$, donc $\Delta(xy) = x^* \Delta y + y^* \Delta x$.

2. Pour l'erreur relative, on a

$$\delta(xy) = \frac{\Delta(xy)}{x^* y^*} = \frac{x^* \Delta y + y^* \Delta x}{x^* y^*} = \frac{\Delta x}{x^*} + \frac{\Delta y}{y^*} = \delta x + \delta y.$$

■

Proposition 1.4 (Division) Soient x, y deux valeurs positives, x^* et y^* deux valeurs approchées de x et y respectivement. Alors on a

1. $\Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x^* \Delta y + y^* \Delta x}{y^{*2}}$;
2. $\delta\left(\frac{x}{y}\right) = \delta x + \delta y$.

Preuve. Voir le corrigé de l'exercice 4.

1.3 Chiffres significatifs

Définition 1.5 Un chiffre significatif d'un nombre approché est le seul chiffre qu'on doit garder, c'est à dire tout chiffre dans sa représentation décimale différent du zéro; et un zéro qui se trouve entre deux chiffres, ou il constitue un chiffre conservé.

Exemple 1.5 Une approximation à 5 décimales de 0.02010 est 0.02010 les zéros soulignés ne sont pas significatifs car ils ne servent qu'à indiquer les rangs des autres chiffres.

0.02010 Le zéro souligné étant placé entre les chiffres significatifs 2 et 1, zéro est lui même un chiffre significatif.

0.02010 le zéro souligné traduit le fait que le nombre approché a conservé la décimale 10^{-5} , c'est un chiffre significatif.

Définition 1.6 Un chiffre significatif d'un nombre approché x^* est dit exact (c s e) si l'erreur absolue de x^* vérifie :

$$\Delta x \leq 0,5 \times 10^m$$

avec m est le rang de ce chiffre significatif.

D'où

- Si $\Delta x \leq 0,5 \times 10^{-n}$, alors le $n^{\text{ème}}$ chiffre significatif après la virgule est exact
- Si : $\Delta x \leq 0,5 \times 10^{n-1}$, alors le $n^{\text{ème}}$ chiffre significatif avant la virgule est exact.

Propriétés :

1. Si un chiffre significatif est exact, alors tous les chiffres à sa gauche sont exacts.
2. Si un chiffre n'est pas exact, alors tous ceux à sa droite ne le sont pas.

Exemple 1.6 1. On approche $x = \pi$ au $x^* = 3,14$. On a

$$\Delta(x) = 0,001592 \leq 0,5 \times 10^{-2}.$$

Alors, les trois chiffres 3, 1 et 4 sont des chiffres significatif exacts.

2. Soient $x = 223,864$ et $x^* = 223,887$, alors

$$\Delta x = 0,023 \leq 0,5 \times 10^{-1}$$

D'où, les quatres chiffres significatif 2, 2, 3, 8 sont exacts.

Remarque 1.2 Il y a une relation entre l'erreur relative et les chiffres significatifs, en effet,

1. Si un nombre approximatif possède n chiffres significatifs exacts, alors son erreur relative est $< 5 \times 10^{-n}$ (sauf si le nombre est 1 suivi de $(n - 1)$ zéros).
2. Si l'erreur relative à x^* est $< 0,5 \times 10^{-n}$ alors x^* possède au moins n chiffres significatifs exacts.

1.4 Arrondissement et représentation des nombres

L'arrondissement d'un nombre à n chiffres significatifs se fait par la règle suivante :

1. Si le $(n + 1)^{\text{ème}}$ chiffre significatif est > 5 , on augmente le $n^{\text{ème}}$ chiffre de 1.

2. Si le $(n + 1)^{\text{ème}}$ chiffre significatif est < 5 , les chiffres retenus restent inchangés.
3. Si le $(n + 1)^{\text{ème}}$ chiffre significatif est 5 alors on a deux cas :
 - Si tous les chiffres, situés après le $(n + 1)^{\text{ème}}$ chiffre significatif, sont des zéros. On applique la règle du chiffre pair, c'est à dire si le $n^{\text{ème}}$ est impair on lui ajoute 1, par contre s'il est pair alors on le change pas.
 - Parmi les chiffres rejetés, situés après le $(n + 1)^{\text{ème}}$ chiffre significatif, il existe au moins un qui soit non nul. On ajoute 1 au $n^{\text{ème}}$ chiffre.

Exemple 1.7 1. Arrondir $x = 0.254$ à deux (02) chiffres significatifs. Comme $4 < 5$ alors $x^* \simeq 0.25$.

2. Arrondir $x = 0.4368$ à trois (03) chiffres significatifs. Comme $8 > 5$ alors $x^* \simeq 0.437$
3. Arrondir $x = 1.534500$ à quatre (04) chiffres significatifs. Tous les chiffres rejetés sont des zéros. Le $4^{\text{ème}}$ chiffre étant pair, on a alors $x^* \simeq 1.534$.
4. Arrondir $x = 1.5347500$ à cinq (05) chiffres significatifs. Tous les chiffres rejetés sont des zéros. Le $5^{\text{ème}}$ chiffre étant impair, on a alors $x^* \simeq 1.5348$.
5. Arrondir $x = 23.6050420$ à quatre (04) chiffres significatifs. Parmi les chiffres rejetés s'il existe au moins un qui soit non nul. Donc, $x^* \simeq 23.61$.

Remarque 1.3 On remarque d'après la règle d'arrondissement que si un nombre x est arrondi à x^* alors

$$\Delta x = |x - x^*| \leq 0,5 \times 10^{m-1}$$

où m est le rang du dernier chiffre significatif retenu.

Exemple 1.8 1. L'arrondissement de $x = 0.254$ à deux (02) chiffres significatifs est $x^* \simeq 0.25$. Alors

$$\Delta x = |x - x^*| = 0.004 \leq 0.5 \times 10^{-3}.$$

2. L'arrondissement $x = 1.5347500$ à cinq (05) chiffres significatifs est $x^* \simeq 1.5348$. Alors

$$\Delta x = |x - x^*| = 0.00005 \leq 0.5 \times 10^{-5}.$$

1.5 Exercices

Exercice 1 :

- 1) Arrondir les chiffres suivants à l'entier le plus proche de :

627.21; 27.61; 124.8; 56.14; 887.13.

2) Donner un arrondi au centième près de :

124.8; 56.14; 78.984; 7.106.

3) Donner un arrondi au centième près du nombre A tel que :

$$A = \frac{831-532}{84}.$$

Exercice 2 :

Soit $V = \frac{1}{6}\pi d^3$ avec $d = 3.7 \pm 0.05$ cm et $\pi = 3.14$.

Calculer ΔV et δV .

Exercice 3 :

Soit $\mu = \frac{\sin(\frac{A+B}{2})}{\sin(\frac{A}{2})}$ avec $A = 1.052 \pm 0.003$ et $B = 0.611 \pm 0.006$.

Donner une valeur approchée de la quantité μ .

Exercice 4 :

Soient $x > 0$; $y > 0$ et x, y leurs approximations respectives.

1) Démontrer que : $\Delta(\frac{x}{y}) = \frac{x^*\Delta y + y^*\Delta x}{y^*}$ où Δ dsigne majoration de l'erreur absolue.

2) En déduire que $\delta(\frac{x}{y}) = \delta x + \delta y$.

Exercice 5 :

1) Donner le nombre de c.s.e des nombres 0,0006814269 et 6,17924, s'ils ont une erreur relative inférieur à 10^{-4} .

2) Si tous les chiffres significatifs de 3724,14 sont exacts. Quelle est son erreur relative.

1.6 Corrigés des exercices

Solution exercice 1

1) L'arrondissement à l'entier le plus proche de :

627.21 \simeq 627;

27.61 \simeq 28;

124.8 \simeq 125;

56.14 \simeq 56;

887.13 \simeq 887.

2) Donnons l'arrondi au centième (0.01 près) :

124.8 = 124.8 ;

56.14 = 56.14;

78.984 \simeq 78.98 ;

7.106 \simeq 7.11.

3) Donnons un arrondi au centième près du nombre A tel que :

$$A = (831 - 532)/84.$$

On a :

$$A = (831 - 532)/84 = 3.55952381 \simeq 3.56.$$

Solution exercice 2

On a $\Delta d = 0.05$ et $\Delta\pi = |3.14159 - 3.14| = 0.0016$.

Ainsi

$$\begin{aligned} \Delta V &= \left| \frac{\delta V}{\delta \pi} \right| \Delta \pi + \left| \frac{\delta V}{\delta d} \right| \Delta d \\ &= \frac{1}{6} d^3 \Delta \pi + \frac{1}{6} 3\pi d^2 \Delta d \\ &= \frac{1}{6} (3,7)^3 (0.0016) + \frac{1}{2} (3.14) (3.7)^2 0.05 \\ &= 1.08817247 \text{ cm}^3 \simeq 1.088 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

D'autre part, on a $V = 26.51 \text{ cm}^3$ et on sait que

$$\delta V = \frac{\Delta V}{V}$$

donc $\delta V = 0.041$.

Solution exercice 3

On a

$$\Delta \mu = \left| \frac{\delta \mu}{\delta A} \right| \Delta A + \left| \frac{\delta \mu}{\delta B} \right| \Delta B$$

On a $\Delta A = 0.003$ et $\Delta B = 0.006$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mu}{\delta A} &= \frac{1 \sin(\frac{A}{2}) \cos(\frac{A+B}{2}) - \cos(\frac{A}{2}) \sin(\frac{A+B}{2})}{2 (\sin(\frac{A}{2}))^2} \\ &= \frac{1 \sin(\frac{A}{2} - \frac{A+B}{2})}{2 (\sin(\frac{A}{2}))^2} \\ &= -\frac{\sin(\frac{B}{2})}{2 (\sin(\frac{A}{2}))^2} \end{aligned}$$

et

$$\frac{\delta \mu}{\delta B} = \frac{\cos(\frac{A+B}{2})}{2 \sin(\frac{A}{2})}.$$

D'où

$$\Delta \mu = -\frac{\sin(\frac{B}{2})}{2 (\sin(\frac{A}{2}))^2} \Delta A + \frac{\cos(\frac{A+B}{2})}{2 \sin(\frac{A}{2})} \Delta B$$

$$\Delta \mu = 5.8156 \times 10^{-3} \simeq 0.006.$$

Par suite,

$$\mu = \mu^* \pm \Delta \mu = 1.472 \pm 0.006.$$

Solution exercice 4

On a $x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x$ et $y^* - \Delta y \leq y \leq y^* + \Delta y$. En supposant que $x^* - \Delta x > 0$ et $y^* - \Delta y > 0$, donc

$$\begin{aligned} \frac{x^* - \Delta x}{y^* + \Delta y} &\leq \frac{x}{y} \leq \frac{x^* + \Delta x}{y^* - \Delta y} \\ \Leftrightarrow \frac{x^* - \Delta x}{y^* + \Delta y} \frac{y^* - \Delta y}{y^* - \Delta y} &\leq \frac{x^* + \Delta x}{y^* - \Delta y} \frac{y^* + \Delta y}{y^* + \Delta y} \\ \Rightarrow \frac{x^* y^* - y^* \Delta x - x^* \Delta y + \Delta x \Delta y}{y^{*2} - \Delta y^2} &\leq \frac{x}{y} \leq \frac{x^* y^* + y^* \Delta x + x^* \Delta y + \Delta x \Delta y}{y^{*2} - \Delta y^2} \end{aligned}$$

Si on néglige l'erreur du second ordre Δy^2 et $\Delta x \Delta y$, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{x^* y^* - y^* \Delta x - x^* \Delta y}{y^{*2}} &\leq \frac{x}{y} \leq \frac{x^* y^* + y^* \Delta x + x^* \Delta y}{y^{*2}} \\ \frac{-y^* \Delta x - x^* \Delta y}{y^{*2}} &\leq \frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} \leq \frac{y^* \Delta x + x^* \Delta y}{y^{*2}} \end{aligned}$$

D'où, $\frac{y^* \Delta x + x^* \Delta y}{y^{*2}}$ est un majorant de l'erreur absolue de $\frac{x^*}{y^*}$, donc

$$\Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y^* \Delta x + x^* \Delta y}{y^{*2}}.$$

2) Pour l'erreur relative, on a

$$\delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\Delta\left(\frac{x}{y}\right)}{\frac{x^*}{y^*}} = \frac{y^* \Delta x + x^* \Delta y}{y^{*2}} \frac{y^*}{x^*} = \delta x + \delta y.$$

Solution exercice 5

1) Si l'erreur relative à x^* est $< 0.5 \times 10^{-n}$ alors x^* possède au moins n chiffres significatifs exacts.

0.0006814269 possède 7 chiffres significatifs et $\delta(x) \leq 10^{-4} = 0.1 \times 10^{-3} \leq 0.5 \times 10^{-3} \Rightarrow x$ possède au moins 3 c.s.e.

D'autre part,

$\delta(x) = \frac{\Delta x}{|x^*|} \leq 0.5 \times 10^{-3} \Leftrightarrow \Delta(x) \leq x^* 0.5 \times 10^{-3} = 0.000340713 \times 10^{-3} \leq 0.340713 \times 10^{-6} \leq 0.5 \times 10^{-6} \leq 0.5 \times 10^{-5} \leq 0.5 \times 10^{-4} \leq 0.5 \times 10^{-3} \leq 0.5 \times 10^{-2} \leq 0.5 \times 10^{-1}$ alors x possède 6 c.s.e.

De la même façon on trouve 3 c.s.e pour 6.17924.

2) Si tous les chiffres significatifs de 3724.14 sont exacts alors $\delta(x) \leq 5 \times 10^{-6}$.

Chapitre 2

Interpolation polynomiale

L'interpolation polynomiale est d'une grande importance dans l'analyse numérique : dérivation et intégration, résolution des équations différentielles, ... Ce chapitre ainsi que le chapitre suivant qui porte sur l'intégration numérique sont très étroitement reliés puisqu'ils tendent à répondre à même problème. Ce problème est le suivant : à partir d'une fonction $f(x)$ connue seulement en $(n + 1)$ points $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, \dots, n$, peut-on construire une approximation de $f(x)$?

Les x_i sont appelés abscisses ou noeuds d'interpolation tandis que les couples $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, \dots, n$ sont les points de collocation ou points d'interpolation et peuvent provenir de données expérimentales ou d'une table. En d'autres termes, si l'on ne connaît que les points de collocation $(x_i, f(x_i))$ d'une fonction, peut-on obtenir une bonne approximation de $f(x)$ pour une valeur différente des x_i ? Il s'agit d'un problème d'interpolation, dont la solution est relativement simple. Il suffit de construire un polynôme de degré suffisamment élevé dont la courbe passe par les points de collocation. On parle alors du polynôme de collocation ou polynôme d'interpolation. Pour obtenir une approximation des dérivées ou de l'intégrale, il suffit de dériver ou d'intégrer le polynôme de collocation.

2.1 Existence du polynôme d'interpolation

Théorème 2.1 *Soit (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$ avec $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, il existe un polynôme et un seul $P_n(x)$ de degré inférieur ou égal à n tel que :*

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Preuve.

Soit $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ tel que

$$P_n(x_i) = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n = y_i \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, n.$$

Alors on a $(n + 1)$ équation et $n + 1$ inconnus comme suit :

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = y_1, \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_2^n = y_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots, \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

C'est un système linéaire par rapport à a_i ; $i = 0, \dots, n$, on peut l'écrire sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}}_V \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

La matrice de ce système s'appelle la matrice de Vandermonde. Le déterminant de la matrice V est non nul si les x_i sont distincts deux à deux. Donc on obtient l'existence et l'unicité du polynôme d'interpolation.

En effet, On note $\det V = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$.

On a le déterminant $V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x)$ est un polynôme de degré n en x dont les racines sont x_0, x_1, \dots, x_{n-1} . Ceci implique que

$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = A \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) \quad (2.2)$$

avec A est une constante à déterminer.

On développe $V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{pmatrix}$ suivant la

dernière ligne et la dernière colonne, on obtient que le coefficient de x^n est $V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$.

Alors d'après (2.2), la constante A coefficient de x^n est égale à $V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$.

Par conséquent, on obtenue la formule :

$$\begin{aligned} V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) &= V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}) \\ &= V(x_0, \dots, x_{n-2})(x_{n-1} - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_{n-1} - x_{n-2})(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}) \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\det V = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \prod_{j>i}^n (x_j - x_i).$$

Remarque 2.1 On peut vérifier cette formule par récurrence.

On voit bien que $\det V = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \neq 0$ si $x_i \neq x_j, i \neq j$. ■

Définition 2.1 L'unique polynôme de degré n passant par les points $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, \dots, n$, est appelé l'interpolant de $f(x)$ de degré inférieur ou égal à n aux abscisses (noeuds) x_0, x_1, \dots, x_n .

Exemple 2.1 Trouver l'interpolation linéaire de la fonction f tel que :

$$f(0, 1) = 0, 1003 = y_0; f(0, 4) = 0, 4228 = y_1.$$

On cherche le polynôme $P(x) = a_0 + a_1x$ utilisant la matrice de Vandermonde.

On a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0, 1 \\ 1 & 0, 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0, 1003 \\ 0, 4228 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{0, 3} \begin{pmatrix} 0, 4 & -0, 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, 1003 \\ 0, 4228 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0, 0072 \\ 1, 075 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où, $P(x) = -0, 0072 + 1, 075x$.

Remarque 2.2 Le polynôme d'interpolation par la matrice de Vandermonde n'est pas facile à calculer. On doit envisager d'autres stratégies pour le calculer directement.

2.2 Erreur d'interpolation

Lemme 2.1 Soit f une fonction k fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$. On suppose qu'il existe $(k + 1)$ points : $c_0 < c_1 < \dots < c_k$ de $[a, b]$ tel que $f(c_i) = 0$.

Alors

$$\exists \xi \in]c_0, c_k[\quad / \quad f^{(k)}(\xi) = 0.$$

Preuve. Le lemme se démontre par récurrence sur k .

Pour $k = 1$, en utilisant le théorème de Rolle.

$c_0 < c_1 < \dots < c_k / f(c_i) = 0$ pour $i = 0, \dots, k$. Maintenant, supposons que le lemme est vrai pour $k - 1$, alors

$\exists \xi_0 \in [c_0, c_1]$ tel que $f^{(k-1)}(\xi_0) = 0$,

$\exists \xi_1 \in [c_1, c_2]$ tel que $f^{(k-1)}(\xi_1) = 0$,

\vdots

$\exists \xi_{k-1} \in [c_{k-1}, c_k]$ tel que $f^{(k-1)}(\xi_{k-1}) = 0$.

Alors d'après le théorème de Rolle $\exists \xi \in [c_0, c_k]$ tel que $f^{(k)}(\xi) = 0$. ■

Théorème 2.2 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, $(n+1)$ fois dérivable sur $[a, b]$ si $P_n(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égale à n tel que

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n; \quad x_i \in [a, b],$$

alors

$$\forall x \in [a, b], \exists \xi_x \in [a, b] / E(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (2.3)$$

avec $\prod_{i=0}^n (x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$.

Preuve. On remarque que si $x = x_i$ alors $E(x_i) = f(x_i) - p_n(x_i) = 0$, pour $i = 0, \dots, n$.

Maintenant, si $x \neq x_i$, on pose

$$\lambda(x) = \frac{f(x) - P_n(x)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}$$

et

$$\Phi(t) = f(t) - P_n(t) - \lambda(x) \prod_{i=0}^n (t - x_i). \quad (2.4)$$

$\Phi(t)$ est une fonction de classe C^{n+1} et s'annule en $n+2$ points x_0, x_1, \dots, x_n, x . D'où d'après le lemme 2.1

$$\exists \xi \in [a, b] / \Phi^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

D'autre part, le polynôme $\prod_{i=0}^n (t - x_i)$ est de degré $n+1$ avec le coefficient de t^{n+1} égale à 1 donc sa dérivée $n+1$ fois égale à $(n+1)!$. Donc

$$\Phi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \lambda(x)(n+1)!.$$

Alors, $\Phi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \lambda(x)(n+1)! = 0 \Rightarrow \lambda(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$.

D'où le résultat. ■

Corollaire 2.1

$$\forall x \in [a, b] : |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\prod_{i=0}^n |(x - x_i)|}{(n+1)!} \sup_{\xi \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

Ou encore

$$\forall x \in [a, b] : |f(x) - P_n(x)| \leq \left| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \sup_{\xi \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

Preuve. On a f est de classe C^{n+1} alors $f^{(n+1)}$ continue sur $[a, b]$ donc est aussi pour $|f^{(n+1)}|$ donc $|f^{(n+1)}|$ est bornée. Ainsi le résultat. ■

2.3 Interpolation de Lagrange

L'interpolation de Lagrange est une façon simple de construire un polynôme de collation, sans passer par la résolution du système linéaire (2.1).

Définition 2.2 On appelle polynôme de Lagrange associés aux $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ deux à deux distincts les $(n+1)$ polynômes $L_k(x)$ définie par :

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}. \quad (2.5)$$

Proposition 2.1 Les polynômes de Lagrange $L_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, n$ possèdent les propriétés suivante :

1. Pour tout $i \geq 0$; L_i est un polynôme de degré n ;
- 2.

$$L_k(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq k; \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.6)$$

3. Les polynômes de Lagrange associés à $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ constituent une base de P_n , où P_n est un ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Preuve. 1) La première proposition est évidente.

2) On a $L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$, alors pour $i = k$, on obtient

$$L_k(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x_k - x_j}{x_k - x_j} = 1$$

pour $i \neq k$

$$L_k(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x_i - x_j}{x_k - x_j} = 0.$$

3) On a $\{L_0, L_1, \dots, L_n\}$ est constitué de $(n+1)$ polynômes et $\dim P_n = n+1$. Donc pour démontrer que $\{L_0, L_1, \dots, L_n\}$ est une base de P_n il suffit de montrer que $\{L_0, L_1, \dots, L_n\}$ est une famille libre.

Supposons que $\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(x) = 0$. Alors, d'après (2.6) on a :

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(x_0) = \lambda_0 L_0(x_0) + \lambda_1 L_1(x_0) + \dots + \lambda_n L_n(x_0) = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0.$$

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(x_1) = \lambda_0 L_0(x_1) + \lambda_1 L_1(x_1) + \dots + \lambda_n L_n(x_1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.$$

Et par suite

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(x_n) = \lambda_0 L_0(x_n) + \lambda_1 L_1(x_n) + \dots + \lambda_n L_n(x_n) = 0 \Rightarrow \lambda_n = 0.$$

D'où, $\forall k = 0, \dots, n$;

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(x_k) = \lambda_0 L_0(x_k) + \lambda_1 L_1(x_k) + \dots + \lambda_n L_n(x_k) = 0 \Rightarrow \lambda_k = 0.$$

Par conséquent $\{L_0, L_1, \dots, L_n\}$ est une base de P_n . ■

D'après cette proposition on en déduit le théorème suivant :

Théorème 2.3 Soit (x_0, x_1, \dots, x_n) , $(n+1)$ points distincts et une fonction f dont les valeurs en ces points $(f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n))$. Alors il existe un seul polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Ce polynôme est donné par :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x) f(x_k). \tag{2.7}$$

Preuve. D'après la proposition précédente on a

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x) f(x_k).$$

Ainsi

$$P_n(x_i) = \sum_{k=0}^n L_k(x_i) f(x_k) = f(x_i)$$

Comme le polynôme d'interpolation est unique alors on a bien que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x) f(x_k).$$

■

Exemple 2.2 Pour $n = 1$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Donc

$$P_1(x) = f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

C'est l'équation de la droite qui passe par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$.

Pour $n = 2$ on a : x_0, x_1 et x_2

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Ainsi

$$P_2(x) = f(x_0) \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1) \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2) \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

C'est l'équation de parabole qui passe par les points $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$.

Remarque 2.3 – En pratique, on utilise l'interpolation polynômiale avec des polynômes de degré n assez grand ou l'interpolation polynômiale par morceaux. Ainsi dans l'exemple précédent, il faut augmenter le nombre de points d'interpolations.

- Si les valeurs $f(x_i) = y_i$ sont des valeurs expérimentales. L'interpolation polynomiale est une technique peu appropriée pour de telles situations. Les polynômes de degré élevé sont sensibles à la perturbation des données.
- La méthode de Lagrange s'adapte mal au changement du nombre de points (x_i, y_i) . On ne peut pas utiliser les coefficients de Lagrange si on passe de n à $(n + 1)$ points.

2.4 Interpolation de Newton

On suppose qu'on a $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$. Soit $P_n(x)$ le polynôme d'interpolation de la fonction de degré n tel que $P_n(x_i) = f(x_i)$.

Définition 2.3 La forme de Newton du polynôme d'interpolation est :

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1}).$$

On remarque que les polynômes $\{N_0(x), \dots, N_n(x)\}$ forment une base tels que :

$$N_0(x) = 1$$

$$N_1(x) = x - x_0$$

$$N_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

⋮

$$N_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

Définition 2.4 Soit f une fonction dont on connaît les valeurs $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$. On définit les différences divisées de f aux points x_0, x_1, \dots, x_n par les relations de récurrences suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} f[x_i] = f(x_i), \\ f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \text{ premières différences divisées de } f, \\ f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_i - x_{i+2}} \text{ deuxième différences divisées de } f, \\ \vdots \\ f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+p}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+p-1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+p}]}{x_i - x_{i+p}} \text{ } p^{\text{ème}} \text{ différences divisées de } f \end{array} \right.$$

D'après cette définition on a $P_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$,

$$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

⋮

$$a_n = f[x_0, \dots, x_n]$$

On a le théorème suivant :

Théorème 2.4 Le polynôme d'interpolation de Newton passant par $(x_i, f(x_i))_{i=0, \dots, n}$ peut s'écrire :

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

Ce polynôme d'interpolation est appelé **forme de Newton du polynôme d'interpolation par les différences divisées**.

Pour démontrer ce théorème on utilise le lemme suivant.

Lemme 2.2 Si $P_n(x)$ est un polynôme de degré n , sa différence divisée d'ordre $(n + 1)$ est identiquement nulle, c'est à dire $f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = 0$ pour tout système de $(n + 1)$ nombres distincts x_0, x_1, \dots, x_n .

Preuve. du lemme 2.2 Soit $P_n(x)$ un polynôme de degré n et $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ sa différence divisée, on a

$$f[x_0, x] = \frac{P_n(x) - P_n(x_0)}{x - x_0} \text{ est un polynôme de degré } n - 1$$

$$f[x_0, x_1, x] = \frac{f[x_1, x] - f[x_0, x_1]}{x - x_0} \text{ est un polynôme de degré } n - 2$$

Par récurrence, on aura

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x] = \text{constante, est un polynôme de degré } 0$$

Ainsi $f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = 0$ ■

Preuve. du théorème 2.4

En appliquant les formules de différences divisées au polynôme $P_n(x)$, on trouve

$$f[x, x_0] = \frac{P_n(x) - P_n(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow P_n(x) = P_n(x_0) + f[x, x_0](x - x_0)$$

et

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1} \Rightarrow f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1).$$

D'où

$$P_n(x) = P_n(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, \dots, x_n]$$

$$(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) + f[x, x_0, \dots, x_n]$$

$$(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

D'après le lemme 2.2, on a $f[x, x_0, \dots, x_n] = 0$. D'où

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

■

Exemple 2.3 Calculons le polynôme d'interpolation de la fonction qui est définie comme suit

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x)$	0	1	0

On construit le tableau des différences divisées de f :

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	0		
$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{2}{\pi}$	$-\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}$
π	0	$-\frac{\pi}{2}$	

On a alors

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
 &= \frac{2}{\pi}x - \left[\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\right]x(x - \frac{\pi}{2}) \\
 &= -\frac{\pi^2 + 8}{2\pi^2}x^2 - \frac{16 + \pi^2}{4\pi}x.
 \end{aligned}$$

Remarque 2.4 La forme de Newton par les différences divisées de la fonction f est la forme la plus utilisée pour calculer le polynôme d'interpolation, parce qu'elle nécessite le moins de calculs pour obtenir numériquement ses coefficients.

2.4.1 Relation entre différence divisées et les dérivées

Théorème 2.5 Soit f une fonction de classe $C^n([a, b])$ et x_0, x_1, \dots, x_n des nombres distincts dans $[a, b]$, alors

$$\exists \xi \in [a, b] \text{ tel que } f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}. \quad (2.8)$$

Preuve. Soit $g(x) = f(x) - P_n(x)$. Puisque $f(x_i) = P_n(x_i)$ $i = 0, \dots, n$, la fonction g possède $(n+1)$ zéro (au moins). D'après théorème de Rolle généralisé alors

$$\begin{aligned}
 &\exists \xi \in [a, b] \quad / g^{(n)}(\xi) = 0 \\
 &g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - n!f[x_0, \dots, x_n] \Rightarrow f^{(n)}(\xi) = n!f[x_0, \dots, x_n].
 \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

2.4.2 Erreur d'interpolation de Newton

Soit $\tilde{x} \in [a, b]$, $\tilde{x} \neq x_i$, $i = 0, \dots, n$.

Soit $P_{n+1}(x)$ le polynôme d'interpolation associé aux points $(x_0, f(x_0), \dots, (x_n, f(x_n)), (\tilde{x}, f(\tilde{x})))$.

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, \tilde{x}](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Si $\tilde{x} = x$

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) &= P_n(\tilde{x}) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, \tilde{x}](\tilde{x} - x_0)(\tilde{x} - x_1) \dots (\tilde{x} - x_n) \\ \Rightarrow f(\tilde{x}) - P_n(\tilde{x}) &= f[x_0, x_1, \dots, x_n, \tilde{x}](\tilde{x} - x_0)(\tilde{x} - x_1) \dots (\tilde{x} - x_n) \end{aligned}$$

D'après le théorème 2.5

$$\exists \xi \in [a, b] \text{ tel que } f[x_0, x_1, \dots, x_n, \tilde{x}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Alors

$$f(\tilde{x}) - P_n(\tilde{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (\tilde{x} - x_i). \quad (2.9)$$

Ainsi

$$\forall x \in [a, b] : E(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

2.4.3 Interpolation de Newton dans le cas équidistant

Il arrive souvent que la fonction à interpoler soit donnée en des points équidistants x_i avec le pas h qui est appelé le pas d'interpolation où $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \dots, n$.

Différences finies progressives

Définition 2.5 Soient y_0, y_1, \dots, y_n des nombres réels. On définit la différence finie progressive d'ordre 1 par :

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i; \text{ pour } i = 0, \dots, n-1. \quad (2.10)$$

La différence finie progressive d'ordre 2 :

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i; \text{ pour } i = 0, \dots, n-2. \quad (2.11)$$

Et en générale, la différence finie progressive d'ordre k est :

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i; \text{ pour } i = 0, \dots, n-k. \quad (2.12)$$

Convention $\Delta^0 y_i = y_i$, pour $i = 0, \dots, n$.

Remarque 2.5 On peut définir les différences finies progressives qui vont jusqu'à l'ordre n seulement pour $(n+1)$ points.

Théorème 2.6 (Relation entre différences finies progressives et différences divisées) Soit f une fonction dont on connaît les valeurs $f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$ aux points x_i , $i = 0, \dots, n$ tels que $x_i = x_{i-1} + h$, alors

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k f(x_i)}{k!h^k}, \quad \text{pour } 0 \leq i \leq i+k \leq n.$$

Preuve. On le démontre par récurrence.

Pour $k = 1$, on a

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta f(x_i)}{h}$$

donc la relation est vraie pour $k = 1$. Maintenant, supposons que la relation est vraie à l'ordre k .

$$\begin{aligned} f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k+1}] &= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+k+1}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]}{x_{i+k+1} - x_i} \\ &= \frac{\Delta^k f(x_{i+1}) - \Delta^k f(x_i)}{(k+1)!h^{k+1}} \\ &= \frac{\Delta^{k+1} f(x_i)}{(k+1)!h^{k+1}}. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.7 (forme de Newton par les différences finies progressives) Soient x_0, x_1, \dots, x_n points équidistants. Le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points x_i , $i = 0, \dots, n$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ &\quad + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

On peut simplifier cette formule en écrivant :

$$x = x_0 + sh, \quad s \in [0, n] \Rightarrow \frac{x - x_0}{h} = s$$

alors

$$\begin{aligned} f[x_0, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) &= \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!} \frac{sh}{h} \frac{(s-1)h}{h} \dots \frac{s-k+1}{h} \\ &= \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!} s(s-1) \dots (s-k+1). \end{aligned}$$

Donc

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{s}{1!} \Delta f(x_0) + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 f(x_0) + \dots \\ + \frac{s(s-1) \dots (s-n+1)}{n!} \Delta^n f(x_0).$$

En utilisant la notion

$$C_k^s = \frac{s(s-1) \dots (s-k+1)}{k!}.$$

On obtient

$$P_n(x) = f(x_0) + C_1^s \Delta f(x_0) + C_2^s \Delta^2 f(x_0) + \dots + C_n^s \Delta^n f(x_0).$$

Différences finies regressives

Définition 2.6 Soient y_0, y_1, \dots, y_n des nombres réels. On définit la différence finie regressive d'ordre 1 par :

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}; \quad \text{pour } i = 1, \dots, n. \quad (2.14)$$

La différence finie regressive d'ordre 2 :

$$\nabla^2 y_i = \nabla y_i - \nabla y_{i-1}; \quad \text{pour } i = 2, \dots, n. \quad (2.15)$$

Et en générale, la différence finie regressive d'ordre k est :

$$\nabla^k y_i = \nabla^{k-1} y_i - \nabla^{k-1} y_{i-1}; \quad \text{pour } i = k, k+1, \dots, n. \quad (2.16)$$

Convention $\nabla^0 y_i = y_i$, pour $i = 0, \dots, n$.

Dans ce cas le polynôme d'interpolation de Newton est donné par

$$P_n(x) = f(x_n) + \frac{\nabla f(x_n)}{1!h} (x - x_n) + \frac{\nabla^2 f(x_n)}{2!h^2} (x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots \\ + \frac{\nabla^n f(x_n)}{n!h^n} (x - x_n) \dots (x - x_1).$$

Estimation de l'erreur

L'erreur est donnée par

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

avec $M_{n+1} = \sup_{x \in [x_0, x_n]} f^{(n+1)}(x)$. Ou bien

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |h^{n+1} s(s-1) \dots (s-n)| \quad (2.17)$$

avec $s = \frac{x-x_0}{h}$.

2.5 Exercices

Exercice 1 :

On souhaite concevoir un virage d'une voie de chemin de fer entre les points $(0,0)$ et $(1,1)$. Le virage est décrit par une courbe de la forme $y = f(x)$ qui satisfait :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 1.$$

De plus, pour assurer une transition en douceur, la pente de la courbe doit satisfaire :

$$f'(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(1) = 0,3.$$

On représente la courbe à l'aide d'un polynôme dans l'intervalle $[0,1]$.

1. Quel est le degré minimal que ce polynôme devra avoir pour remplir toutes les conditions ?
2. Calculer ce polynôme.

Exercice 2 :

1. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange satisfaisant au tableau ci-dessous

x	0	2	3	5
$f(x)$	-1	2	9	87

2. Donner l'expression analytique de l'erreur.
3. Obtenir une approximation de $f(1.5)$.

Exercice 3 :

On interpole $f(x) = \ln(x)$ par un polynôme aux points $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ et $x_4 = 5$.

1. Trouver une expression algébrique de ce polynôme en utilisant la méthode de Newton.
2. Estimer la valeur de $f(6,32)$ avec le polynôme trouvé dans la première question et calculer l'erreur absolue. Comparer cette valeur avec l'approximation fournie par la formule $E_n(x) \simeq f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ en prenant comme point supplémentaire $x = 5,5$.
3. Combien de points à intervalle régulier de 0,5 faudrait-il ajouter, en partant de $x_5 = 5,5$, afin que l'erreur absolue de l'estimé de $f(6,32)$ obtenu dans la deuxième question diminue d'un facteur 100.
4. Sur l'intervalle $[3,4]$, le graphe du polynôme trouvé dans la première question est-il au dessus de celui de $f(x)$, en dessous, ou se croisent-ils ?

Exercice 4 :

Soit L_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x - \alpha}$$

aux $(n + 1)$ points distincts x_0, \dots, x_n de l'intervalle $[-1, 1]$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Calculer les dérivées successives de la fonction f .

2. Montrer que si $\alpha > 3$, et si les $(n + 1)$ points x_0, \dots, x_n sont equidistants, nous avons alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f(x) - L_n(x)\|_\infty = 0.$$

3. Dans la pratique nous n'agissons pas du tout comme ce qui précède. Nous préférons utiliser des polynômes de degré peu élevé sur chaque petit intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Écrire l'approximation de Lagrange de degré 1, L_n de f sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, pour $i = 0, \dots, n$.

2.6 Corrigés des exercices

Solution exercice 1

1. On a 4 conditions. On peut donc interpoler $f(x)$ avec un polynôme de degré 3.

2. On a $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ et $p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$. Alors on obtient :

$$p(0) = a_0 = 0$$

$$p'(0) = a_1 = 0$$

$$p(1) = a_2 + a_3 - 1 \Rightarrow a_2 = 1 - a_3$$

$$p'(1) = 2a_2 + 3a_3 = 2(1 - a_3) + 3a_3 = 0, 3 \Rightarrow a_3 = -1, 7.$$

D'où

$$p(x) = -1,7x^3 + 2,7x^2.$$

Solution exercice 2

1. Le polynôme de Lagrange de degré inférieur ou égal à 3 est :

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^3 L_i(x)f(x_i)$$

avec

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \\ &= \frac{(x - 2)(x - 3)(x - 5)}{(0 - 2)(0 - 3)(0 - 5)} \\ &= -\frac{1}{30}(x - 2)(x - 3)(x - 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
&= \frac{x(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)} \\
&= \frac{1}{6}x(x-3)(x-5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\
&= \frac{x(x-2)(x-5)}{(3-0)(3-2)(3-5)} \\
&= -\frac{1}{6}x(x-2)(x-5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
&= \frac{x(x-2)(x-3)}{(5-0)(5-2)(5-3)} \\
&= \frac{1}{30}x(x-2)(x-3)
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3) \\
&= \frac{53}{30}x^3 - 7x^2 + \frac{253}{30}x - 1.
\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
E &= |f(x) - P_3(x)| = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{(4)!} \prod_{i=0}^4 |x - x_i| \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{(4)!} |x(x-2)(x-3)(x-5)|.
\end{aligned}$$

avec $\xi_x \in [a, b]$.

3. D'après la première question on en déduit :

$$f(1.5) \simeq P_3(1.5) = \frac{149}{80}.$$

Solution exercice 3

1. On a $n = 4$, donc le degré du polynôme est inférieur ou égal à 4. Le polynôme de Newton est donné par :

$$p_4(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0) \dots (x - x_3).$$

La table des différences divisées est comme suit :

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$
1	0				
2	0,693147	0,693147	-0,143841		
3	1,098612	0,405465	-0,058891	0,028316	
4	1,386294	0,287682	-0,032269	0,008874	-0,004860
5	1,609437	0,223143			

Ainsi

$$p_4(x) = 0,693147(x-1) - 0,143841(x-1)(x-2) + 0,028316(x-1)(x-2)(x-3) - 0,004860(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$p_4(x) = -1,267382 + 1,679182x - 0,483861x^2 + 0,076922x^3 - 0,004860x^4.$$

2. Pour l'estimation en point 6.32, on calcule $p_4(6,32)$. On obtient

$$p_4(6,32) = 1,681902.$$

Or, $f(6,32) = \ln(6,32) = 1,843719$. Alors L'erreur absolue est

$$E = |f(6,32) - p_4(6,32)| = |1,843719 - 1,681902| \simeq 0,161817.$$

Maintenant, si on ajoute l'abscisse $x = 5,5$ et que l'on complète la table de différences finies, on peut estimer l'erreur commise par :

$$E_4(x) \simeq f[x_0, \dots, x_5](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = p_5(x) - p_4(x)$$

$$\simeq (0,000785)(6,32 - 1)(6,32 - 2)(6,32 - 3)(6,32 - 4)(6,32 - 5) \simeq 0,18356$$

3. On veut maintenant diminuer cette erreur d'un facteur 100 et donc obtenir une erreur absolue de 0,001618. Le polynôme de Newton de degré 5 obtenu en ajoutant le point $x_5 = 5,5$ est :

$$p_5(x) = p_4(x) + f[x_0, \dots, x_5](x - 1)(x - 2) \dots (x - 5)$$

$$= p_4(x) + 0,78558 \times 10^{-3}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

ainsi

$$p_5(6,32) = 1,681902 + 0,183563 = 1,865465.$$

Alors, l'erreur absolue est

$$E = |f(6,32) - p_5(6,32)| = |\ln(6,32) - 1,865465| = 0,021746.$$

On ajoute un nœud ($x_6 = 6,0$) pour obtenir

$$\begin{aligned} p_6(x) &= p_5(x) + f[x_0, \dots, x_6](x-1)(x-2)\dots(x-5)(x-5,5) \\ &= p_5(x) - 0,11905 \times 10^{-3}(x-1)(x-2)\dots(x-5,5) \end{aligned}$$

On a alors $p_6(6,32) = 1,865465 - 0,2281 = 1,842654$ et l'erreur absolue est

$$E = |1,842654 - \ln(6,32)| = 0,001065$$

ce qui est mieux que la précision requise.

4. On sait que l'erreur exacte peut s'écrire

$$E = \frac{1}{120} f^{(5)}(\xi_x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5), \quad \xi \in [1,5]$$

et nous sommes intéressés au signe de l'erreur. Or la fonction $f^{(5)}(t) = \frac{24}{t^5}$ et donc le signe de l'erreur ne dépend que de celui de $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$. Si $x \in [3,4]$, alors $(x-1)$, $(x-2)$ et $(x-3)$ sont positifs et $(x-4)$ et $(x-5)$ sont négatifs. Par conséquent, l'erreur est positive et le graphe de $\ln(x)$ est au dessus de celui de $p_4(x)$.

Solution exercice 4

1. On calcule les dérivées successives de la fonction f , on obtient

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-\alpha)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(x-\alpha)^3}$$

et plus généralement

$$f^{(n+1)} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{(x-\alpha)^{n+2}}.$$

2. D'après la formule de l'erreur d'interpolation, il existe un $\xi \in [-1,1]$ tel que

$$|f(x) - L_n(x)| = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n |x - x_i|.$$

Ainsi, si $\alpha > 3$ on a pour $\xi \in [-1,1]$

$$2 < |\xi - \alpha| = \alpha - \xi < 4$$

et

$$\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+)!} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{|\xi - \alpha|^{n+1}}$$

d'où

$$|f(x) - L_n(x)| = \frac{1}{2} \prod_{i=0}^n \left| \frac{x - x_i}{\xi - \alpha} \right|$$

or pour tout $x \in [-1, 1]$ et $i = 0, \dots, n$ on a $|x - x_i| \leq 2$ et donc

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{1}{2} \prod_{i=0}^n \left| \frac{x - x_i}{\xi - \alpha} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\alpha - \xi} \right)^{n+1}$$

Donc puisque $\frac{1}{2} < \frac{2}{\alpha - \xi} < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f(x) - L_n(x)\|_{+\infty} \leq \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\alpha - \xi} \right)^{n+1} = 0.$$

3. On considère que $\alpha \notin [-1, 1]$, ainsi la fonction f est bien définie sur $[-1, 1]$. Sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on a

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{1}{x_i - \alpha} + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \left(\frac{1}{x_{i+1} - \alpha} - \frac{1}{x_i - \alpha} \right) \\ &= \frac{1}{x_i - \alpha} - (x - x_i) \end{aligned}$$

Chapitre 3

Dérivation et intégration numérique

Nous avons vu antérieurement comment approcher une fonction $f(x)$ connue aux points x_0, x_1, \dots, x_n dans un intervalle $[a, b]$ tel que $f(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ par un polynôme d'interpolation $P_n(x)$. Nous allons faire pratiquement le même procédé pour la dérivation et l'intégration par exemple si nous connaissons les positions d'un mobile à des instants répétés et nous voulons connaître sa vitesse, ou inversement en connaissant la vitesse en des points et nous voulons connaître la distance parcourue en faisant l'intégration. Donc il s'agit de construire une approximation numérique de la dérivée (première, seconde,...) ou l'intégrale de la fonction f .

3.1 Dérivation numérique

Il existe deux approches pour construire de telles approximations, l'une utilise le développement en série de Taylor et l'autre utilise les formules d'interpolation.

3.1.1 Utilisation de la formule de Taylor

Dérivée première

Considérons une fonction dérivable sur un intervalle. Pour connaître une approximation de $f'(x)$, le procédé le plus simple consiste à

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (3.1)$$

D'après la formule de Taylor on a

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(\xi), \quad \xi \in]x, x+h[$$

d'où

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi), \quad \xi \in]x, x+h[\quad (3.2)$$

ainsi

$$f'_d(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.3)$$

est la formule de dérivée à droite d'ordre 1 avec une erreur est en $o(h)$.

Par la même manière on définit la dérivée à gauche d'ordre 1 comme suit :

$$f'_g(x) \simeq \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (3.4)$$

D'autre part, on a aussi

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\eta_1), \quad \eta_1 \in]x, x+h[$$

et

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\eta_2), \quad \eta_2 \in]x-h, x[$$

d'où

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3!}[f^{(3)}(\eta_1) + f^{(3)}(\eta_2)], \quad \eta_1 \in]x, x+h[, \quad \eta_2 \in]x-h, x[.$$

Ainsi

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{2 \cdot 3!}[f^{(3)}(\eta_1) + f^{(3)}(\eta_2)], \quad \eta_1 \in]x, x+h[, \quad \eta_2 \in]x-h, x[.$$

On sait qu'en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\xi \in]x-h, x+h[$ tel que

$$\frac{f^{(3)}(\eta_1) + f^{(3)}(\eta_2)}{2} = f^{(3)}(\xi).$$

Il s'en suit

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in]x-h, x+h[. \quad (3.5)$$

D'où la formule dérivée centrée d'ordre 2 est définie par :

$$f'_c(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (3.6)$$

avec une erreur en $o(h^2)$.

Dérivée seconde

On a

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\eta_1), \quad \eta_1 \in]x, x+h[$$

et

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\eta_2), \quad \eta_2 \in]x-h, x[.$$

Donc

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2f''(x) + \frac{h^4}{4!}[f^{(4)}(\eta_1) + f^{(4)}(\eta_2)],$$

pour $\eta_1 \in]x, x+h[$, $\eta_2 \in]x-h, x[$. Ainsi

$$f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - \frac{h^2}{4!}[f^{(4)}(\eta_1) + f^{(4)}(\eta_2)],$$

avec $\eta_1 \in]x, x+h[$, $\eta_2 \in]x-h, x[$. Il s'en suit

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{2 \cdot 3!}f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in]x-h, x+h[. \quad (3.7)$$

C'est une formule centrée d'ordre 2.

On peut établir la formule centrée d'ordre 4

$$f''(x) = \frac{-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h)}{12h^2} + \frac{h^4}{90}f^{(6)}(\xi),$$

avec $\xi \in]x-h, x+h[$.

3.1.2 Utilisation des formules d'interpolation

Dérivée première

D'après le chapitre précédent, la formule d'interpolation sous la forme de Newton s'écrit :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x-x_0) + \dots + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + \dots \\ &+ f[x_0, \dots, x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1}) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x-x_i), \quad \xi \in]x_0, x_n[\end{aligned}$$

On pose $w_n(x) = \prod_{i=0}^n (x-x_i)$. En dérivant

$$f'(x) = f[x_0, x_1]w'_0(x) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n]w'_{n-1}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w'_n(x)$$

$$+\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+1)!}w_n(x), \quad \xi \in]x_0, x_n[.$$

$$f'(x) = \prod_{i=0}^n f[x_0, \dots, x_i]w'_{i-1}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w'_n(x) + \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+1)!}w_n(x), \quad \xi \in]x_0, x_n[.$$

Pour $n = 1$, on a

$$f'(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}[x - x_0 + x - x_1] + \frac{f^{(3)}(\xi)}{2!}(x - x_0)(x - x_1), \quad \xi \in]x_0, x_1[$$

avec $h = x_1 - x_0$.

Si $x = x_0$ on obtient

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}h, \quad \xi \in]x_0, x_1[.$$

C'est la dérivée à droite d'ordre 1.

Si on utilise la formule de Newton régressive on obtient

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!h}, \quad \xi \in]x_0, x_1[.$$

C'est la dérivée à gauche d'ordre 1.

Maintenant, on choisit $x = \frac{x_0 + x_1}{2}$ et en prenant $x - x_0 = h$, on aura la formule centrée d'ordre 2

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in]x_0, x_1[.$$

Pour $n = 2$, si en prenant $x = x_0$, $x_1 = x + h$, $x_2 = x + 2h$

$$f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x + h) - f(x + 2h)}{2h} + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in]x, x + 2[$$

C'est la dérivée à droite d'ordre 2.

Et la formule de la dérivée à gauche d'ordre 2 est

$$f'(x) = \frac{f(x + 2h) + 4f(x + h) - 3f(x)}{2h} + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in]x, x + 2[$$

Si $x = x_0$, $x_1 = x - h$, $x_2 = x + h$ alors on a la formule centrée d'ordre 2

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in]x - h, x + h[.$$

Dérivée seconde

Par le même principe, pour la dérivée seconde, on choisit en général d'interpoler sur 3 points, ce qui donne (dans le cas de points équidistants) : on a

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} \prod_{i=0}^2 (x - x_i), \quad \xi \in]x_0, x_2[.$$

Alors

$$f'(x) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2](2x - x_1 - x_0) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{3!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} [(2x - x_1 - x_0)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1)], \quad \xi \in]x_0, x_2[.$$

Ainsi

$$f''(x) = 2f[x_0, x_1, x_2] + \frac{f^{(4)}(\xi)}{3} [(2x - x_1 - x_0)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1)] - \frac{f^{(5)}(\xi)}{3!} + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} [2(x - x_2) + (2x - x_1 - x_0) + (2x - x_0 - x_1)].$$

Si $x = x_0$, $x_1 = x + h$, $x_2 = x + 2h$ alors la formule de la dérivée seconde d'ordre 2 est donnée par

$$f''(x) = \frac{f(x) + 2f(x + h) + f(x + 2h)}{h^2} - \frac{2h^2}{3} f^{(4)}(\xi) - \frac{h}{3} f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in]x - h, x + h[.$$

3.2 Erreur

3.2.1 Dérivée premier ordre

Théorème 3.1 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Alors

$$E_d = |f'(x_0) - f'_d(x_0)| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [x_0, x_0 + 1]} |f''(x)|.$$

Preuve. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$; en utilisant le développement de Taylor :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(\xi), \quad \xi \in [x_0, x_0 + h]$$

alors

$$|f'(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}| = \left| \frac{h}{2} f''(\xi) \right| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [x_0, x_0 + 1]} |f''(x)|.$$

Alors, on obtient que :

$$|f'(x_0) - f'_d(x_0)| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [x_0, x_0+1]} |f''(x)|.$$

■

Théorème 3.2 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Alors

$$E_g = |f'(x_0) - f'_g(x_0)| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [x_0-1, x_0]} |f''(x)|.$$

En appliquant la formule de Taylor d'ordre 3, on aura le théorème suivant :

Théorème 3.3 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 , $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Alors

$$E_c = |f'(x_0) - f'_c(x_0)| \leq \frac{h^2}{24} \max_{x \in [x_0-\frac{1}{2}, x_0+\frac{1}{2}]} |f^{(3)}(x)|.$$

Preuve. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$; d'après le développement de Taylor on a

$$f(x_0 + \frac{h}{2}) = f(x_0) + \frac{h}{2}f'(x_0) + \frac{h^2}{4.2}f''(x_0) + \frac{h^3}{8.6}f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in [x_0, x_0 + \frac{h}{2}]$$

et

$$f(x_0 - \frac{h}{2}) = f(x_0) - \frac{h}{2}f'(x_0) + \frac{h^2}{4.2}f''(x_0) - \frac{h^3}{8.6}f^{(3)}(\eta), \quad \eta \in [x_0 - \frac{h}{2}, x_0].$$

Et on a aussi comme résultat le théorème suivant :

Théorème 3.4 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 , $x_0 \in \mathbb{R}$ et $0 < h \leq 1$. Alors

$$E_c = \left| f'(x_0) - \frac{f(x_0 + \frac{1}{2}) - f(x_0 - \frac{1}{2})}{h} \right| \leq Ch^2.$$

Donc d'après ce théorème il suffit de prendre $C = \frac{1}{24} \max_{x \in [x_0-\frac{1}{2}, x_0+\frac{1}{2}]} |f^{(3)}(x)|$.

D'où le résultat. ■

3.2.2 Dérivée second d'ordre

En utilisant le même principe comme pour la première dérivée, il suffit dans ce cas de passer à l'ordre 4 dans la formule de Taylor, on aura

Théorème 3.5 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^4 , $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Alors

$$E_c = |f''(x_0) - f''_c(x_0)| \leq \frac{h^2}{24} \max_{x \in [x_0-1, x_0+1]} |f^{(4)}(x)|.$$

Preuve. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^4 , $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, on a

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \frac{h}{2}) - f'(x_0 - \frac{h}{2})}{h}$$

et

$$f'(x_0 + \frac{h}{2}) \simeq \frac{f(x_0 + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}) - f(x_0 + \frac{h}{2} - \frac{h}{2})}{h},$$

$$f'(x_0 - \frac{h}{2}) \simeq \frac{f(x_0 - \frac{h}{2} + \frac{h}{2}) - f(x_0 - \frac{h}{2} - \frac{h}{2})}{h}.$$

D'où

$$f''(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}.$$

D'autre part, on a aussi $\forall f \in C^4$ $x_0 \in \mathbb{R}$ $\exists C > 0$, $\forall 0 < h \leq 1$:

$$\left| f''(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} \right| \leq Ch^2.$$

D'où il suffit de prendre $C = \frac{1}{24} \max_{x \in [x_0-1, x_0+1]} |f^{(4)}(x)|$. Ainsi le résultat. ■

3.3 Intégration numérique

Dans cette partie nous essayons de développer quelques méthodes numériques de calcul l'intégrale d'une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$.

Pour approcher numériquement cette intégrale on décompose l'intervalle $[a, b]$ en $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. On a alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx.$$

Sur chaque $[x_i, x_{i+1}]$, on applique une méthode d'intégration élémentaire en utilisant le polynôme d'interpolation de Newton de f

$$P_i(x) = f[x_{i,0}] + f[x_{i,0}, x_{i,1}](x - x_{i,0}) + \dots + f[x_{i,0}, x_{i,1}, \dots, x_{i,l}](x - x_{i,0}) \dots (x - x_{i,l})$$

en des points $x_{i,0}, \dots, x_{i,k}$ de l'intervalle $[a, b]$ (qui peuvent être ou non dans $[x_i, x_{i+1}]$).

3.3.1 Méthodes des rectangles

On approche la fonction f par la constante $f(x_{i,0})$ où $x_{i,0} \in [x_i, x_{i+1}]$. Alors on obtient

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_{i,0})dx = \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}], \quad h_i = x_{i+1} - x_i. \quad (3.8)$$

Les choix courants pour ξ_i sont :

– Si $\xi_i = x_i$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(x_i), \quad (\text{Formule de rectangle à gauche}).$$

– Si $\xi_i = x_{i+1}$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(x_{i+1}), \quad (\text{Formule de rectangle à droite}).$$

– Si $\xi_i = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} h_i f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right), \quad (\text{Formule de rectangle au point milieu}).$$

3.3.2 Méthode des Trapèzes

On prend $l = 1$, sachant que l représente le nombre de subdivision de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, alors on remplace f par le polynôme d'interpolation de Newton aux points x_i, x_{i+1} . On obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x_{i,0}) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i))dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(f(x_{i+1}) + f(x_i)) \\ &\simeq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_{i+1} + h_i}{2} f(x_i) + \frac{1}{2}(h_1 f(x_0) + h_n f(x_n)). \end{aligned} \quad (3.9)$$

En cas équadisant c'est-à-dire $h_i = h = x_{i+1} - x_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$ on a

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)]$$

$$\simeq \frac{h}{2} [f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)]. \quad (3.10)$$

Exemple 3.1 On calcule l'intégrale suivante

$$I = \int_1^3 \ln(x) dx.$$

Donner une valeur approchée de l'intégrale I en utilisant la méthode des trapèzes composite avec 4 sous-intervalles. Cela revient à prendre $h = \frac{1}{2}$ et $x_0 = a = 1$, $x_4 = b = 3$, $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 2$ et $x_3 = \frac{5}{2}$.

D'après la méthode des trapèzes, on a

$$I = \frac{h}{2} [f(1) + f(3) + 2(f(\frac{3}{2}) + f(2) + f(\frac{5}{2}))] \simeq 1,821.$$

3.3.3 Méthode de Simpson

On prend cette fois $l = 2$, telle que l représente le nombre de subdivision de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ donc on interpole la fonction f aux points x_i , $x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$, x_{i+1} en utilisant le polynôme de Newton. Soit $h_i = x_{i+1} - x_i$, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx &\simeq \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i) + f[x_i, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+1}](x - x_i)(x - x_{i+1})] dx \\ &= h_i f(x_i) + \frac{1}{2} h_i^2 f[x_i, x_{i+1}] + f[x_i, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+1}] \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) dx. \end{aligned}$$

On écrit $x - x_{i+1} = x - x_i + x_i - x_{i+1}$ on aura

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) dx = -\frac{h_i^3}{6},$$

et

$$\begin{aligned} h_i^2 [f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}]] &= h_i (f(x_{i+1}) - f(x_i)), \\ h_i^3 f[x_i, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+1}] &= 2h_i (f(x_{i+1}) - 2f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)). \end{aligned}$$

D'où

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_i}{6} [f(x_i) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})]. \quad (3.11)$$

Dans le cas équidistant cette formule composée devient

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i+1}) \right] \quad (3.12)$$

avec $h = \frac{b-a}{n}$.

Exemple 3.2 On veut calculer l'intégrale $I = \int_0^6 x^3 dx$. Pour $n = 2$ on a $h = 3$, d'où

$$I = \frac{h}{3}(f(0) + f(6) + 4f(3)) = 324.$$

Pour $n = 4$ on a $h = \frac{3}{2}$, d'où

$$I = \frac{h}{3}(f(0) + f(6) + 2f(3) + 4(f(\frac{3}{2}) + f(\frac{9}{2}))) = 324$$

D'autre part, la valeur exacte de cette intégrale est

$$I = \int_0^6 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^6 = 324.$$

On remarque que la méthode de Simpson est exacte pour le polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

3.3.4 Erreurs de quadrature

Théorème 3.6 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$. Si les valeurs de f aux points x_0, x_1, \dots, x_n sont connues, et $\int_a^b P_i(x) dx$ est l'approximation d'ordre n de $\int_a^b f(x) dx$ où $P_i(x)$ est le polynôme d'interpolation de Newton de la fonction f alors :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b P_i(x) dx \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx$$

où $M_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$.

Appliquons ce théorème aux méthodes usuelles. On obtient.

Erreur de méthode des rectangles

La méthode est d'ordre 0 et exacte seulement pour les constantes.

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(\xi_i) dx \right| \leq \frac{h_i^2}{2} M_1. \quad (3.13)$$

Dans le cas d'un pas constant, on obtient :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(\xi_i) dx \right| \leq \frac{M_1}{2} (b - a) h. \quad (3.14)$$

Erreur de la méthode des trapèzes

Pour $n = 1$ on trouve

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) \right| \leq \frac{M_2}{2} \left| \int_a^b (x-a)(x-b) dx \right| = \frac{M_2}{12}(b-a)^3. \quad (3.15)$$

Pour la formule composée de la méthode des trapèzes, on en déduit que l'erreur est majorée par

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \right| \leq \frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3.$$
$$E(f) \leq \frac{M_2}{12} h^2 (b-a). \quad (3.16)$$

Erreur de la méthode de Simpson

Cette fois $n = 2$ alors on a

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6} \left(f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) \right| \leq \frac{M_4}{24} \left| \int_a^b (x-a)(x-b)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx \right|$$
$$\leq \frac{M_4}{90} \left(\frac{b-a}{2} \right)^5. \quad (3.17)$$

La formule composée correspondante avec pas constant h donnera une erreur majorée par :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i+1}) \right] \right| \leq \frac{M_4}{2880n^4} (b-a)^5. \quad (3.18)$$

Par ailleurs, la méthode de Simpson (bien que reposant sur une interpolation à trois points) est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

Exemple 3.3 Calculons l'intégrale $\int_0^1 e^{-x^2} dx$. Utilisons les méthodes élémentaires précédentes à l'aide des valeurs de $f(x) = e^{-x^2}$ aux points $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$. Alors on a

$$f(0) = 1, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 0,7880 \quad \text{et} \quad f(1) = 0,36788.$$

Méthode des rectangles

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 1$$

calculons l'erreur

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}, f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} \leq 0 \text{ sur } [0, 1]$$

alors f' est décroissante d'où $M_1 = |f'(1)| = 0,735788$ et

$$E_{\text{rectangle}}(f) \leq \frac{M_1}{2}(b-a)h = \frac{M_1}{2} = 0.367894.$$

Méthode des trapèzes pour $n = 1$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \frac{h}{2}(f(0) + f(1)) = 0,68394..$$

Avec une erreur :

$$E_{\text{trapeze}}(f) \leq \frac{M_2}{12}(b-a)^3 = \frac{M_2}{12} = 0.0613132.$$

Méthode de Simpson Pour $n = 2$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \frac{h}{6}(f(0) + f(1) + 4f(\frac{1}{2})) = 0,74718.$$

Avec une erreur

$$E_{\text{Simpson}}(f) \leq \frac{M_4}{2880}(b-a)^5 = \frac{M_4}{2880} = 0.000254764.$$

La valeur exacte est $I_{\text{exacte}} = 0,74682$. On remarque que $E = |I_{\text{exacte}} - I_S| = 0,00036 \simeq 4 \times 10^{-4}$, donc la méthode de Simpson donne une approximation à 4×10^{-4} avec seulement trois valeurs de f parce que les dérivées d'ordre supérieur ne varient pas trop sur l'intervalle $[0, 1]$.

3.4 Exercices

Exercice 1 : Soit le tableau suivant

x	1	1.01	1.02
$f(x)$	1.27	1.32	1.38

1. Calculer les approximations de $f'(1.005)$, $f'(1.015)$ et $f''(1.01)$. données par les formules centrées

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$$

et

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

2. Si les données du tableau sont précises à ± 0.005 quelle sera l'erreur commise sur les trois quantités calculées ?

Exercice 2 : Soit une fonction f connue aux certains points x_i , $i = 0, \dots, n$ et $h = x_{i+1} - x_i$ un pas. On cherche à approcher la dérivée première $f'(x_i)$ par les trois valeurs $f(x_{i-2})$, $f(x_{i-1})$ et $f(x_i)$ à l'aide d'un schéma décentré suivant :

$$f'(x_i) = \frac{1}{h}[\alpha f(x_i) + \beta f'(x_{i-1}) + \gamma f''(x_{i-2})] + o(h^2).$$

Que valent les nombres α , β , γ ?

Exercice 3 :

- 1) Donner les formules des rectangles approchant $I = \int_a^b f(t)dt$.
- 2) Trouver l'erreur commise en appliquant la méthode des rectangles, ainsi que le nombre minimum n de subdivisions de $[0, 1]$ pour avoir $\int_0^1 e^{t^2} dt$ à 10^{-2} .
- 3) Donner la méthode des rectangles à point milieu.
- 4) Trouver l'erreur commise en appliquant la méthode des rectangles à point milieu. Même application qu'à la deuxième question.

Exercice 4 : On lance une fusée verticalement du sol et l'on mesure pendant les premières 80 secondes l'accélération γ

t (en s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
γ en m/s^2	30	31.63	33.44	35.47	37.75	40.33	43.29	46.70	50.67

Calculer la vitesse V de la fusée à l'instant $t = 80s$, par les Trapèzes puis par Simpson.

Exercice 5 : Soit l'intégrale $I = \int_0^\pi \sin(x)dx$.

1. Calculer la valeur exacte de I .
2. En utilisant la méthode des trapèzes généralisée et la méthode de simpson généralisée pour $h = \frac{\pi}{4}$:
 - a) Calculer I
 - b) Majorer l'erreur
 - c) Evaluer l'erreur.
3. Donner la valeur du pas h et le nombre de subdivision de l'intervalle $[0, \pi]$ pour que l'erreur obtenue par la méthode généralisé des trapèzes (resp. de Simpson) soit plus petite que 5×10^{-4} .

Exercice 6 : On note

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt, \quad J(f) = \sum_{i=0}^n w_i f(t_i)$$

1. On choisit $w_i = \int_a^b L_i(t)dt$, L_i les polynômes de base de Lagrange (coefficient du polynôme de Lagrange) associés aux points t_0, t_1, \dots, t_n .

1. Montrer que $I(p) = J(p)$, $\forall p \in \mathcal{P}_n$.

2. Réciproquement, on suppose que $I(p) = J(p)$, $p \in \mathcal{P}_n$.

Montrer que $w_i = \int_a^b L_i(t)dt$.

3. On note par p_0, p_1, \dots, p_n la base canonique de \mathcal{P}_n .

Montrer que $I(p) = J(p)$, $\forall p \in \mathcal{P}_n \Leftrightarrow I(p_i) = J(p_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$.

3.5 Corrigés des exercices

Solution exercice 1

On a

x	1	1.01	1.02
$f(x)$	1.27	1.32	1.38

1. Calculons les approximations de $f'(1.005)$, $f'(1.015)$ et $f''(1.01)$ en utilisant les formules centrées :

$$\begin{aligned} f'(1.005) &= \frac{f(1.005 + 0.005) - f(1.005 - 0.005)}{0.005} \\ &= \frac{f(1.01) - f(1)}{0.005} \\ &= 10 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f'(1.015) &= \frac{f(1.015 + 0.005) - f(1.015 - 0.005)}{0.005} \\ &= \frac{f(1.02) - f(1.01)}{0.005} \\ &= 12. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(1.01) &= \frac{f(1.01 + 0.01) - 2f(1.01) + f(1.01 - 0.01)}{0.01^2} \\ &= \frac{f(1.02) - 2f(1.01) + f(1)}{0.0001} \\ &= 100. \end{aligned}$$

2. Sachant que les données du tableau sont précises à $\varepsilon = \pm 0.005$, c'est à dire l'erreur absolue de f est $\Delta f(x_i) = \pm 0.005$ pour $i = 0, 1, 2$. En vertu de la proposition 1.1 et la proposition 1.2 du premier chapitre, on a

$\Delta[f(x+h) - f(x-h)] = \Delta f(x+h) + \Delta f(x-h) \simeq 2\Delta f(x)$ et même chose pour $\Delta[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] = \Delta f(x+h) + 2\Delta f(x) + \Delta f(x-h) \simeq 4\Delta f(x)$.

Par conséquent, d'après la première question, on obtient

$$f'(1.005) = 10 \pm 2 \frac{\Delta f(x)}{h} = 10 \pm 2,$$

$$f'(1.015) = 12 \pm 2 \frac{\Delta f(x)}{h} = 12 \pm 2,$$

et

$$f''(1.01) = 100 \pm 4 \frac{\Delta f(x)}{h^2} = 100 \pm 200.$$

D'après ces résultats, on remarque que une petite perturbation de f a induit une grande perturbation de f' et f'' .

Solution exercice 2

On utilise le développement de Taylor, on a

$$f(x_{i-1}) = f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) + O(h^3)$$

et

$$f(x_{i-2}) = f(x_i - 2h) = f(x_i) - 2hf'(x_i) + 2h^2f''(x_i) + O(h^3).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h}[\alpha f(x_i) + \beta f(x_{i-1}) + \gamma f(x_{i-2})] \\ &= \frac{\alpha + \beta + \gamma}{h}f(x_i) - (\beta + 2\gamma)f'(x_i) + h\left(\frac{\beta}{2} + 2\gamma\right)f''(x_i) + O(h^2) \end{aligned}$$

et cette relation est identique à $f'(x_i)$ si et seulement si

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$-\beta - 2\gamma = 1$$

$$\frac{\beta}{2} + 2\gamma = 0.$$

Alors, on obtient : $\beta = -2$, $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{3}{2}$.

On a donc

$$f'(x_i) \simeq \frac{1}{h}\left[\frac{3}{2}f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + \frac{1}{2}f(x_{i-2})\right] + O(h^2).$$

C'est un schéma inventé par Gear dans les années 1960.

Solution exercice 4

On sait que l'accélération γ est la dérivée de la vitesse V , donc,

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \gamma(t)dt$$

$$V(80) = 0 + \int_0^{80} \gamma(t) dt.$$

a) Calculons $V(80)$ par la méthode des trapèzes, d'après le tableau des valeurs, on a $h = 10$ et $n=8$. Alors

$$\begin{aligned} V(80) &= \frac{h}{2}(\gamma(t_0) + \gamma(t_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma(t_i)) \\ &= 5(30 + 50.67 + 2(31.63 + 33.44 + 35.47 + 37.75 + 40.33 + 43.29 + 46.70)) \\ &= 3089m/s \end{aligned}$$

b) Calculons $V(80)$ par la méthode de Simpson

$$\begin{aligned} V(80) &= \frac{h}{3}(\gamma(t_0) + \gamma(t_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \gamma(t_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n-1} \gamma(t_{2i+1})) \\ &= \frac{10}{3}(30 + 50.67 + 2(33.44 + 37.75 + 43.29) \\ &\quad + 4(31.63 + 35.47 + 40.33 + 46.70)) \\ &= 3087m/s \end{aligned}$$

Solution exercice 5

1.

$$I = \int_0^{\pi} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = 2$$

2. I) La méthode des trapèzes :

a)

$$I_{trap} = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_4) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)))$$

avec $x_1 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \frac{3\pi}{4}$ et $x_4 = \pi$, donc

$$I_{trap} = \frac{\pi}{8}(f(0) + f(\pi) + 2(f(\frac{\pi}{4}) + f(\frac{\pi}{2}) + f(\frac{3\pi}{4}))) = \frac{\pi}{4}(1 + \sqrt{2}) \simeq 1.896.$$

b) On a

$$E = -\frac{h^2}{12}(x_n - x_0)f''(\zeta), \quad \text{avec } 0 \leq \zeta \leq \pi$$

$$|E| = \frac{\pi^3}{192}|\sin(\zeta)| \leq \frac{\pi^3}{192} \simeq 0.16149, \quad \text{avec } 0 \leq \zeta \leq \pi.$$

c)

$$b) E_{relle} = I_{exacte} - I_{trap} \simeq 0, 1038.$$

II) La méthode de Simpson a)

$$I_{Simp} = \frac{\pi}{12}(f(0) + f(\pi) + 2f(\frac{\pi}{2}) + 4(f(\frac{\pi}{4}) + f(\frac{3\pi}{4}))) = \frac{\pi}{6}(1 + 4\sqrt{2}) \simeq 3, 4855207.$$

b) On a

$$E = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\zeta), \quad \text{avec } 0 \leq \zeta \leq \pi$$
$$|E| = \frac{h^5}{90}|\sin(\zeta)| \leq \frac{h^5}{90} \simeq 0,00033205, \quad \text{avec } 0 \leq \zeta \leq \pi.$$

c)

$$b) E_{relle} = I_{exacte} - I_{Simp} \simeq 1,4855207.$$

3. Calculons la valeur du pas h et le nombre de subdivision n de l'intervalle $[0, \pi]$ avec $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$.

Méthode des trapèzes On a

$$E = -\frac{h^2}{12}(x_n - x_0)f''(\zeta), \quad \text{avec } 0 \leq \zeta \leq \pi$$
$$|E| = \frac{\pi}{12}h^2|\sin(\zeta)| \leq \frac{\pi}{12}h^2 \simeq 0,0005, \quad \text{avec } 0 \leq \zeta \leq \pi.$$
$$\Leftrightarrow h^2 \leq \frac{12}{\pi}0,0005$$
$$\Leftrightarrow h \leq 0,044.$$

D'où

$$n > \frac{\pi}{h} \simeq 71,8$$

Donc le nombre de subdivision de l'intervalle $[0, \pi]$ est $n \geq 72$.

Méthode de Simpson On a

$$E = -\frac{\pi}{90}h^4f^{(4)}(\zeta), \quad \text{avec } 0 \leq \zeta \leq \pi$$
$$|E| = \frac{\pi}{90}h^4|\sin(\zeta)| \leq \frac{\pi}{90}h^4 \simeq 0,0005, \quad \text{avec } 0 \leq \zeta \leq \pi.$$
$$\Leftrightarrow h^4 \leq \frac{90}{\pi}0,0005$$
$$\Leftrightarrow h \leq 0,4111408.$$

D'où

$$n > \frac{\pi}{h} \simeq 7,64116$$

Donc le nombre de subdivision de l'intervalle $[0, \pi]$ avec la méthode de Simpson est $n \geq 8$.

Solution exercice 6

1. Si $p \in \mathcal{P}_n$, alors $\forall t, p(t) = \sum_{i=0}^n p(t_i)L_i(t)$, donc

$$I(p) = \int_a^b p(t)dt = \sum_{i=0}^n p(t_i) \int_a^b L_i(t)dt = \sum_{i=0}^n w_i p(t_i) = J(p).$$

2. On a

$$I(p) = J(p), \forall p \in \mathcal{P}_n, I(L_j) = J(L_j), \quad j = 0, 1, \dots, n$$

or

$$I(L_j) = \int_a^b L_j(t) dt, \quad \text{et} \quad J(L_j) = \sum_{i=0}^n w_i L_j(t_i) = w_j.$$

D'où le résultat.

3. On a $I(p) = J(p)$, $\forall p \in \mathcal{P}_n$, alors $I(p_i) = J(p_i)$, pour $i = 0, \dots, n$.

Réciproquement, on suppose que $I(p_i) = J(p_i)$, pour $i = 0, \dots, n$. Soit $p \in \mathcal{P}_n$, alors $p = \sum_{i=0}^n a_i p_i$. Donc

$$I(p) = \sum_{i=0}^n a_i \int_a^b p_i(t) dt = \sum_{i=0}^n a_i I(p_i) = \sum_{i=0}^n a_i J(p_i).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} J(p) &= \sum_{j=0}^n w_j p(t_j) = \sum_{j=0}^n w_j \sum_{i=0}^n a_i p_i(t_j) \\ &= \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^n w_j a_i p_i(t_j) \\ &= \sum_{i=0}^n a_i J(p_i) = I(p). \end{aligned}$$

D'où, le résultat.

Chapitre 4

Résolution d'équations algébriques

Ce chapitre est consacré à résoudre l'équation non linéaire du type :

$$f(x) = 0 \tag{4.1}$$

où f est une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Le problème est de trouver les valeurs de x dans l'intervalle $[a, b]$ satisfaisant l'équation $f(x) = 0$.

En général, les méthodes de résolution de l'équation non linéaire $f(x) = 0$ sont des méthodes itératives. Elles consistent à construire une suite x_n convergente (plus rapidement possible) vers la solution.

4.1 Méthode de Dichotomie (ou bisection)

Le principe de la méthode de Dichotomie repose sur la version suivante du théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 4.1 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si $f(a) \times f(b) \leq 0$ alors $\exists c \in [a, b] : f(c) = 0$.

Pour déterminer la solution de l'équation $f(x) = 0$, avec f une fonction continue sur $[a, b]$, il faut d'abord localiser la racine \bar{x} dans l'intervalle $[a, b]$, où \bar{x} est une racine simple. On procède de la manière suivante :

1. On divise l'intervalle $[a, b]$ en deux parties égales et on pose $x_0 = \frac{a+b}{2}$.

Alors

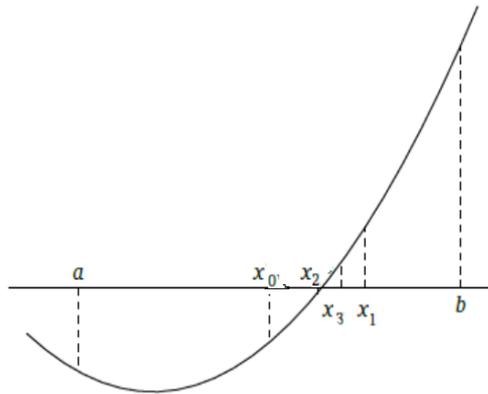
$$\begin{cases} \bar{x} \in [a, x_0], & \text{si } f(a)f(x_0) < 0 \\ \bar{x} \in [x_0, b], & \text{si } f(b)f(x_0) < 0. \end{cases}$$

2. On note le nouveau intervalle contenant \bar{x} par $[a_1, b_1]$:

$$\begin{cases} a_1 = a \text{ et } b_1 = x_0 & \text{si } \bar{x} \in [a, x_0] \\ a_1 = x_0 \text{ et } b_1 = b & \text{si } \bar{x} \in [x_0, b]. \end{cases} \tag{4.2}$$

3. En itérant ce procédé, on obtient une suite de valeurs :

$$x_0 = \frac{a+b}{2}, x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}, \dots, x_n = \frac{a_n+b_n}{2}.$$



Construction des premiers itérés de la méthode de dichotomie.

Cela nous amène à l'algorithme suivant.

Algorithme de dichotomie (ou bisection)

Soit $f : [a_0, b_0] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f(a_0) \times f(b_0) < 0$.

Pour $i = 0, 1, \dots, n$, faire

$$x_i = \frac{a_i + b_i}{2}.$$

Si $f(a_i) \times f(x_i) < 0$ alors $a_{i+1} = a_i$ et $b_{i+1} = x_i$.

Sinon $a_{i+1} = x_i$ et $b_{i+1} = b_i$.

4.1.1 Etude de convergence

Théorème 4.2 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Nous supposons que $f(a) \times f(b) < 0$ et que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution $c \in]a, b[$. Si l'algorithme de dichotomie arrive jusqu'à l'étape n (de sorte que $x_i \neq c$, pour $i = 0, \dots, n$) alors

$$|x_n - c| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}. \tag{4.3}$$

Preuve. On a $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$ et par récurrence $b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}$

D'où $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b - a}{2^{n+1}}$.

En suite, on a x_{n+1} était au milieu de l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, $\forall x \in [a_n, b_n]$.

Alors on trouve

$$|x - x_{n+1}| \leq \frac{b_{n+1} - a_{n+1}}{2} = \frac{b - a}{2^{n+2}}.$$

Et par définition c est la racine se trouve dans $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ par $f(a_{n+1}) \times f(b_{n+1}) < 0$, nous pouvons donc prendre $x = c$.

Ainsi

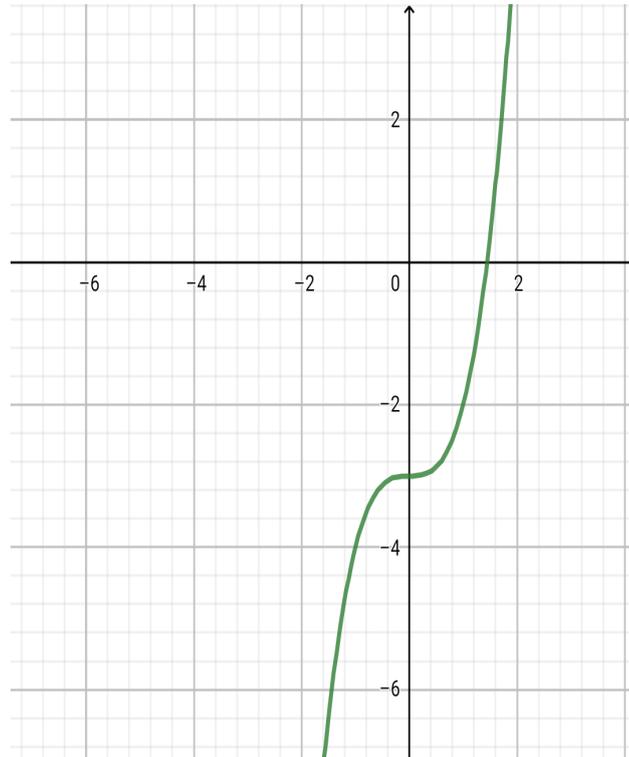
$$|x_{n+1} - c| \leq \frac{b - a}{2^{n+2}}.$$

■

Remarque 4.1 D'après le théorème 4.2 les itérations par la méthode de la dichotomie s'achèvent à la m -ème étape quand $|x_m - \bar{x}| \leq \frac{|b_m - a_m|}{2} = \frac{b-a}{2^{m+1}} < \varepsilon$, où ε est une tolérance fixée et \bar{x} est la racine dans $[a, b]$. Donc pour avoir une erreur $|x_m - \bar{x}| \leq \varepsilon$ il suffit de prendre le plus petit entier positif m qui vérifie

$$m \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} - 1.$$

Exemple 4.1 Soit $f(x) = x^3 - 3$. f est une fonction continue sur \mathbb{R} . L'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ est $\sqrt[3]{3}$. On veut approcher la valeur de $\sqrt[3]{3}$.



On prend l'intervalle $[1, 2]$. Alors on a

$$f(1) = -2 < 0$$

$$f(2) = 5 > 0$$

On note $I_0 = [1, 2]$ et on calcule $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{1+2}{2}\right) = \frac{3}{8} > 0$, avec $x_0 = \frac{3}{2}$

Donc $\sqrt[3]{3}$ est dans l'intervalle $\left[1, \frac{3}{2}\right]$.

$a_1 = a_0 = 1$ et $b_1 = \frac{3}{2}$, et on calcule

$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = f\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{67}{64} < 0, \text{ et } x_1 = \frac{5}{4}.$$

Maintenant $\sqrt[3]{3}$ est dans l'intervalle $I_2 = \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$ qui est plus petit que I_1 .

$$f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) = f\left(\frac{\frac{3}{2}+\frac{5}{4}}{2}\right) = f\left(\frac{11}{8}\right) = -\frac{205}{512} < 0 \text{ et } x_2 = \left[\frac{11}{8}\right.$$

$$\left. \text{Alors } I_3 = \left[\frac{11}{8}, \frac{3}{2}\right].$$

$$f\left(\frac{a_3+b_3}{2}\right) = f\left(\frac{23}{16}\right) = -\frac{121}{4096} < 0 \text{ et } x_3 = \frac{23}{16}.$$

$$\text{Ainsi } I_4 = \left[\frac{23}{16}, \frac{3}{2}\right].$$

Si on prend l'estimation de l'erreur d'arrondis $\varepsilon = 10^{-2}$, alors d'après le théorème de convergence on obtient :

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} - 1 = 5,62$$

d'où $n = 6$.

4.2 Méthode de point fixe

La méthode de point fixe consiste à transformer l'équation non linéaire $f(x) = 0$ en un problème équivalent

$$g(x) = x \tag{4.4}$$

où la fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a la propriété suivante

$$\bar{x} = g(\bar{x}) \text{ si et seulement si } f(\bar{x}) = 0.$$

Définition 4.1 Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si $\bar{x} \in \mathbb{R}$ est tel que $g(\bar{x}) = \bar{x}$, on dit que \bar{x} est un point fixe de g (l'image de \bar{x} par g est lui-même).

La méthode de point fixe consiste à la construction d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \text{ donnée} \\ x_{n+1} = g(x_n), \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4.5}$$

Remarque 4.2 Le choix de x_0 a une influence sur le comportement (convergence) de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En effet, par exemple si on prend $g(x) = x^2$. Alors si on choisit x_0 à gauche de 1, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le point fixe 0. Mais si on choisit x_0 à droite de 1 la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l'infini.

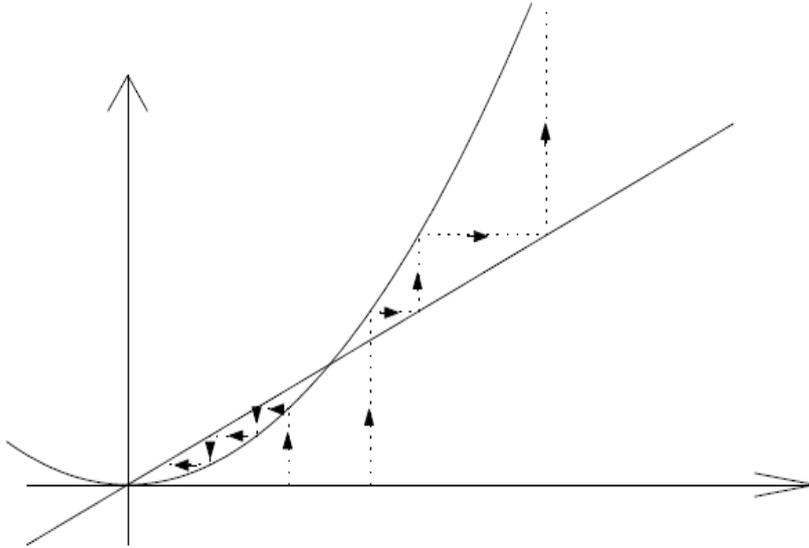


FIGURE 2.4 – Méthode de point fixe pour $g(x) = x^2$

Et si on choisit x_0 exactement 1 on voit que la suite ne converge jamais vers 1 qui est un point fixe instable.

Le théorème suivant nous donne les conditions de convergence de la suite de la méthode de point fixe.

Théorème 4.3 Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On se donne $x_0 \in [a, b]$. Si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. $g(x) \in [a, b]$ pour tout $x \in [a, b]$ (condition de stabilité)
2. Il existe $k \in [0, 1[$ tel que $|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$ pour tout $x, y \in [a, b]$ (condition de contraction stricte) (ou bien $|g'(x)| \leq k < 1, \forall x \in [a, b]$).

Alors

- i) g est continue,
- ii) g a un et un seul point fixe \bar{x} dans $[a, b]$,
- iii) La suite $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers \bar{x} pour tout choix de x_0 dans $[a, b]$.

De plus, si x^* est la solution de l'équation $g(x) = x$ alors

$$|x^* - x_n| \leq \frac{k^n}{1 - k} |x_1 - x_0|, \quad n \geq 1. \quad (4.6)$$

Preuve. Continuité La condition de contraction stricte implique que g est continue puisque, si on prend une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [a, b]$ qui converge vers un élément x de $[a, b]$, alors nous avons $|g(x) - g(y_n)| \leq k|x - y_n|$ et par suite $\lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = g(x)$.

Existence La fonction $h(x) = g(x) - x$ est continue dans $[a, b]$ et, d'après la condition de stabilité, on a $h(a) = g(a) - a \geq 0$ et $h(b) = g(b) - b \leq 0$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que h a au moins un zéro dans $[a, b]$, i.e. g a au moins un point fixe dans $[a, b]$.

Unicité L'unicité du point fixe découle de la condition de contraction stricte. En effet, on suppose qu'on a deux points fixes distincts \bar{x}_1 et \bar{x}_2 , alors

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = |g(\bar{x}_1) - g(\bar{x}_2)| \leq k|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| < |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$$

ce qui est impossible.

Convergence On a

$$0 \leq |x_{n+1} - \bar{x}| = |g(x_n) - g(\bar{x})| \leq k|x_n - \bar{x}|, \quad k < 1.$$

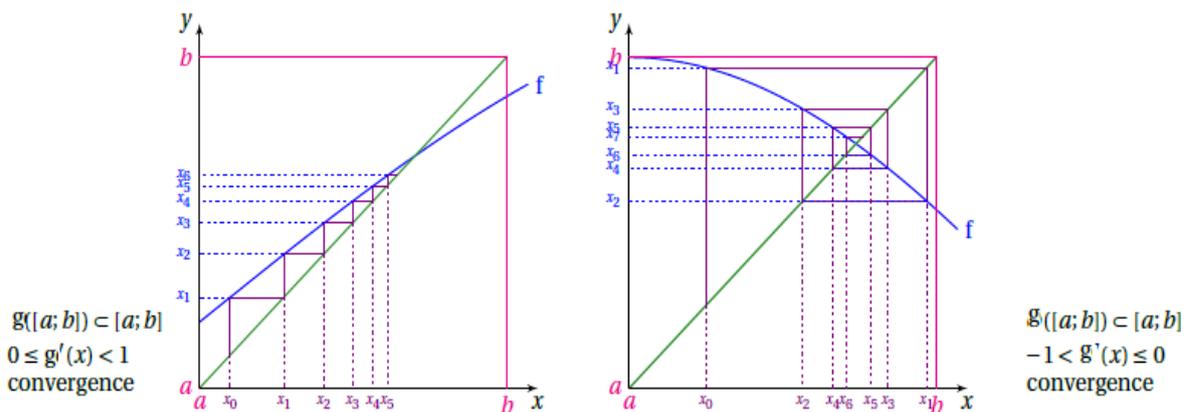
Et par récurrence on obtient

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq k^{n+1}|x_0 - \bar{x}|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puisque $0 \leq k < 1$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \bar{x}| = 0.$$

■



Interprétation géométrique du théorème de point fixe

Exemple 4.2 Soit l'équation $e^x - 4x^2 = 0$. On pose $f(x) = e^x - 4x^2$, alors

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 4x^2$$

ou

$$x = \pm \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$$

Donc on note $g_1(x) = \ln 4x^2$, $g_2(x) = -\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$ et $g_3(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$.

D'autre part, Si on prend $I = [-1, 0]$ alors, on a $f(-1) \times f(0) < 0$.

Maintenant, on vérifie les conditions du théorème de point fixe. On ne peut pas choisir $g_1(x)$ parce qu'elle n'est pas définie sur I et aussi la fonction $g_3(x)$ qui est positive.

Par contre la fonction $g_2([-1, 0]) \subset [-1, 0]$ et $|g_2'(x)| < k$ où $0 \leq k < 1$. En effet,

$$g_2(-1) = -\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2} \text{ et } g_2(0) = -\frac{1}{2}$$

et $g_2'(x) = -\frac{e^{\frac{x}{2}}}{4} < 0$ alors $g_2([-1, 0]) \subset [-1, 0]$.

D'autre part, $|g_2''(x)| = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{8} > 0$.

Donc $|g_2'(x)| \leq \frac{1}{4} < 1$. D'où la méthode de point fixe converge.

On choisit $x_0 = 0$, on a

$$x_1 = g_2(x_0) = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = g_2(x_1) = -\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2} = -0.303265$$

$$x_3 = g_2(x_2) = 0,429652.$$

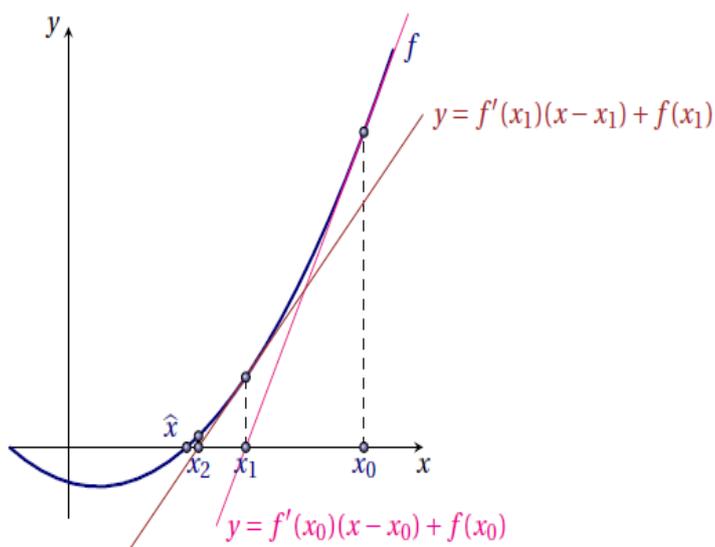
4.3 Méthode de Newton-Raphson

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ tel que $f'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$ et on suppose que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans l'intervalle $[a, b]$. Le principe de la méthode de Newton-Raphson consiste à remplacer le problème non linéaire $f(x) = 0$ par un problème affine $g(x) = 0$, où g est la meilleure approximation affine de f au voisinage de x_0 donné. On identifie la représentation de g à la tangente à la courbe de f au point d'abscisse au voisinage de x_0 . En effet, par la formule de Taylor on a

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \quad (4.7)$$

On suppose que $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, et nous définissons x_1 tel que $g(x_1) = 0$. Notons que x_1 est bien définie lorsque $f'(x_0) \neq 0$ donné par :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$



Nous construisons ainsi par récurrence, sous réserve que $x_n \in [a, b]$, la suite comme suit :

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \text{ donnée} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (4.8)$$

4.3.1 Etude de convergence

Théorème 4.4 (convergence globale de la méthode de Newton -Raphson) Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle $[a, b]$ telle que

i) $f(a) \times f(b) < 0$;

ii) $f'(x)$ et $f''(x)$ sont non nulles et gardent des signes constants dans $[a, b]$.

Alors la suite des itérés de Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

avec $x_0 \in [a, b]$ converge vers l'unique zéro $x^* \in [a, b]$ de f . En partant de l'approximation x_0 dans $[a, b]$ vérifiant $f(x_0) \times f''(x_0) \geq 0$.

Preuve. D'après les hypothèses ii) et ii) et la fonction f est continue sur $[a, b]$ alors en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $x^* \in [a, b]$ tel que $f(x^*) = 0$. Par conséquent, si $f(x_0)f''(x_0) = 0$, on a $x_0 = x^*$. On suppose maintenant que $f(x_0) \times f''(x_0) > 0$. Puisque f'' ne change pas de signe sur l'intervalle $[a, b]$, on doit distinguer deux cas.

Le premier cas, $\forall x \in [a, b]$, $f''(x) > 0$, alors $f(x_0) > 0$. Si de plus, $\forall x \in [a, b]$, $f'(x) > 0$, on a alors, $\forall x \in [a, x^*$, $f(x) < 0$ et, $\forall x \in]x^*, b]$, $f(x) > 0$, d'où $x_0 \in]x^*, b]$. On note

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

On a alors

$$\forall x \in]x^*, b], g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} > 0,$$

d'où la fonction g est strictement croissante sur $]x^*, b]$. On en déduit que :

$$x^* = g(x^*) \leq g(x_0) = x_1,$$

et

$$x_1 = g(x_0) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0$$

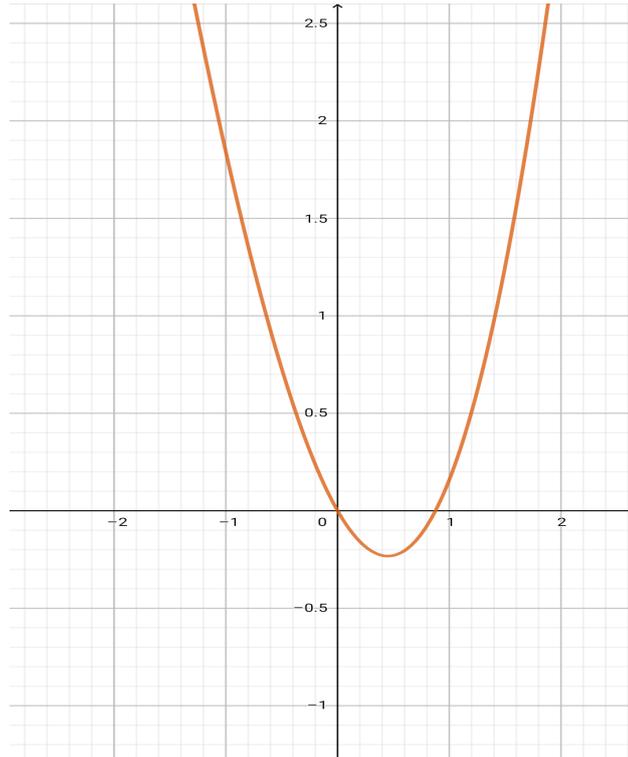
doù $x^* \leq x_1 < x_0$. Par récurrence, on obtient $x^* \leq x_n < x_{n-1}$. Donc la suite de Newton Raphson est strictement décroissante et minorée par x^* . Elle converge vers l'unique point fixe x^* de la fonction g . Si, $\forall x \in [a, b]$, $f'(x) < 0$, un raisonnement identique conduit au fait que la $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Newton-Raphson est strictement croissante et majorée par x^* . Ainsi cette suite est convergente vers x^* . Enfin, si, $\forall x \in [a, b]$, $f''(x) < 0$ et $f(x_0) < 0$, il suffit de reprendre la preuve ci-dessus en remplaçant f par $-f$ pour établir la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. ■

Définition 4.2 Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers \bar{x} . S'il existe un nombre k et une constante $C \neq 0$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x_{n+1} - \bar{x}|}{|x_n - \bar{x}|^k} = C \quad (4.9)$$

on dit que la convergence est d'ordre k et C est la constante d'erreur asymptotique.

Exemple 4.3 Soit $f(x) = x^2 - \sin x$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$ et soit $x_0 = \frac{\pi}{4}$.



On a $f'(x) = 2x - \cos x > 0$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$ et $f''(x) = 2 + \sin x > 0$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$. En utilisant la suite de Newton pour trois itérations, on trouve :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0,52659376$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,26811032$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0,06720375.$$

4.4 Exercices

Exercice 1 : Soit $f(x) = 2x^3 - x - 5$.

1. Tracer le graphe de la fonction f .
2. Montrer que la fonction f s'annule dans l'intervalle $[1, 2]$.
3. En utilisant la méthode de Dichotomie dans l'intervalle $[1, 2]$ avec une précision de $\varepsilon = 10^{-2}$. Calculer les zéros de cette fonction.

Exercice 2 : On veut donner une approximation de la solution de l'équation suivante

$$\ln x + x = 0.$$

Montrer qu'il n'y a qu'une solution $x_0 \in \mathbb{R}^+$ puis appliquer la méthode de Newton-Raphson sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ pour les cinq premières itérations.

Exercice 3 : On veut trouver les zéros de la fonction suivante

$$f(x) = e^{x^2} - 4x^2.$$

1. Etudier graphiquement l'équation $f(x) = 0$. Et en déduire qu'il y a une racine dans l'intervalle $[0, 1]$.
2. Etudier la convergence de la suite de la méthode de point fixe et quel est son ordre de convergence.
3. Etudier la convergence de la suite de la méthode de Newton en précisant l'ordre de convergence.
4. Que peut-on conclure ?

Exercice 4 : Soit $A \geq 0$, on considère la suite suivante :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(A - x_n), \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que si la suite (x_n) converge alors sa limite est soit \sqrt{A} soit $-\sqrt{A}$.
2. On suppose que $A \in]0, 4[$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $|x_0 - \sqrt{A}| \leq \varepsilon$ alors la suite (x_n) converge vers \sqrt{A} .
3. Proposer une méthode plus efficace pour calculer la racine carré de A .

Exercice 5 : On cherche de déterminer le zéro de la fonction f définie par

$$f(x) = 1 - 3e^{-x}$$

1. Montrer que la fonction f admet un unique zéro sur \mathbb{R} noté \bar{x} .
2. Calculer \bar{x} directement à partir de l'équation satisfaite par \bar{x} .
3. L'équation $f(x) = 0$ est équivalente à

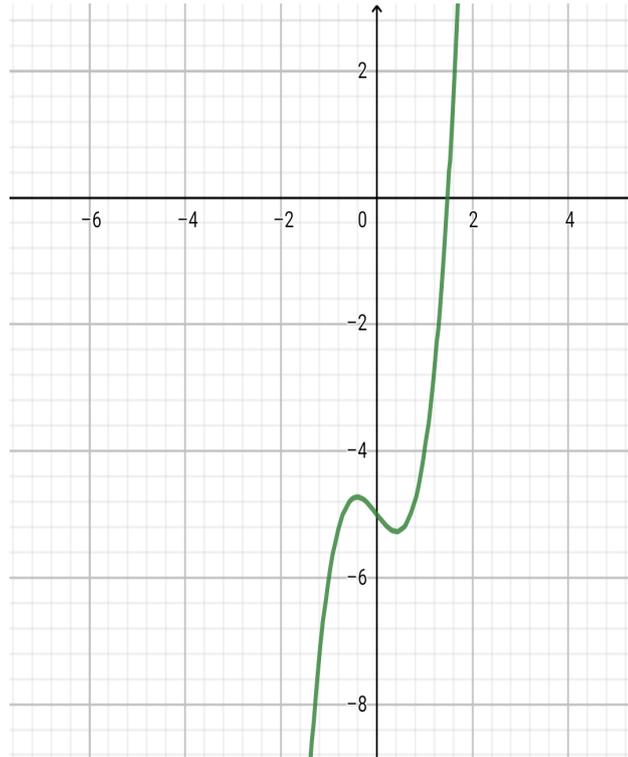
$$\forall \lambda \neq 0, \quad x = x + \lambda f(x).$$

Si on pose $g(x) = x + \lambda f(x)$, on est donc ramené à trouver λ pour que la suite définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ converge.

- (a) On prend x_0 dans $[1, 2]$. Trouver λ pour que la suite converge et justifier le choix de x_0 .
- (b) Que peut-on dire de la vitesse de convergence de la suite ?

4.5 Corrigés des exercices

Solution exercice 1 Soit $f(x) = 2x^3 - x - 5$ une fonction continue et dérivable sur \mathbb{R} . Sur l'intervalle $[1, 2]$ on a $f'(x) = 6x^2 - 1 > 0$ et $f(1) = -4 < 0$, $f(2) = 9 > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique $c \in]1, 2[$ tel que $f(c) = 0$.



On applique la méthode de Dichotomie avec une précision $\varepsilon = 10^{-2}$ sur $[1, 2]$.
On calcule d'abord le nombre d'itération. On sait que

$$n \geq \frac{\ln(\frac{b-a}{\varepsilon})}{\ln 2} - 1$$

avec $a = 1$ et $b = 2$. On obtient $n \simeq 6$.

Pour $I_0 = [1, 2]$, on calcule

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} > 0,$$

d'où

$$I_1 = \left[1, \frac{3}{2}\right] = [a_1, b_1],$$

alors

$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = f\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{75}{32} < 0,$$

d'où

$$I_2 = \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right] = [a_2, b_2],$$

alors

$$f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) = f\left(\frac{11}{8}\right) = -\frac{301}{256} < 0.$$

D'où

$$I_3 = \left[\frac{11}{8}, \frac{3}{2}\right] = [a_3, b_3],$$

alors

$$f\left(\frac{a_3+b_3}{2}\right) = f\left(\frac{23}{16}\right) = -\frac{1017}{2048} < 0.$$

D'où

$$I_4 = \left[\frac{23}{16}, \frac{3}{2}\right] = [a_4, b_4],$$

alors

$$f\left(\frac{a_4+b_4}{2}\right) = f\left(\frac{47}{32}\right) = -\frac{2161}{16384} < 0.$$

D'où

$$I_5 = \left[\frac{47}{32}, \frac{3}{2}\right] = [a_5, b_5],$$

alors

$$\bar{x} = \frac{95}{64} \in \left[\frac{47}{32}, \frac{3}{2}\right].$$

Solution exercice 2 La fonction $f(x) = x + \ln(x)$ est définie, continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(c) = 0$.

Appliquons la méthode de Newton-Raphson sur $I = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$. La suite de Newton-Raphson est donnée par :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n + \ln(x_n)}{1 + \frac{1}{x_n}} = \frac{x_n(1 + \ln(x_n))}{1 + x_n}.$$

Avec $x_0 = \frac{1}{2}$ on obtient

$$x_1 \simeq 0,56438239352,$$

$$x_2 \simeq 0,567138987716,$$

$$x_3 \simeq 0,567143290399,$$

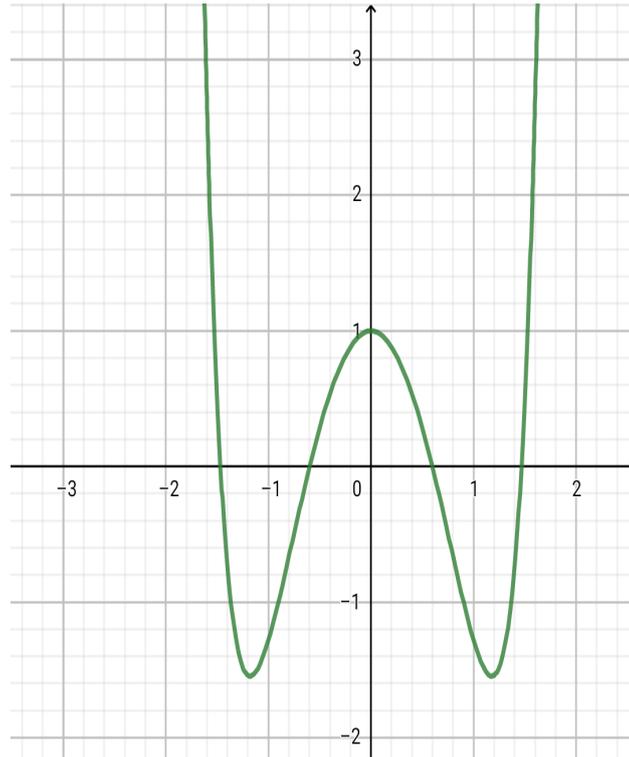
$$x_4 \simeq 0,567143290410,$$

$$x_5 \simeq 0,5671432904098 \simeq 0,567143290410.$$

On remarque que on a 10 décimales exactes avec x_5 .

Solution exercice 3

1. Soit $f = e^{x^2} - 4x^2$ une fonction définie sur \mathbb{R} . On remarque que $f(-x) = f(x)$ (la fonction f est paire), donc on peut extraire notre étude sur l'intervalle $[0, +\infty[$.



D'après le graphe de la fonction f on voit que cette fonction a quatre zéros. D'autre part, on a f est continue et $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = e - 4 < 0$. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\exists c \in]0, 1[, \quad f(c) = 0.$$

2. Etudions la convergence de la suite de point fixe de l'équation $f(x) = 0$:

$$e^{x^2} - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x = \sqrt{e^{x^2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}.$$

On pose $g(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}} \in \mathcal{C}^1([0, 1])$. On a

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}} \leq \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} < 1$$

d'où $g([0, 1]) \subset [0, 1]$.

$$|g'(x)| = \left| \frac{x}{2}e^{\frac{x^2}{2}} \right| = |xg(x)| < |x| < 1$$

ainsi g est contractante.

D'où d'après le théorème de point fixe la suite $x_{n+1} = g(x_n)$, $x_0 \in [0, 1]$ est convergente vers le racine $c \in]0, 1[$. D'autre part,

$$g'(c) = cg(c) = c^2 \neq 0$$

alors la méthode de point fixe converge seulement à l'ordre 1.

3. On définit la suite de Newton de la fonction f comme suit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n^2} - 4x_n^2}{2x_n e^{x_n^2} - 8x_n} = x_n - \frac{e^{x_n^2} - 4x_n^2}{2x_n(e^{x_n^2} - 4)}.$$

Puisque c est une racine simple de f , la méthode de Newton est d'ordre 2.

4. On conclut que la méthode de Newton est plus efficace de la méthode de point fixe.

Solution exercice 4

1. On suppose que x_n converge vers \bar{x} . Passons à la limite on trouve l'équation satisfaite par \bar{x}

$$\bar{x} = \bar{x} + \frac{1}{2}(A - \bar{x}^2) \Leftrightarrow \bar{x}^2 = A.$$

D'où $\bar{x} = \pm\sqrt{A}$.

2. On pose $g(x) = x + \frac{1}{2}(A - x^2)$. Si $A \in]0, 4[$ et le point fixe $\bar{x} = \sqrt{A}$ alors on a $|g'(\bar{x})| = |1 - \sqrt{A}| < 1$, et par continuité de g' , il existe $\varepsilon > 0$ et $k < 1$ tels que

$$|g'(x)| < k, \quad \text{pour tout } x \in [\sqrt{A} - \varepsilon; \sqrt{A} + \varepsilon].$$

On en déduit que pour tous $x, y \in [\sqrt{A} - \varepsilon; \sqrt{A} + \varepsilon]$, on a

$$|g(y) - g(x)| = \left| \int_x^y g'(t) dt \right| \leq |y - x| \max_{t \in [\sqrt{A} - \varepsilon; \sqrt{A} + \varepsilon]} |g'(t)| \leq k|y - x|.$$

Prenons $y = \sqrt{A} = g(\sqrt{A})$, on en conclut que

$$|\sqrt{A} - g(x)| = |g(\sqrt{A}) - g(x)| \leq k|x - \sqrt{A}| < \varepsilon$$

et donc que $g(x) \in [\sqrt{A} - \varepsilon, \sqrt{A} + \varepsilon]$. Donc en vertu du théorème de point fixe on obtient que la suite x_n converge vers \sqrt{A} .

3. On applique maintenant la méthode de Newton-Raphson pour résoudre l'équation $f(x) = x^2 - A = 0$. La suite de Newton-Raphson est

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{x_n^2 + A}{2x_n}.$$

Alors la suite de Newton-Raphson (x_n) converge vers \sqrt{A} qui est d'ordre 2 pour x_0 .

Solution exercice 5

1. La fonction $f = 1 - 3e^{-x}$ est continue et dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 3e^{-x}$. De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 > 0$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaire il existe un unique $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tel que $f(\bar{x}) = 0$.

2. On résout l'équation $1 - 3e^{-\bar{x}} = 0$ on trouve $\bar{x} = \ln 3$.

3. On pose $g(x) = x + \lambda f(x)$, $\lambda \neq 0$.

$$g'(x) = 1 + 3\lambda e^{-x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(a). On a $f(1) = 1 - \frac{3}{e} < 0$ et $f(2) = 1 - \frac{3}{e^2} > 0$ et $f'(x) > 0$ sur $[1, 2]$ alors $\bar{x} \in [1, 2]$ donc on choisit x_0 dans l'intervalle $[1, 2]$.

Pour que la méthode converge il faut que $|g'(x)| < 1$ pour tout $x \in [1, 2]$.

Pour $g'(x) < 1$ il est nécessaire que $\lambda < 0$ et pour que $g'(x) > -1$ il faut que $\lambda > -\frac{2e}{3}$.

Ainsi la méthode de point fixe converge si

$$\lambda \in]-\frac{2e}{3}, 0[.$$

(b) Le choix optimal pour λ (pour la convergence de la suite x_n) est celui pour lequel

$$g'(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow 1 + 3\lambda e^{-\bar{x}} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-e^{\bar{x}}}{3}.$$

Et d'après la formule de Taylor d'ordre 2 on a

$$\exists c_n \in [1, 2] : g(x_n) = g(\bar{x}) + g'(\bar{x})(x_n - \bar{x}) + \frac{g''(c_n)}{2}(x_n - \bar{x})^2.$$

Donc, pour $\lambda = \frac{-e^{\bar{x}}}{3}$, on a $g(\bar{x}) = \bar{x}$ et $g'(\bar{x}) = 0$. On en déduit que

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq \sup_{x \in [1, 2]} |g''(x)| |x_n - \bar{x}|^2.$$

La méthode est donc d'ordre 2. *[amssymb,twoside,12pt]book*

Bibliographie

- [1] *M. Atteia, M. Pradel, Eléments d'analyse numérique, Ceradues-Editions. 1990.*
- [2] *J. Baranger, Introduction à l'analyse numérique, Ed. Hermann 1977.*
- [3] *M. Boumahrat, A. Bourdin, Méthodes numériques appliquées,. Ed. OPU 1983.*
- [4] *J.P. Calvi, Analyse numérique, UPS Université de Toulouse 2011.*
- [5] *Ph. G.Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Dunod, Paris 1998.*
- [6] *F. Curtis., P.O. Gerald Wheatdey, Applied Numerical Analysis, Addison-Wesley Pub. Compagny. 2003.*
- [7] *B. Démodovitch, I. Maron, Eléments de calcul numérique, Ed. Mir Mosco. 1979.*
- [8] *A. Fortin, Analyse numérique pour ingénieurs, Presses internationales polytechnique 1994.*
- [9] *M. Lakrib, Cours d'analyse numérique, Office des publications universitaires OPU 4274, 2016.*
- [10] *P. Lascaux, R. Theodor, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art d'ingénieur, Tomes I et II, Masson, Paris. 1986.*

- [11] *G. Legendre, Introduction à l'analyse numérique et au calcul scientifique, Dauphine université de Paris 2018*
- [12] *G.A. Meurant, G.H. Golub, Résolution numérique des grands systèmes, Ed. Stanford University. 1983.*
- [13] *M. Pierre, A. Henrot, Analyse Numérique, Ecole de MINES de Nancy 2013-2014.*