الجمهوريـــــــــــــــة الجزائريـــــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة

وزارة التعليـــــــــم العــــــــالي و البحــــــث العلــــمي

جامعة وهران للعلوم و التكنولوجيا محمد بوضياف

كلية الرياضيات و الإعلام الآلي

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur Et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département de mathématiques

Notes de Cours et exercices corrigés

d'Analyse numérique I

Présentée par

Dr. Nassima KHALDI

U.S.T.O 2018/2019

Table des matières

Introduction

Ce document notes de cours d'analyse numérique avec exercices corrigés recouvre le programme d'analyse numérique I de la deuxième année universitaire L.M.D.
Le lecteur trouvera une partie cours et à la fin de chaque chapitre une partie exercices corrigés.
Il est destiné principalement aux étudiants de la 2 ème année L.M.D.
L'objectif de l'analyse numérique est de concevoir et d'étudier des méthodes de résolution de certains problèmes mathématiques (en général issus et de la modélisation de problèmes réels), a titre d'exemples : commande optimale, structure (pneus, carrosserie, ...), biologie mathématique : propagation d'épidémie ..., modèle mathématique en médecine : cardiologie, cancer ..., et bien d'autres applications.
En pratique, l'analyse numérique se propose d'étudier les propriétés mathématiques des algorithmes et leur mise en œuvre (programmation).
Ce polycopie se décompose en quatre chapitres :
Le premier chapitre : Notions d'erreurs.
Le deuxième chapitre : Interpolation polynomiale.
Le troisième chapitre : dérivation et intégration numérique.
Le dernier chapitre : résolution d'équations algébriques.

Chapitre 1

Notions d'erreurs

1.1 Introduction

L'analyse numérique se distingue des autres champs plus classiques des mathématiques. En effet, pour un problème donné, il est possible d'utiliser plusieurs techniques de résolution qui résultent en différents algorithmes. Ces algorithmes dépendent de certains paramètres qui influent sur la précision du résultat. De plus, on utilise en cours de calcul des approximations plus ou moins précises. Par exemple, on peut remplacer une dérivée par une différence finie de façon à transformer une équation différentielle en une équation algébrique. Le résultat final et son ordre de précision dépendent des choix que l'on fait. Une partie importante de l'analyse numérique consiste donc à étudier et évaluer les erreurs pour les réduire.

1.2 Erreurs absolue et relative

Les quantités 10, $\sqrt{2}$, e et $\frac{1}{3}$ sont exactes. Mais $\sqrt{2} = 1.414$, $e = 1.71$ et $\frac{1}{3} = 0.333$ sont des quantités approximatives. Puisqu'il y a toujours un ecart entre la valeur exacte et la valeur approchée donc il y a une erreur.

1.2.1 Erreur absolue

Définition 1.1 *Soit x une quantité à calculer et x^* la valeur calculée (la valeur approchée de x). L'erreur absolue de x^* (sur x), est définie par :*

$$E_a(x) = |x - x^*|. \tag{1.1}$$

Exemple 1.1 *On suppose que la valeur exacte est $x = 17,001$ et que les valeurs mesurées sont :*
$x_1^* = 16,01$, $x_2^* = 18,01$ *et* $x_3^* = 17$. *Alors, on a*

$$E_{a_1}(x) = |x - x_1^*| = 0.991$$

$$E_{a_2}(x) = |x - x_2^*| = 1.009$$
$$E_{a_3}(x) = |x - x_3^*| = 0,001.$$

Comme l'erreur absolue $E_{a_3}(x)$ est la plus petite alors $x_3^* = 17$ est la valeur la plus proche de x.
Ainsi la valeur approchée x^* est plus précise lorsque l'erreur absolue de x^* est plus petite.

1.2.2 Erreur relative

Définition 1.2 *Soit x une quantité à calculer et x^* la valeur calculée (la valeur approchée de x). L'erreur relative est définie par :*

$$E_r(x) = \frac{E_a(x)}{|x|}. \tag{1.2}$$

Généralement, on donne l'erreur relative sous la forme de pourcentage tel qu'on multiplie $E_r(x)$ par 100%.

Exemple 1.2 *On reprend l'exemple précédent $x^* = 17$ valeur approchée de x, alors*

$$E_r(x) = \frac{E_a(x)}{|x|} = \frac{0,001}{|17,001|} = \frac{10^{-3}}{17001 \times 10^{-3}} = \frac{1}{17001}.$$

Alors $E_r(x) \simeq 6 \times 10^{-3}\%$.

1.2.3 Majoration des erreurs absolue et relative

En pratique, il est difficile d'évaluer les erreurs absolue et relative, car on ne connaît généralement pas la valeur exacte de x et l'on n'a que x^*. Pour les apprécier on introduit la notion de majorant de l'erreur absolue et de l'erreur relative.

Définition 1.3 *On définit un majorant de l'erreur absolue Δx d'une valeur approchée x^* par :*

$$E_a(x) = |x - x^*| \leq \Delta x \Leftrightarrow x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x$$

tel que Δx est un nombre réel positif.

Définition 1.4 *On définit un majorant de l'erreur relative δx d'une valeur approchée x^* par :*

$$E_r(x) = \frac{E_a(x)}{|x|} \leq \delta x \tag{1.3}$$

tel que δx est un nombre réel positif

Par suite le majorant de l'erreur relative à x^* est défini par

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x^*|}. \tag{1.4}$$

Dans le cas de quantités mesurées expérimentalement dont on ne connaît que la valeur approximative, on dispose souvent d'une borne supérieure pour l'erreur absolue qui dépend de la précision des instruments de mesure utilisés.

Remarque 1.1 *Soit x un nombre tel que $x_1 \leq x \leq x_2$ alors $x^* = \frac{x_1+x_2}{2}$ est une approximation de x avec une majoration de l'erreur absolue $\Delta x = \frac{x_2-x_1}{2}$.*

Exemple 1.3 *Une surface est donné par $x = 60m^2 \pm 2\%$. L'erreur relative à la valeur approchée $x^* = 60m^2$ est $\delta x = 0,02$. Alors l'erreur absolue est :*

$$\Delta x = x^* \delta x = 60 \times 0,02 = 1,2m^2.$$

D'où, la surface exacte est $x \in [x^* - \Delta x, \quad x^* + \Delta x] = [58.8, \quad 61.2]$.

Proposition 1.1 (Addition) *Soient x, y deux valeurs positives, x^* et y^* deux valeurs approchées de x et y respectivement. Alors on a*

1. $\Delta(x+y) = \Delta x + \Delta y$;
2. $\delta(x+y) \leq \max(\delta x, \delta y)$.

Preuve.

1. *On a $x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x$ et $y^* - \Delta y \leq y \leq y^* + \Delta y$. Alors*

$$(x^* + y^*) - (\Delta x + \Delta y) \leq x + y \leq (x^* + y^*) + \Delta x + \Delta y$$

   Ainsi $\Delta x + \Delta y$ est un majorant de l'erreur absolue de $x + y$, donc $\Delta(x+y) = \Delta x + \Delta y$.

2. *On a*

$$\delta(x+y) = \frac{\Delta(x+y)}{|x^*+y^*|} = \frac{\Delta x + \Delta y}{x^*+y^*} = \frac{\Delta x}{x^*}\frac{x^*}{|x^*+y^*|} + \frac{\Delta y}{y^*}\frac{y^*}{|x^*+y^*|}$$

$$= \delta x \times \lambda_1 + \delta y \times \lambda_2 \ \text{ où } \ \lambda_1 = \frac{x^*}{|x^*+y^*|} > 0, \ \ \lambda_2 = \frac{y^*}{|x^*+y^*|} > 0 \ \text{ et } \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

$$\leq \max(\delta x, \delta y)\lambda_1 + \max(\delta x, \delta y)\lambda_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)\max(\delta x, \delta y) = \max(\delta x, \delta y).$$

■

Proposition 1.2 (Soustraction) *Soient x, y deux valeurs positives, x^* et y^* deux valeurs approchées de x et y respectivement. Alors on a*

1. $\Delta(x-y) = \Delta x + \Delta y$;

2. $\delta(x-y) \leq \frac{x^*+y^*}{x^*-y^*} \max(\delta x, \delta y)$.

Preuve.

1. On a $x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x$ *et* $y^* - \Delta y \leq y \leq y^* + \Delta y$. *Alors*

$$(x^* - y^*) - (\Delta x + \Delta y) \leq x - y \leq (x^* - y^*) + \Delta x + \Delta y$$

Ainsi $\Delta x + \Delta y$ *est un majorant de l'erreur absolue de* $x - y$, *et par suite* $\Delta(x-y) = \Delta x + \Delta y$.

2. On a

$$\begin{aligned}
\delta(x-y) &= \frac{\Delta(x-y)}{x^*-y^*} = \frac{\Delta x + \Delta y}{x^* - y^*} \\
&= \frac{\Delta x}{x^*} \frac{x^*}{x^*+y^*} \frac{x^*+y^*}{x^*-y^*} + \frac{\Delta y}{y^*} \frac{y^*}{x^*+y^*} \frac{x^*+y^*}{x^*-y^*} \\
&= [\delta x \times \lambda_1 + \delta y \times \lambda_2] \frac{x^*+y^*}{x^*-y^*} \\
&\leq [\max(\delta x, \delta y)\lambda_1 + \max(\delta x, \delta y)\lambda_2] \frac{x^*+y^*}{x^*-y^*} \\
&\leq (\lambda_1 + \lambda_2) \max(\delta x, \delta y) \frac{x^*+y^*}{x^*-y^*} \\
&\leq \frac{x^*+y^*}{x^*-y^*} \max(\delta x, \delta y)
\end{aligned}$$

avec $\lambda_1 = \frac{x^*}{|x^*+y^*|} > 0$, $\lambda_2 = \frac{y^*}{|x^*+y^*|} > 0$ *et* $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

■

Exemple 1.4 *Soinent* $x^* = 34217$ *et* $y^* = 34213$ *avec* $\delta x = 0,1\%$ *et* $\delta y = 0,01\%$. *On a*

$$\Delta x = \delta x |x^*| = 0,001 \times 34217 = 34,217$$

$$\Delta y = \delta y |y^*| = 0,0001 \times 34213 = 3,4213.$$

D'où

$$\Delta(x-y) = \Delta x + \Delta y = 37,6383 \simeq 38.$$

Alors $x - y = (x-y) \pm \Delta(x-y) = 4 \pm 37,6383$ *Et*

$$\delta(x-y) = \frac{\Delta(x-y)}{x^*-y^*} = 9,409575 \simeq 941\%.$$

Proposition 1.3 (Multiplication) *Soient* x, y *deux valeurs positives,* x^* *et* y^* *deux valeurs approchées de* x *et* y *respectivement. Alors on a*

1. $\Delta(xy) = x^*\Delta y + y^*\Delta x$;
2. $\delta(xy) = \delta x + \delta y$.

Preuve.

1. *On a* $x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x$ *et* $y^* - \Delta y \leq y \leq y^* + \Delta y$. *En supposant que* $x^* - \Delta x > 0$ *et* $y^* - \Delta y > 0$, *donc*
$$(x^* - \Delta y)(y^* - \Delta y) \leq xy \leq (x^* + \Delta x)(y^* + \Delta y)$$
$$\Leftrightarrow x^*y^* - x^*\Delta y - y^*\Delta x + \Delta x\Delta y \leq xy \leq x^*y^* + x^*\Delta y + y^*\Delta x + \Delta x\Delta y$$
Si on néglige l'erreur de second ordre $\Delta x\Delta y$, *on obtient*
$$x^*y^* - x^*\Delta y - y^*\Delta x \leq xy \leq x^*y^* + x^*\Delta y + y^*\Delta x$$
Ainsi $x^*\Delta y + y^*\Delta x$ *est un majorant de l'erreur absolue de* x^*y^*, *donc* $\Delta(xy) = x^*\Delta y + y^*\Delta x$.
2. *Pour l'erreur relative, on a*
$$\delta(xy) = \frac{\Delta(xy)}{x^*y^*} = \frac{x^*\Delta y + y^*\Delta x}{x^*y^*} = \frac{\Delta x}{x^*} + \frac{\Delta y}{y^*} = \delta x + \delta y.$$

■

Proposition 1.4 (Division) *Soient* x, y *deux valeurs positives,* x^* *et* y^* *deux valeurs approchées de* x *et* y *respectivement. Alors on a*

1. $\Delta(\frac{x}{y}) = \frac{x^*\Delta y + y^*\Delta x}{y^{*2}}$;
2. $\delta(\frac{x}{y}) = \delta x + \delta y$.

Preuve. *Voir le corrigé de l'exercice 4.*

1.3 Chiffres significatifs

Définition 1.5 *Un chiffre significatif d'un nombre approché est le seul chiffre qu'on doit garder, c'est à dire tout chiffre dans sa représentation décimale différent du zéro ; et un zéro qui se trouve entre deux chiffres, ou il constitue un chiffre conservé.*

Exemple 1.5 *Une approximation à* 5 *décimales de* 0.02010 *est*
$\underline{0.0}2010$ *les zéros soulignés ne sont pas significatifs car ils ne servent qu'à indiquer les ranges des autres chiffres.*
$0.02\underline{0}10$ *Le zéro souligné étant placé entre les chiffres significatifs* 2 *et* 1, *zéro est lui même un chiffre significatif.*
$0.0201\underline{0}$ *le zéro souligné traduit le fait que le nombre approché a conservé la décimale* 10^{-5}, *c'est un chiffre significatif.*

Définition 1.6 *Un chiffre significatif d'un nombre approché x^* est dit exact (c s e) si l'erreur absolue de x^* vérifie :*

$$\Delta x \leq 0,5 \times 10^m$$

avec m est le rang de ce chiffre significatif.
D'où

- *Si $\Delta x \leq 0,5 \times 10^{-n}$, alors le $n^{\text{ème}}$ chiffre significatif après la virgule est exact*
- *Si : $\Delta x \leq 0,5 \times 10^{n-1}$, alors le $n^{\text{ème}}$ chiffre significatif avant la virgule est exact.*

Propriétés :

1. *Si un chiffre significatif est exact, alors tous les chiffres à sa gauche sont exacts.*
2. *Si un chiffre n'est pas exact, alors tous ceux à sa droite ne le sont pas.*

Exemple 1.6

1. *On approche $x = \pi$ au $x^* = 3,14$. On a*

$$\Delta(x) = 0,001592 \leq 0,5 \times 10^{-2}.$$

Alors, les trois chiffres 3, 1 et 4 sont des chiffres significatif exacts.

2. *Soient $x = 223,864$ et $x^* = 223,887$, alors*

$$\Delta x = 0,023 \leq 0,5 \times 10^{-1}$$

D'où, les quatres chiffres significatif $2, 2, 3, 8$ sont exacts.

Remarque 1.2 *Il y a une relation entre l'erreur relative et les chiffres significatifs, en effet,*

1. *Si un nombre approximatif possède n chiffres significatifs exacts, alors son erreur relative est $< 5 \times 10^{-n}$ (sauf si le nombre est 1 suivi de $(n-1)$ zéros).*
2. *Si l'erreur relative à x^* est $< 0,5 \times 10^{-n}$ alors x^* possède au moins n chiffres significatifs exacts.*

1.4 Arrondissement et représentation des nombres

L'arrondissement d'un nombre à n chiffres significatifs se fait par la régle suivante :

1. *Si le $(n+1)^{\text{ème}}$ chiffre significatif est > 5, on augmente le $n^{\text{ème}}$ chiffre de 1.*

2. *Si le* $(n+1)^{\text{ème}}$ *chiffre significatif est* < 5*, les chiffres retenus restent inchangés.*
3. *Si le* $(n+1)^{\text{ème}}$ *chiffre significatif est 5 alorson a deux cas :*
   - *Si tous les chiffres, situés après le* $(n+1)^{\text{ème}}$ *chiffre significatif, sont des zéros. On applique la régle du chiffre pair, c'est à dire si le* $n^{\text{ème}}$ *est impair on lui ajoute 1, par contre s'il est pair alors on le change pas.*
   - *Parmi les chiffres rejetés, situés après le* $(n+1)^{\text{ème}}$ *chiffre significatif, il existe au moins un qui soit non nul. On ajoute 1 au* $n^{\text{ème}}$ *chiffre.*

Exemple 1.7

1. *Arrondir* $x = 0.254$ *à deux (02) chiffres significatifs. Comme* $4 < 5$ *alors* $x^* \simeq 0.25$.
2. *Arrondir* $x = 0.4368$ *à trois (03) chiffres significatifs. Comme* $8 > 5$ *alors* $x^* \simeq 0.437$
3. *Arrondir* $x = 1.534500$ *à quatre (04) chiffres significatifs. Tous les chiffres rejetés sont des zéros. Le* $4^{\text{ème}}$ *chiffre étant pair, on a alors* $x^* \simeq 1.534$.
4. *Arrondir* $x = 1.5347500$ *à cinq (05) chiffres significatifs. Tous les chiffres rejetés sont des zéros. Le* $5^{\text{ème}}$ *chiffre étant impair, on a alors* $x^* \simeq 1.5348$.
5. *Arrondir* $x = 23.6050420$ *à quatre (04) chiffres significatifs. Parmi les chiffres rejeté s'il existe au moins un qui soit non nul. Donc,* $x^* \simeq 23.61$.

Remarque 1.3 *On remarque d'après la règle d'arrondissement que si un nombre* x *est arrondi à* x^* *alors*

$$\Delta x = |x - x^*| \leq 0,5 \times 10^{m-1}$$

où m *est le rang du dernier chiffre significatif retenu.*

Exemple 1.8

1. *L'arrondissement de* $x = 0.254$ *à deux (02) chiffres significatifs est* $x^* \simeq 0.25$*. Alors*

$$\Delta x = |x - x^*| = 0.004 \leq 0.5 \times 10^{-3}.$$

2. *L'arrondissement* $x = 1.5347500$ *à cinq (05) chiffres significatifs est* $x^* \simeq 1.5348$*. Alors*

$$\Delta x = |x - x^*| = 0.00005 \leq 0.5 \times 10^{-5}.$$

1.5 Exercices

Exercice 1 :

1) Arrondir les chiffres suivants à l'entier le plus proche de :

627.21;   27.61;   124.8;   56.14;   887.13.
2) Donner un arrondi au centième près de :
124.8;   56.14;   78.984;   7.106.
3) Donner un arrondi au centième près du nombre A tel que :
$A = \frac{831-532}{84}$.
Exercice 2 :
Soit $V = \frac{1}{6}\pi d^3$ *avec* $d = 3.7 \pm 0.05$ *cm et* $\pi = 3.14$.
Calculer ΔV *et* δV.

Exercice 3 :
Soit $\mu = \frac{\sin(\frac{A+B}{2})}{\sin(\frac{A}{2})}$ *avec* $A = 1.052 \pm 0.003$ *et* $B = 0.611 \pm 0.006$.
Donner une valeur approchée de la quantité μ.
Exercice 4 :
Soient $x > 0$; $y > 0$ *et* x, y *leurs approximations respectives.*
1) Démontrer que : $\Delta(\frac{x}{y}) = \frac{x^*\Delta y + y^*\Delta x}{y^*}$ *où* Δ *dsigne majoration de l'erreur absolue.*
2) En déduire que $\delta(\frac{x}{y}) = \delta x + \delta y$.
Exercice 5 :
1) Donner le nombre de c.s.e des nombres $0,0006814269$ *et* $6,17924$*, s'ils ont une erreur relative inférieur à* 10^{-4}.
2) Si tous les chiffres signifcatifs de $3724,14$ *sont exacts. Quelle est son erreur relative.*

1.6 Corrigés des exercices

Solution exercice 1
1) L'arrondissement à l'entier le plus proche de :
$627.21 \simeq 627$;
$27.61 \simeq 28$;
$124.8 \simeq 125$;
$56.14 \simeq 56$;
$887.13 \simeq 887$.
2) Donnons l'arrondi au centième (0.01 près) :
$124.8 = 124.8$ *;*
$56.14 = 56.14$;
$78.984 \simeq 78.98$ *;*
$7.106 \simeq 7.11$.
3) Donnons un arrondi au centième près du nombre A tel que :
$A = (831 - 532)/84$.

On a :
$A = (831 - 532)/84 = 3.55952381 \simeq 3.56.$
Solution exercice 2
On a $\Delta d = 0.05$ *et* $\Delta\pi = |3.14159 - 3.14| = 0.0016.$
Ainsi

$$\begin{aligned}
\Delta V &= |\frac{\delta V}{\delta \pi}|\Delta\pi + |\frac{\delta V}{\delta d}|\Delta d \\
&= \frac{1}{6}d^3\Delta\pi + \frac{1}{6}3\pi d^2\Delta d \\
&= \frac{1}{6}(3,7)^3(0.0016) + \frac{1}{2}(3.14)(3.7)^2 0.05 \\
&= 1.08817247 \quad cm^3 \simeq 1.088 \quad cm^3.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a $V = 26.51 \quad cm^3$ *et on sait que*

$$\delta V = \frac{\Delta V}{V}$$

donc $\delta V = 0.041.$
Solution exercice 3
On a

$$\Delta\mu = |\frac{\delta\mu}{\delta A}|\Delta A + |\frac{\delta\mu}{\delta B}|\Delta B$$

On a $\Delta A = 0.003$ *et* $\Delta B = 0.006$. *D'autre part,*

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mu}{\delta A} &= \frac{1}{2}\frac{\sin(\frac{A}{2})\cos(\frac{A+B}{2}) - \cos(\frac{A}{2})\sin(\frac{A+B}{2})}{(\sin(\frac{A}{2}))^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sin(\frac{A}{2} - \frac{A+B}{2})}{(\sin(\frac{A}{2}))^2} \\
&= -\frac{\sin(\frac{B}{2})}{2(\sin(\frac{A}{2}))^2}
\end{aligned}$$

et

$$\frac{\delta\mu}{\delta B} = \frac{\cos(\frac{A+B}{2})}{2\sin(\frac{A}{2})}.$$

D'où

$$\Delta\mu = -\frac{\sin(\frac{B}{2})}{2(\sin(\frac{A}{2}))^2}\Delta A + \frac{\cos(\frac{A+B}{2})}{2\sin(\frac{A}{2})}\Delta B$$

$$\Delta\mu = 5.8156 \times 10^{-3} \simeq 0.006.$$

Par suite,

$$\mu = \mu^* \pm \Delta\mu = 1.472 \pm 0.006.$$

Solution exercice 4

On a $x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x$ *et* $y^* - \Delta y \leq y \leq y^* + \Delta y$*. En supposant que* $x^* - \Delta x > 0$ *et* $y^* - \Delta y > 0$*, donc*

$$\frac{x^* - \Delta x}{y^* + \Delta y} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{x^* + \Delta x}{y^* - \Delta y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^* - \Delta x}{y^* + \Delta y}\frac{y^* - \Delta y}{y^* - \Delta y} \leq \frac{x^* + \Delta x}{y^* - \Delta y}\frac{y^* + \Delta y}{y^* + \Delta y}$$

$$\Rightarrow \frac{x^*y^* - y^*\Delta x - x^*\Delta y + \Delta x\Delta y}{y^{*2} - \Delta y^2} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{x^*y^* + y^*\Delta x + x^*\Delta y + \Delta x\Delta y}{y^{*2} - \Delta y^2}$$

Si on néglige l'erreur du second ordre Δy^2 *et* $\Delta x\Delta y$*, on trouve*

$$\frac{x^*y^* - y^*\Delta x - x^*\Delta y}{y^{*2}} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{x^*y^* + y^*\Delta x + x^*\Delta y}{y^{*2}}$$

$$\frac{-y^*\Delta x - x^*\Delta y}{y^{*2}} \leq \frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} \leq \frac{y^*\Delta x + x^*\Delta y}{y^{*2}}$$

D'où, $\frac{y^*\Delta x + x^*\Delta y}{y^{*2}}$ *est un majorant de l'erreur absolue de* $\frac{x^*}{y^*}$*, donc*

$$\Delta(\frac{x}{y}) = \frac{y^*\Delta x + x^*\Delta y}{y^{*2}}.$$

2) Pour l'erreur relative, on a

$$\delta(\frac{x}{y}) = \frac{\Delta(\frac{x}{y})}{\frac{x^*}{y^*}} = \frac{y^*\Delta x + x^*\Delta y}{y^{*2}}\frac{y^*}{x^*} = \delta x + \delta y.$$

Solution exercice 5

1) Si l'erreur relative à x^* *est* $< 0.5 \times 10^{-n}$ *alors* x^* *possède au moins* n *chiffres significatifs exacts.*

0.0006814269 *possède* 7 *chiffres significatifs et* $\delta(x) \leq 10^{-4} = 0.1 \times 10^{-3} \leq 0.5 \times 10^{-3} \Rightarrow x$ *possède au moins* 3 *c.s.e.*

D'autre part,

$\delta(x) = \frac{\Delta x}{|x^*|} \leq 0.5 \times 10^{-3} \Leftrightarrow \Delta(x) \leq x^* 0.5 \times 10^{-3} = 0.000340713 \times 10^{-3} \leq 0.340713 \times 10^{-6} \leq 0,5\ 10^{-6} \leq 0.5 \times 10^{-5} \leq 0.5 \times 10^{-4} \leq 0.5 \times 10^{-3} \leq 0.5 \times 10^{-2}$ $\leq 0.5 \times 10^{-1}$ *alors* x *possède* 6 *c.s.e.*

De la même façon on trouve 3 *c.s.e pour* 6.17924.

2) Si tous les chiffres significatifs de 3724.14 *sont exacts alors* $\delta(x) \leq 5 \times 10^{-6}$.

Chapitre 2

Interpolation polynomiale

L'interpolation polynomiale est d'une grande importance dans l'analyse numérique : dérivation et intégration, résolution des équations différentielles, ... Ce chapitre ainsi que le chapitre suivant qui porte sur l'intégration numérique sont très étroitement reliés puisqu'ils tendent à répondre à même problème. Ce problème est le suivant : à partir d'une fonction $f(x)$ connue seulement en $(n+1)$ points $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$, peut-on construire une approximation de $f(x)$?
Les x_i sont appelés abscisses ou noeuds d'interpolation tandis que les couples $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$ sont les points de collocation ou points d'interpolation et peuvent provenir de données expérimentales ou d'une table. En d'autres termes, si l'on ne connaît que les points de collocation $(x_i, f(x_i))$ d'une fonction, peut-on obtenir une bonne approximation de $f(x)$ pour une valeur différente des x_i ? Il s'agit d'un problème d'interpolation, dont la solution est relativement simple. Il suffit de construire un polynôme de degré suffisamment élevé dont la courbe passe par les points de collocation. On parle alors du polynôme de collocation ou polynôme d'interpolation. Pour obtenir une approximation des dérivées ou de l'intégrale, il suffit de dériver ou d'intégrer le polynôme de collocation.

2.1 Existence du polynôme d'interpolation

Théorème 2.1 *Soit (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$ avec $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, il existe un polynôme et un seul $P_n(x)$ de degré inferieur ou égal à n tel que :*

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Preuve.
Soit $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ tel que

$$P_n(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_n x_i^n = y_i \quad \textit{pour} \;\; i = 0, 1, \ldots, n.$$

Alors on a $(n+1)$ équation et $n+1$ inconnus comme suit :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1, \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_2^n = y_2, \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

C'est un système linéaire par rapport à a_i; $i = 0, \dots, n$, on peut l'écrire sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}}_{V} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

La matrice de ce système s'appelle la matrice de Vandermonde. Le déterminant de la matrice V est non nul si les x_i sont distincts deux à deux. Donc on obtient l'existence et l'unicité du polynôme d'interpolation.
En effet, On note $\det V = V(x_0, \ x_1, \ \dots, \ x_{n-1}, x_n)$.
On a le déterminant $V(x_0, \ x_1, \ \dots, \ x_{n-1}, x)$ est un polynôme de degré n en x dont les racines sont $x_0, \ x_1, \ \dots, \ x_{n-1}$. Ceci implique que

$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = A \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) \tag{2.2}$$

avec A est une constante à déterminer.

On développe $V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & \dots & x^n \end{pmatrix}$ suivant la dernière ligne et la dernière colonne, on obtient que le coefficient de x^n est $V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$.
Alors d'après (2.2), la constante A coefficient de x^n est égale à $V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$.
Par consequent, on obtenue la formule :

$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})$$

$$= V(x_0, \dots, x_{n-2})(x_{n-1} - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_{n-1} - x_{n-2})(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})$$

$$= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \dots (x_n - x_{n-1}).$$

Ainsi

$$detV = V(x_0, \quad x_1, \quad \dots, \quad x_{n-1}, x_n) = \prod_{j>i}^{n}(x_j - x_i).$$

Remarque 2.1 *On peut vérifier cette formule par récurrence.*

On voit bien que $detV = V(x_0, \quad x_1, \quad \dots, \quad x_{n-1}, x_n) \neq 0$ *si* $x_i \neq x_j$, $i \neq j$. ■

Définition 2.1 *L'unique polynôme de degré* n *passant par les points* $(x_i, f(x_i))$ *pour* $i = 0, \dots, n$, *est appelé l'interpolant de* $f(x)$ *de degré inferieur ou égal à* n *aux abscisses(noeuds)* $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Exemple 2.1 *Trouver l'interpolation linéaire de la fonction* f *tel que :*
$f(0,1) = 0,1003 = y_0$; $f(0,4) = 0,4228 = y_1$.
On cherche le polynôme $P(x) = a_0 + a_1 x$ *utlisant la matrice de Vandermonde. On a*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ 1 & 0,4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0,1003 \\ 0,4228 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{0,3} \begin{pmatrix} 0,4 & -0,1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1003 \\ 0,4228 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0072 \\ 1,075 \end{pmatrix}$$

D'où, $P(x) = -0,0072 + 1,075x$.

Remarque 2.2 *Le polynôme d'interpolation par la matrice de Vandermonde n'est pas facile à calculer. On doit envisager d'autres stratégies pour le calculer directement.*

2.2 Erreur d'interpolation

Lemme 2.1 *Soit* f *une fonction* k *fois dérivable sur l'intervalle* $[a, b]$. *On suppose qu'il existe* $(k + 1)$ *points :* $c_0 < c_1 < \dots < c_k$ *de* $[a, b]$ *tel que* $f(c_i) = 0$. *Alors*

$$\exists \xi \in]c_0, c_k[\quad / \quad f^{(k)}(\xi) = 0.$$

Preuve. *Le lemme se démontre par recurrence sur* k.
Pour $k = 1$, *en utilisant le théorème de Rolle.*
$c_0 < \quad c_1 < \quad \dots \quad < c_k / \ f(c_i) = 0$ *pour* $i = 0, \dots, k$. *Maintenant, supposons que le lemme est vrai pour* $k - 1$, *alors*

$\exists \xi_0 \in [c_0, c_1]$ *tel que* $f^{(k-1)}(\xi_0) = 0,$
$\exists \xi_1 \in [c_1, c_2]$ *tel que* $f^{(k-1)}(\xi_1) = 0,$
$\vdots$
$\exists \xi_{k-1} \in [c_{k-1}, c_k]$ *tel que* $f^{(k-1)}(\xi_{k-1}) = 0.$
Alors d'après le théorème de Rolle $\exists \xi \in [c_0, c_k]$ *tel que* $f^{(k)}(\xi) = 0.$ ■

Théorème 2.2 *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue,* $(n+1)$ *fois dérivable sur* $[a, b]$ *si* $P_n(x)$ *est un polynôme de degré inferieur ou égale à* n *tel que*

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n; \quad x_i \in [a, b],$$

alors

$$\forall x \in [a, b], \exists \xi_x \in [a, b] / E(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \quad (2.3)$$

avec $\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n).$

Preuve. *On remarque que si* $x = x_i$ *alors* $E(x_i) = f(x_i) - p_n(x_i) = 0$, *pour* $i = 0, \ldots, n.$
Maintenant, si $x \neq x_i$, *on pose*

$$\lambda(x) = \frac{f(x) - P_n(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$$

et

$$\Phi(t) = f(t) - P_n(t) - \lambda(x) \prod_{i=0}^{n} (t - x_i). \quad (2.4)$$

$\Phi(t)$ *est une fonction de classe* C^{n+1} *et s'annule en* $n+2$ *points* $x_0, x_1, \ldots, x_n, x.$
D'où d'aprés le lemme 2.1

$$\exists \xi \in [a, b] / \quad \Phi^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

D'autre part, le polynôme $\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$ *est de degré* $n + 1$ *avec le coefficient de* t^{n+1} *égale* $= 1$ *donc sa dérivé* $n + 1$ *fois égale à* $(n + 1)!$. *Donc*

$$\Phi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \lambda(x)(n + 1)!.$$

Alors, $\Phi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \lambda(x)(n + 1)! = 0 \Rightarrow \lambda(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$

D'où le résultat. ■

Corollaire 2.1

$$\forall x \in [a, b] : \quad |f(x) - P_n(x)| \leq |\frac{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n + 1)!}| \sup_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Ou encore

$$\forall x \in [a,b] : \quad |f(x) - P_n(x)| \leq |\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}| \sup_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Preuve. *On a f est de clase C^{n+1} alors $f^{(n+1)}$ continue sur $[a,b]$ donc est aussi pour $|f^{(n+1)}|$ donc $|f^{(n+1)}|$ est bornée. Ainsi le résultat.*

■

2.3 Interpolation de Lagrange

L'interpolation de Lagrange est une façon simple de construire un polynôme de collation, sans passer par la résolution du système linéaire (2.1).

Définition 2.2 *On appelle polynôme de Lagrange associés aux $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ deux à deux distincts les $(n+1)$ polynômes $L_k(x)$ définie par :*

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}. \tag{2.5}$$

Proposition 2.1 *Les polynômes de Lagrange $L_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ possèdent les propriétés suivante :*

1. *Pour tout $i \geq 0$; L_i est un polynôme de degré n ;*
2. $$L_k(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & si \;\; i \neq k; \\ 1, & sinon. \end{cases} \tag{2.6}$$
3. *Les polynômes de Lagrange associés à $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ constituent une base de P_n, où P_n est un ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.*

Preuve. *1) La première proposition est évidente.*
2) On a $L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$, alors
pour $i = k$, on obtient

$$L_k(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{x_k - x_j}{x_k - x_j} = 1$$

pour $i \neq k$

$$L_k(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x_i - x_j}{x_k - x_j} = 0.$$

3) On a $\{L_0, L_1 \ldots, L_n\}$ est constitué de $(n+1)$ polynômes et $dim P_n = n+1$. Donc pour démontrer que $\{L_0, L_1 \ldots, L_n\}$ est une base de P_n il suffit de montrer que $\{L_0, L_1 \ldots, L_n\}$ est une famille libre.
Supposons que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x) = 0$. Alors, d'après (2.6) on a :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x_0) = \lambda_0 L_0(x_0) + \lambda_1 L_1(x_0) + \cdots + \lambda_n L_n(x_0) = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0.$$

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x_1) = \lambda_0 L_0(x_1) + \lambda_1 L_1(x_1) + \cdots + \lambda_n L_n(x_1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.$$

Et par suite

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x_n) = \lambda_0 L_0(x_n) + \lambda_1 L_1(x_n) + \cdots + \lambda_n L_n(x_n) = 0 \Rightarrow \lambda_n = 0.$$

D'où, $\forall k = 0, \ldots, n$;

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x_k) = \lambda_0 L_0(x_k) + \lambda_1 L_1(x_k) + \cdots + \lambda_n L_n(x_k) = 0 \Rightarrow \lambda_k = 0.$$

Par consequent $\{L_0, L_1 \ldots, L_n\}$ est une base de P_n. ■
D'après cette proposition on en déduit le théorème suivant :

Théorème 2.3 *Soit $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $(n+1)$ points distincts et une fonction f dont les valeurs en ces points $(f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n))$. Alors il existe un seul polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que*

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Ce polynôme est donné par :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k). \tag{2.7}$$

Preuve. *D'après la proposition précédente on a*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k).$$

Ainsi

$$P_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x_i) f(x_k) = f(x_i)$$

Comme le polynôme d'interpolation est unique alors on a bien que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k).$$

■

Exemple 2.2 Pour $n = 1$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Donc

$$P_1(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

C'est l'équation de la droite qui passe par les points $(x_0, f(x_0))$ *et* $(x_1, f(x_1))$.

Pour $n = 2$ *on a :* x_0, x_1 *et* x_2

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Ainsi

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1)\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2)\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

C'est l'équation de parabole qui passe par les points $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ *et* $(x_2, f(x_2))$.

Remarque 2.3

- *En pratique, on utilise l'interpolation polynômiale avec des polynômes de degré n assez grand ou l'interpolation polynômiale par morceaux. Ainsi dans l'exemple précédent, il faut augmenter le nombre de points d'interpolations.*
- *Si les valeurs $f(x_i) = y_i$ sont des valeurs expérimentales. L'interpolation polynomiale est une technique peu appropriée pour de telles situations. Les polynômes de degré élevé sont sensibles à la perturbation des données.*
- *La méthode de Lagrange s'adapte mal au changement du nombre de points (x_i, y_i). On ne peut utiliser les coefficients de Lagrange si on passe de n à $(n + 1)$ points.*

2.4 Interpolation de Newton

On suppose qu'on a $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$. *Soit* $P_n(x)$ *le polynôme d'interpolation de la fonction de degré* n *tel que* $P_n(x_i) = f(x_i)$.

Définition 2.3 *La forme de Newton du polynôme d'interpolation est :*

$$P_n(x) = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\dots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}).$$

On remarque que les polynômes $\{N_0(x), \dots, N_n(x)\}$ *forment une base tels que :*
$N_0(x) = 1$
$N_1(x) = x - x_0$
$N_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$
$\vdots$
$N_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots \quad (x - x_{n-1})$.

Définition 2.4 *Soit* f *une fonction dont on connaît les valeurs* $f(x_0), \quad f(x_1), \dots, f(x_n)$.
On définit les différences divisées de f *aux points* $x_0, x_1, \dots, x_n$ *par les relations de récurrences suivantes :*

$$\begin{cases} f[x_i] = f(x_i), \\ f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} \quad \textit{premières différences divisées de f}, \\ f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_i,x_{i+1}]-f[x_{i+1},x_{i+2}]}{x_i-x_{i+2}} \quad \textit{deuxième différences divisées de f}, \\ \vdots \\ f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+p}] = \frac{f[x_i,x_{i+1},\dots,xi+p-1]-f[x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{i+p}]}{x_i-x_{i+p}} \quad p^{\text{ème}}\textit{différences divisées de f} \end{cases}$$

D'après cette définition on a $P_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$,
$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f[x_0, x_1]$
$\vdots$
$a_n = f[x_0, \dots, x_n]$
On a le théorème suivant :

Théorème 2.4 *Le polynôme d'interpolation de Newton passant par* $(x_i, f(x_i))_{i=0,\dots,n}$ *peut s'écrire :*

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots +$$

$$+f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

Ce polynôme d'interpolation est appelé ***forme de Newton du polynôme d'interpolation par les différences divisées****.*

Pour démontrer ce théorème on utilise le lemme suivant.

Lemme 2.2 *Si $P_n(x)$ est un polynôme de degré n, sa différence divisée d'ordre $(n+1)$ est identiquement nulle, c'est à dire $f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = 0$ pour tout système de $(n+1)$ nombres distincts $x_0, x_1, \ldots, x_n$.*

Preuve. *du lemme 2.2 Soit $P_n(x)$ un polynôme de degré n et $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ sa divérence divisée, on a*

$$f[x_0, x] = \frac{P_n(x) - P_n(x_0)}{x - x_0} \quad \textit{est un polynôme de degré} \quad n-1$$

$$f[x_0, x_1, x] = \frac{f[x_1, x] - f[x_0, x_1]}{x - x_0} \quad \textit{est un polynôme de degré} \quad n-2$$

Par récurrence, on aura

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x] = \textit{constante, est un polynôme de degré} \quad 0$$

Ainsi $f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = 0$ ■

Preuve. *du théorème 2.4*

En appliquant les formules de différences divisées au polynôme $P_n(x)$, on trouve

$$f[x, x_0] = \frac{P_n(x) - P_n(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow P_n(x) = P_n(x_0) + f[x, x_0](x - x_0)$$

et

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1} \Rightarrow f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1).$$

D'où

$$P_n(x) = P_n(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n]$$
$$(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) + f[x, x_0, \ldots, x_n]$$
$$(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

D'après le lemme 2.2, on a $f[x, x_0, \ldots, x_n] = 0$. D'où

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots +$$
$$+ f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}).$$

■

Exemple 2.3 *Calculons le polynôme d'interpolation de la fonction qui est définie comme suit*

x	*0*	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x)$	*0*	*1*	*0*

On construit le tableau des différences divisées de f :

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	0		
$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{2}{\pi}$	$-\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}$
π	0	$-\frac{\pi}{2}$	

On a alors

$$\begin{aligned}P_2(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= \frac{2}{\pi}x - [\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}]x(x - \frac{\pi}{2}) \\ &= -\frac{\pi^2 + 8}{2\pi^2}x^2 - \frac{16 + \pi^2}{4\pi}x.\end{aligned}$$

Remarque 2.4 *La forme de Newton par les différences divisées de la fonction f est la forme la plus utilisée pour calculer le polynôme d'interpolation, parce qu'elle nécessite le moins de calculs pour obtenir numériquement ses coefficients.*

2.4.1 Relation entre différence divisées et les dérivées

Théorème 2.5 *Soit f une fonction de classe $C^n([a, b])$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des nombres distincts dans $[a, b]$, alors*

$$\exists \xi \in [a, b] \quad \text{tel que} \quad f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}. \tag{2.8}$$

Preuve. *Soit $g(x) = f(x) - P_n(x)$. Puisque $f(x_i) = P_n(x_i)$ $i = 0, \ldots, n$, la fonction g possède $(n+1)$ zéro (au moins). D'après théorème de Rolle généralisé alors*

$$\exists \xi \in [a, b] \quad / g^{(n)}(\xi) = 0$$

$$g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - n! f[x_0, \ldots, x_n] \Rightarrow f^{(n)}(\xi) = n! f[x_0, \ldots, x_n].$$

D'où le résultat.

■

2.4.2 Erreur d'interpolation de Newtom

Soit $\widetilde{x} \in [a, b]$, $\widetilde{x} \neq x$, $i = 0, \ldots, n$.
Soit $P_{n+1}(x)$ le polynôme d'interpolation associé aux points $(x_0, f(x_0), \ldots, (x_n, f(x_n), (\widetilde{x}, f(\widetilde{x}))$.

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, \widetilde{x}](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$$

Si $\widetilde{x} = x$

$$f(\widetilde{x}) = P_n(\widetilde{x}) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, \widetilde{x}](\widetilde{x} - x_0)(\widetilde{x} - x_1)\dots(\widetilde{x} - x_n)$$

$$\Rightarrow f(\widetilde{x}) - P_n(\widetilde{x}) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, \widetilde{x}](\widetilde{x} - x_0)(\widetilde{x} - x_1)\dots(\widetilde{x} - x_n)$$

D'après le théorème 2.5

$$\exists \xi \in [a, b] \quad \textit{tel que} \quad f[x_0, x_1, \dots, x_n, \widetilde{x}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Alors

$$f(\widetilde{x}) - P_n(\widetilde{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (\widetilde{x} - x_i). \tag{2.9}$$

Ainsi

$$\forall x \in [a, b] : E(X) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

2.4.3 Interpolation de Newton dans le cas équidistant

Il arrive souvent que la fonction à interpoler soit donnée en des points équidistants x_i *avec le pas* h *qui est appelé le pas d'interpolation où* $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \dots, n$.

Différences finies progressives

Définition 2.5 *Soient* $y_0, y_1, \dots, y_n$ *des nombres réels. On définit la différence finie progressive d'ordre 1 par :*

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i; \quad \textit{pour} \quad i = 0, \dots, n-1. \tag{2.10}$$

La différence finie progressive d'ordre 2 :

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i; \quad \textit{pour} \quad i = 0, \dots, n-2. \tag{2.11}$$

Et en générale, la différence finie progressive d'ordre k *est :*

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i; \quad \textit{pour} \quad i = 0, \dots, n-k. \tag{2.12}$$

Convention $\Delta^0 y_i = y_i$, *pour* $i = 0, \dots, n$.

Remarque 2.5 *On peut définir les différences finies progressives qui vont jusqu'à l'ordre* n *seulement pour* $(n+1)$ *points.*

Théorème 2.6 (Relation entre différences finies progressives et différences divisées) *Soit f une fonction dont on connait les valeurs $f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$ aux points $x_i, \quad i = 0, \ldots, n$ tels que $x_i = x_{i-1} + h$, alors*

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k f(x_i)}{k! h^k}, \quad pour \;\; 0 \leq i \leq i + k \leq n.$$

Preuve. *On le démontre par recurrence.*
Pour $k = 1$, on a

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta f(x_i)}{h}$$

donc la relation est vraie pour $k = 1$. Maintenant, supposons que la relation est vraie à l'ordre k.

$$\begin{aligned} f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k+1}] &= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+k+1}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]}{x_{i+k+1} - x_i} \\ &= \frac{\Delta^k f(x_{i+1}) - \Delta^k f(x_i)}{(k+1)! h^{k+1}} \\ &= \frac{\Delta^{k+1} f(x_i)}{(k+1)! h^{k+1}}. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.7 (forme de Newton par les différences finies progressives) *Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ points équidistants. Le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points $x_i, \quad i = 0, \ldots, n$ peut s'écrire :*

$$\begin{aligned} P_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1! h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2! h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n! h^n}(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

On peut s'implifier cette formule en écrivant :

$$x = x_0 + sh, \quad s \in [0, n] \Rightarrow \frac{x - x_0}{h} = s$$

alors

$$f[x_0, \ldots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1}) = \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!} \frac{sh}{h} \frac{(s-1)h}{k} \ldots \frac{s - k + 1}{h}$$

$$= \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!} s(s-1) \ldots (s - k + 1).$$

Donc

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{s}{1!}\Delta f(x_0) + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \dots$$
$$+\frac{s(s-1)\dots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f(x_0).$$

En utilisant la notion

$$C_k^s = \frac{s(s-1)\dots(s-k+1)}{k!}.$$

On obtient

$$P_n(x) = f(x_0) + C_1^s\Delta f(x_0) + C_2^s\Delta^2 f(x_0) + \dots + C_n^s\Delta^n f(x_0).$$

Différences finies regressives

Définition 2.6 *Soient* $y_0, y_1, \dots, y_n$ *des nombres réels. On définit la différence finie regressive d'ordre 1 par :*

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}; \quad pou \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.14}$$

La différence finie regressive d'ordre 2 :

$$\nabla^2 y_i = \nabla y_i - \nabla y_{i-1}; \quad pou \quad i = 2, \dots, n. \tag{2.15}$$

Et en générale, la différence finie regressive d'ordre k est :

$$\nabla^k y_i = \nabla^{k-1} y_i - \nabla^{k-1} y_{i-1}; \quad pour \quad i = k, k+1, \dots, n. \tag{2.16}$$

Convention $\nabla^0 y_i = y_i, \quad pour \quad i = 0, \dots, n.$

Dans ce cas le polynôme d'interpolation de Newton est donné par

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{\nabla f(x_0)}{1!h}(x-x_0) + \frac{\nabla^2 f(x_0)}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \dots$$
$$+\frac{\nabla^n f(x_0)}{n!h^n}(x-x_0)\dots(x-x_{n-1}).$$

Estimation de l'erreur

L'erreur est donnée par

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)|$$

avec $M_{n+1} = \sup_{x\in[x_0,x_n]} f^{(n+1)}(x)$. *Ou bien*

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|h^{n+1} \quad s(s-1)\dots(s-n)| \tag{2.17}$$

avec $s = \frac{x-x_0}{h}$.

2.5 Exercices

Exercice 1 :

On souhaite concevoir un virage d'une voie de chemin de fer entre les points $(0,0)$ *et* $(1,1)$*. Le virage est décrit par une courbe de la forme* $y = f(x)$ *qui satisfait :*

$$f(0) = 0 \quad et \quad f(1) = 1.$$

De plus, pour assurer une transition en douceur, la pente de la courbe doit satisfaire :

$$f'(0) = 0 \quad et \quad f'(1) = 0,3.$$

On représente la courbe à l'aide d'un polynôme dans l'intervalle $[0,1]$*.*

1. Quel est le degré minimal que ce polynôme devra avoir pour remplir toutes les conditions ?

2. Calculer ce polynôme.

Exercice 2 :

1. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange satisfaisant au tableau ci-dessous

x	*0*	*2*	*3*	*5*
f(x)	*-1*	*2*	*9*	*87*

2. Donner l'expression analytique de l'erreur.

3. Obtenir une approximation de $f(1.5)$*.*

Exercice 3 :

On interpole $f(x) = \ln(x)$ *par un polynôme aux nœuds* $x_0 = 1$*,* $x_1 = 2$*,* $x_2 = 3$*,* $x_3 = 4$ *et* $x_4 = 5$*.*

1. Trouver une expression algébrique de ce polynôme en utilisant la méthode de Newton.

2. Estimer la valeur de $f(6,32)$ *avec le polynôme trouvé en (1.) et calculer l'erreur absolue. Comparer cette valeur avec l'approximation fournie par la formule* $E_n(x) \simeq f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$ *en prenant comme nœud supplémentaire* $x = 5,5$*.*

3. Combien de nœuds à intervalle régulier de $0,5$ *faudrait-il ajouter, en partant de* $x_5 = 5,5$*, afin que l'erreur absolue de l'estimé de* $f(6,32)$ *obtenu en (2.) diminue d'un facteur* 100*.*

4. Sur l'intervalle $[3,4]$*, le graphe du polynôme trouvé en (1.) est-il au dessus de celui de* $f(x)$*, en dessous, ou se croisent-ils ?*

Exercice 4 :

Soit L_n *le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction*

$$f(x) = \frac{1}{x - \alpha}$$

aux $n+1$ points distincts $x_0, \ldots, x_n$ de l'intervalle $[-1, 1]$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
1. Calculer les dérivées successives de la fonction f.
2. Montrer que si $\alpha > 3$, et si les $n+1$ points $x_0, \ldots, x_n$ sont equidistants, nous avons alors

$$\lim_{n \to +\infty} \|f(x) - L_n(x)\|_\infty = 0.$$

3. Dans la pratique nous n'agissons pas du tout comme ce qui précède. Nous préférons utiliser des polynômes de degré peu élevé sur chaque petit intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Écrire l'approximation de Lagrange de degré 1, L_n de f sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, pour $i = 0, \ldots, n$.

2.6 Corrigés des exercices

Solution exercice 1

1. On a 4 conditions. On peut donc interpoler y avec un polynôme de degré 3.
2. On a $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ et $p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$. Alors on obtient :

$$p(0) = a_0 = 0$$

$$p'(0) = a_1 = 0$$

$$p(1) = a_2 + a_3 - 1 \Rightarrow a_2 = 1 - a_3$$

$$p'(1) = 2a_2 + 3a_3 = 2(1 - a_3) + 3a_3 = 0,3 \Rightarrow a_3 = -1,7.$$

D'où

$$p(x) = -1,7x^3 + 2,7x^2.$$

Solution exercice 2

1. Le polynôme de Lagrange de degré 3 s'écrit :

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} L_i(x) f(x_i)$$

avec

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \\ &= \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)} \\ &= -\frac{1}{30}(x-2)(x-3)(x-5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ &= \frac{x(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)} \\ &= \frac{1}{6}x(x-3)(x-5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\ &= \frac{x(x-2)(x-5)}{(3-0)(3-2)(3-5)} \\ &= -\frac{1}{6}x(x-2)(x-5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\ &= \frac{x(x-2)(x-3)}{(5-0)(5-2)(5-3)} \\ &= \frac{1}{30}x(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

D'où le polynôme de Lagrange est

$$\begin{aligned} P_3(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3) \\ &= \frac{53}{30}x^3 - 7x^2 + \frac{253}{30}x - 1. \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} E = |f(x) - P_3(x)| &= \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{(4)!}\prod_{i=0}^{4}|x - x_i| \\ &= \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{(4)!}|x(x-2)(x-3)(x-5)|. \end{aligned}$$

avec $\xi_x \in [a, b]$.

3. D'après le polynôme de Lagrange obtenue au question 1 on en déduit :

$$f(1.5) \simeq P_3(1.5) = \frac{149}{80}.$$

Solution exercice 3

On interpole $f(x) = \ln x$ *par un polynôme, aux nœuds* $1, 2, 3, 4, 5$.

1. Il y a 5 *nœuds, donc le degré du polynôme est* 4. *Le polynôme de Newton est donné par :*

$$p_4(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots +$$

$$+f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0) \dots (x - x_3).$$

On construit donc la table des différences divisées comme suit :

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3},$
1	*0*				
		0,693147			
2	*0,693147*		*-0,143841*		
		0,405465		*0,028316*	
3	*1,098612*		*-0,058891*		*-0,004860*
		0,287682		*0,008874*	
4	*1,386294*		*-0,032269*		
		0,223143			
5	*1,609437*				

Ainsi

$$p_4(x) = 0,693147(x-1)-0,143841(x-1)(x-2)+0,028316(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$-0,004860(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$$

$$p_4(x) = -1,267382 + 1,679182x - 0,483861x^2$$

$$+0,076922x^3 - 0,004860x^4.$$

2. Pour l'estimation, nous calculons $p_4(6,32)$. *On obtient alors*

$$p_4(6,32) = 1,681902.$$

Or, $f(6,32) = \ln(6,32) = 1,843719$. *Alors L'erreur absolue est*

$$E = |f(1,681) - p_4(1,681)| = |1,681902 - 1,843719| \simeq 0,161817.$$

Maintenant, si on ajoute l'abscisse $x = 5,5$ *et que l'on complète la table de différences finies, on peut estimer l'erreur commise par :*

$$E_4(x) \simeq f[x_0, \dots, x_5](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = p_5(x) - p_4(x)$$

$$\simeq (0,000785)(6,32 - 1)(6,32 - 2)(6,32 - 3)(6,32 - 4)(6,32 - 5) \simeq 0,18356$$

3. On veut maintenant diminuer cette erreur d'un facteur 100 *et donc obtenir une erreur absolue de* 0,001618. *Le polynôme de Newton de degré* 5 *obtenu en ajoutant le nœud* $x_5 = 5,5$ *est :*

$$p_5(x) = p_4(x) + f[x_0, \dots, x_5](x - 1)(x - 2) \dots (x - 5)$$

$$= p_4(x) + 0,78558 \times 10^{-3}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

de sorte que

$$p_5(6,32) = 1,681902 + 0,183563 = 1,865465.$$

L'erreur absolue est alors

$$E = |f(6,32) - p_5(6,32)| = |\ln(6,32) - 1,865465| = 0,021746$$

et il faut encore ajouter un nœud ($x_6 = 6,0$) pour obtenir

$$p_6(x) = p_5(x) + f[x_0, \ldots, x_6](x-1)(x-2)\ldots(x-5)(x-5,5)$$

$$= p_5(x) - 0,11905 \times 10^{-3}(x-1)(x-2)\ldots(x-5,5)$$

On a alors $p_6(6,32) = 1,865465 - 0,2281 = 1,842654$ *et l'erreur absolue est donnée par*

$$E = |1,842654 - ln(6,32)| = 0,001065$$

ce qui est mieux que la précision requise.
4. On sait que l'erreur exacte peut s'écrire

$$E = \frac{1}{120} f^{(5)}(\xi_x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5), \quad \xi \in [1,5]$$

et nous sommes intéressés au signe de l'erreur. Or la fonction $f^{(5)}(t) = \frac{24}{t^5}$ *et donc le signe de l'erreur ne dépend que de celui de* $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$. *Si* $x \in [3,4]$, *alors trois des facteurs sont positifs et deux sont négatifs. Par conséquent, l'erreur est positive et le graphe de* $\ln(x)$ *est au dessus de celui de* $p_4(x)$.

Solution exercice 4

1. Nous calculons les dérivées successives de la fonction f

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-\alpha)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{(x-\alpha)^3}$$

et plus généralement

$$f^{(n+1)} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{(x-\alpha)^{n+2}}.$$

2. Nous appliquons le résultat du cours, il existe un $\xi \in [-1,1]$ *tel que*

$$|f(x) - L_n(x)| = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|.$$

Ainsi, si $\alpha > 3$ nous avons pour $\xi \in [-1, 1]$

$$2 < |\xi - \alpha| = \alpha - \xi < 4$$

et

$$\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+)!} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{|\xi - \alpha|^{n+1}}$$

et donc

$$|f(x) - L_n(x)| = \frac{1}{2}\prod_{i=0}^{n} |\frac{x - x_i}{\xi - \alpha}|$$

or pour tout $x \in [-1, 1]$ et $i = 0, \ldots, n$ nous avons $|x - x_i| \leq 2$ et donc

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{1}{2}\prod_{i=0}^{n} |\frac{x - x_i}{\xi - \alpha}| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\alpha - \xi}\right)^{n+1}$$

Donc puisque $\frac{1}{2} < \frac{2}{\alpha - \xi} < 1$,

$$\lim_{n \to +\infty} \|f(x) - L_n(x)\|_{+\infty} \leq \frac{1}{2}\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{2}{\alpha - \xi}\right)^{n+1} = 0.$$

3. Nous considérons que $\alpha \notin [-1, 1]$, ainsi la fonction f est bien définie sur $[-1, 1]$. Sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ nous avons

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{1}{x_i - \alpha} + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}(\frac{1}{x_{i+1} - \alpha} - \frac{1}{x_i - \alpha}) \\ &= \frac{1}{x_i - \alpha} - (x - x_i) \end{aligned}$$

Chapitre 3

Dérivation et intégration numérique

Nous avons vu antérieurement comment approcher une fonction $f(x)$ connue aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dans un intervalle $[a, b]$ tel que $f(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$ par un polynôme d'interpolation $P_n(x)$. Nous allons faire pratiquement le même procédé pour la dérivation et l'intégration par exemple si nous connaissons les positions d'un mobile à des instants répétés et nous voulons connaître sa vitesse, ou inversement en connaissant la vitesse en des points et nous voulons connaître la distance parcourue en faisant l'intégration. Donc il s'agit de construire une approximation numérique de la dérivée (première, seconde,...) ou l'intégrale de la fonction f.

3.1 Dérivation numérique

Il existe deux approches pour construire de telles approximations, l'une utilise les développement en série de Taylor et l'autre utilise les formules d'interpolation.

3.1.1 Utilisation de la formule de Taylor

Dérivée première

Considérons une fonction dérivable sur un intervalle. Pour connaître une approximation de $f'(x)$, le procédé le plus simple consiste à

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{3.1}$$

D'après la formule de Taylor on a

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\xi), \quad \xi \in]x, x+h[$$

d'où
$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi), \quad \xi \in]x, x+h[\tag{3.2}$$
ainsi
$$f'_d(x) \simeq \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{3.3}$$
est la formule de dérivée à droite d'ordre 1 avec une erreur est en $o(h)$.
Par la même manière on définit la dérivée à gauche d'ordre 1 comme suit :
$$f'_g(x) \simeq \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \tag{3.4}$$
D'autre part, on a aussi
$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\eta_1), \quad \eta_1 \in]x, x+h[$$
et
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\eta_2), \quad \eta_2 \in]x-h, x[$$
d'où
$$f(x+h)-f(x-h) = 2hf'(x)+\frac{h^3}{3!}[f^{(3)}(\eta_1)+f^{(3)}(\eta_2)], \ \ \eta_1 \in]x, x+h[, \ \ \eta_2 \in]x-h, x[.$$
Ainsi
$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{h^2}{2.3!}[f^{(3)}(\eta_1)+f^{(3)}(\eta_2)], \ \ \eta_1 \in]x, x+h[, \ \ \eta_2 \in]x-h, x[.$$
On sait qu'en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\xi \in]x-h, x+h[$ *tel que*
$$\frac{f^{(3)}(\eta_1)+f^{(3)}(\eta_2)}{2} = f^{(3)}(\xi).$$
Il s'en suit
$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in]x-h, x+h[. \tag{3.5}$$
D'où la formule dérivée centrée d'ordre 2 est définie par :
$$f'_c(x) \simeq \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \tag{3.6}$$
avec une erreur en $o(h^2)$.

Dérivée seconde

On a

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\eta_1), \quad \eta_1 \in]x, x+h[$$

et

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\eta_2), \quad \eta_2 \in]x-h, x[.$$

Donc

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{4!}[f^{(4)}(\eta_1) + f^{(4)}(\eta_2)],$$

pour $\eta_1 \in]x, x+h[, \quad \eta_2 \in]x-h, x[$. *Ainsi*

$$f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - \frac{h^2}{4!}[f^{(4)}(\eta_1) + f^{(4)}(\eta_2)],$$

avec $\eta_1 \in]x, x+h[, \quad \eta_2 \in]x-h, x[$. *Il s'en suit*

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{2.3!}f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in]x-h, x+h[. \quad (3.7)$$

C'est une formule centrée d'ordre 2.
On peut établir la formule centrée d'ordre 4

$$f''(x) = \frac{-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h)}{12h^2} + \frac{h^4}{90}f^{(6)}(\xi),$$

avec $\xi \in]x-h, x+h[$.

3.1.2 Utilisation des formules d'interpolation

Dérivée première

D'aprés le chapitre précédent, la formule d'interpolation sous la forme de Newton s'écrit :

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$

$$+ f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \quad \xi \in]x_0, x_n[$$

On pose $w_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$. *En dérivant*

$$f'(x) = f[x_0, x_1]w_0'(x) + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]w_{n-1}'(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w_n'(x)$$

$$+\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+1)!}w_n(x), \quad \xi \in]x_0, x_n[.$$

$$f'(x) = \prod_{i=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_i]w'_{i-1}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w'_n(x) + \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+1)!}w_n(x), \;\; \xi \in]x_0, x_n[.$$

Pour $n = 1$, *on a*

$$f'(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}[x - x_0 + x - x_1] + \frac{f^{(3)}(\xi)}{2!}(x - x_0)(x - x_1), \;\; \xi \in]x_0, x_1[$$

avec $h = x_1 - x_0$.
Si $x = x_0$ *on obtient*

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}h, \quad \xi \in]x_0, x_1[.$$

C'est la dérivée à droite d'ordre 1.
Si on utilise la formule de Newton regressive on obtient

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!h}, \quad \xi \in]x_0, x_1[.$$

C'est la dérivée à gauche d'ordre 1.
Maintenant,on choisit $x = \frac{x_0+x_1}{2}$ *et en prenant* $x - x_0 = h$, *on aura la formule centrée d'ordre 2*

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in]x_0, x_1[.$$

Pour $n = 2$, *si en prenant* $x = x_0, \quad x_1 = x + h, \quad x_2 = x + 2h$

$$f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x + h) - f(x + 2h)}{2h} + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in]x, x + 2[$$

C'est la dérivée à droite d'ordre 2.
Et la formule de la dérivée à gauche d'ordre 2 est

$$f'(x) = \frac{f(x + 2h) + 4f(x + h) - 3f(x)}{2h} + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in]x, x + 2[$$

Si $x = x_0, \quad x_1 = x - h, \quad x_2 = x + h$ *alors on a la formule centrée d'ordre 2*

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in]x - h, x + h[.$$

Dérivée seconde

Par le même principe, pour la dérivée seconde, on choisit en général d'interpoler sur 3 points, ce qui donne (dans le cas de points équidistants) : on a

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\prod_{i=0}^{2}(x - x_i), \quad \xi \in]x_0, x_2[.$$

Alors

$$f'(x) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2](2x - x_1 - x_0) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}[(2x - x_1 - x_0)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1)], \quad \xi \in]x_0, x_2[.$$

Ainsi

$$f''(x) = 2f[x_0, x_1, x_2] + \frac{f^{(4)}(\xi)}{3}[(2x - x_1 - x_0)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1)] - \frac{f^{(5)}(\xi)}{3!} + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}[2(x - x_2) + (2x - x_1 - x_0) + (2x - x_0 - x_1)].$$

Si $x = x_0, \quad x_1 = x + h, \quad x_2 = x + 2h$ *alors la formule de la dérivée seconde d'orde 2 est donnée par*

$$f''(x) = \frac{f(x) + 2f(x + h) + f(x + 2h)}{h^2} - \frac{2h^2}{3}f^{(4)}(\xi) - \frac{h}{3}f^{(3)}(\xi), \ \ \xi \in]x - h, x + h[.$$

3.2 Erreur

3.2.1 Dérivée premier ordre

Théorème 3.1 *Soient* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2, $x_0 \in \mathbb{R}$ *et* $h > 0$. *Alors*

$$E_d = |f'(x_0) - f'_d(x_0)| \leq \frac{h}{2}\max_{x \in [x_0, x_0 + 1]}|f''(x)|.$$

Preuve. *Soient* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2, $x_0 \in \mathbb{R}$ *et* $h > 0$ *; en utilisant le développement de Taylor :*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(\xi), \quad \xi \in [x_0, x_0 + h]$$

alors

$$|f'(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}| = |\frac{h}{2}f''(x)| \leq \frac{h}{2}\max_{x \in [x_0, x_0 + 1]}|f''(x)|.$$

Alors, on obtient que :

$$|f'(x_0) - f'_d(x_0)| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [x_0, x_0+1]} |f''(x)|.$$

■

Théorème 3.2 *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Alors*

$$E_g = |f'(x_0) - f'_g(x_0)| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [x_0-1, x_0]} |f''(x)|.$$

En appliquant la formule de Taylor d'ordre 3, on aura le théorème suivant :

Théorème 3.3 *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^3, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Alors*

$$E_c = |f'(x_0) - f'_c(x_0)| \leq \frac{h^2}{24} \max_{x \in [x_0-\frac{1}{2}, x_0+\frac{1}{2}]} |f^{(3)}(x)|.$$

Preuve. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$; d'après le développement de Taylor on a*

$$f(x_0 + \frac{h}{2}) = f(x_0) + \frac{h}{2} f'(x_0) + \frac{h^2}{4.2} f''(x_0) + \frac{h^3}{8.6} f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in [x_0, x_0 + \frac{h}{2}]$$

et

$$f(x_0 - \frac{h}{2}) = f(x_0) - \frac{h}{2} f'(x_0) + \frac{h^2}{4.2} f''(x_0) - \frac{h^3}{8.6} f^{(3)}(\eta), \quad \eta \in [x_0 - \frac{h}{2}, x_0].$$

Et on a aussi comme résultat le théorème suivant :

Théorème 3.4 *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^3, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $0 < h \leq 1$. Alors*

$$E_c = |f'(x_0) - \frac{f(x_0 + \frac{1}{2}) - f(x_0 - \frac{1}{2})}{h}| \leq Ch^2.$$

Donc d'après ce théorème il suffit de prendre $C = \frac{1}{24} \max_{x \in [x_0-\frac{1}{2}, x_0+\frac{1}{2}]} |f^{(3)}(x)|$.

D'où le résultat. ■

3.2.2 Dérivée second d'ordre

En utilisant le même principe comme pour la première dérivée, il suffit dans ce cas de passer à l'ordre 4 dans la formule de Taylor, on aura

Théorème 3.5 *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^4, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Alors*

$$E_c = |f''(x_0) - f''_c(x_0)| \leq \frac{h^2}{24} \max_{x \in [x_0-1, x_0+1]} |f^{(4)}(x)|.$$

Preuve. *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^4, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, on a*

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0 + \frac{h}{2}) - f'(x_0 - \frac{h}{2})}{h}$$

et

$$f'(x_0 + \frac{h}{2}) \simeq \frac{f(x_0 + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}) - f(x_0 + \frac{h}{2} - \frac{h}{2})}{h},$$

$$f'(x_0 - \frac{h}{2}) \simeq \frac{f(x_0 - \frac{h}{2} + \frac{h}{2}) - f(x_0 - \frac{h}{2} - \frac{h}{2})}{h}.$$

D'où

$$f''(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}.$$

D'autre part, on a aussi $\forall f \in C^4$ $x_0 \in \mathbb{R}$ $\exists C > 0$, $\forall 0 < h \leq 1$:

$$|f''(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}| \leq Ch^2.$$

D'où il suffit de prendre $C = \frac{1}{24} \max_{x\in[x_0-1,x_0+1]} |f^{(4)}(x)|$. Ainsi le résultat. ■

3.3 Integration numérique

Dans cette partie nous essayons de développer quelques méthodes numériques de calcul l'intégrale d'une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$. Le théorème fondamental du calcul intégral est basé sur que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f. Pour appliquer ce résultat, nous disposons de divers outils théoriques dont les plus fondamentaux sont le théorème de changement de variable et le théorème d'intégration par partie. Cependant, il n'est possible de déterminer explicitement une primitive F que pour une classe relativement restreinte de fonctions f et, lorsque cette détermination est à notre disposition, l'expression de F est souvent si compliquée que l'évaluation de $F(b) - F(a)$ nécessite l'emploi d'un processus d'approximation. Dans ce cas, il est tout aussi naturel et généralement moins coûteux de chercher directement une approximation de l'intégrale.
Pour approcher numériquement cette intégrale on décompose l'intervalle $[a, b]$ en $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. On a alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx.$$

Sur chaque $[x_i, x_{i+1}]$, on applique une méthode d'intégration élémentaire en utilisant le polynôme d'interpolation de Newton de f

$$P_i(x) = f[x_{i,0}] + f[x_{i,0}, x_{i,1}](x - x_{i,0}) + \cdots + f[x_{i,0}, x_{i,1}, \ldots, x_{i,l}](x - x_{i,0}) \ldots (x - x_{i,l})$$

en des points $x_{i,0}, \ldots, x_{i,k}$ de l'intervalle $[a, b]$ (qui peuvent être ou non dans $[x_i, x_{i+1}]$).

3.3.1 Méthodes des rectangles

On approche la fonction f par la constante $f(x_{i,0})$ où $x_{i,0} \in [x_i, x_{i+1}]$. Alors on obtient

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_{i,0})dx = \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(\xi_i), \;\; \xi_i \in [x_i, x_{i+1}], \;\; h_i = x_{i+1} - x_i. \tag{3.8}$$

Les choix courants pour ξ_i sont :

- *Si $\xi_i = x_i$ alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(x_i), \quad \text{(Formule de réctangle à gauche).}$$

- *Si $\xi_i = x_{i+1}$ alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(x_{i+1}), \quad \text{(Formule de réctangle à droite).}$$

- *Si $\xi_i = \frac{x_{i+1}+x_i}{2}$ alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}), \quad \text{(Formule de réctangle au point milieu).}$$

3.3.2 Méthode des Trapèzes

On prend $l = 1$, sachant que l représente le nombre de subdivision de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, alors on remplace f par le polynôme d'interpolation de Newton aux points x_i, x_{i+1}. On obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x_{i,0}) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i))dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(f(x_{i+1}) + f(x_i)) \\ &\simeq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_{i+1} + h_i}{2} f(x_i) + \frac{1}{2}(h_1 f(x_0) + h_n f(x_n)). \end{aligned} \tag{3.9}$$

En cas équidisant c'est-à-dire $h_i = h = x_{i+1} - x_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ on a

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)]$$

$$\simeq \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)]. \tag{3.10}$$

Exemple 3.1 *On calcule l'intégrale suivante*

$$I = \int_1^3 \ln(x)dx.$$

Donner une valeur approchée de l'intégrale I en utilisant la méthode des trapèzes composite avec 4 sous-intervalles. Cela revient à prendre $h = \frac{1}{2}$ et $x_0 = a = 1$ $x_4 = b = 3$, $x_1 = \frac{3}{2}$ $x_2 = 2$ et $x_3 = \frac{5}{2}$.
D'après la méthode des trapèzes , on a

$$I = \frac{h}{2}[f(1) + f(3) + 2(f(\frac{3}{2}) + f(2) + f(\frac{5}{2})] \simeq 1,821.$$

3.3.3 Méthode de Simpson

On prend cette fois $l = 2$, telle que l représente le nombre de subdivision de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ donc on interpole la fonction f aux points x_i, $x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_{i+1}+x_i}{2}$, x_{i+1} en utilisant le polynôme de Newton. Soit $h_i = x_{i+1} - x_i$, on trouve

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i) + f[x_i, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+1}](x - x_i)(x - x_{i+1})]dx$$

$$= h_i f(x_i) + \frac{1}{2}h_i^2 f[x_i, x_{i+1}] + f[x_i, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+1}] \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1})dx.$$

On écrit $x - x_{i+1} = x - x_i + x_i - x_{i+1}$ on aura

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1})dx = -\frac{h_i^3}{6},$$

et

$$h_i^2[f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}] = h_i(f(x_{i+1}) - f(x_i)),$$
$$h_i^3 f[x_i, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+1}] = 2h_i(f(x_{i+1}) - 2f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)).$$

D'où

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_i}{6}\left[f(x_i) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})\right]. \tag{3.11}$$

Dans le cas équidisant cette formule composée devient

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i+1})\right] \tag{3.12}$$

avec $h = \frac{b-a}{n}$.

Exemple 3.2 *On veut calculer l'intégrale* $I = \int_0^6 x^3 dx$. *Pour* $n = 2$ *on a* $h = 3$, *d'où*

$$I = \frac{h}{3}(f(0) + f(6) + 4f(3)) = 324.$$

Pour $n = 4$ *on a* $h = \frac{3}{2}$, *d'où*

$$I = \frac{h}{3}(f(0) + f(6) + 2f(3) + 4(f(\frac{3}{2}) + f(\frac{9}{2})) = 324$$

D'autre part, la valeur exacte de cette intégrale est

$$I = \int_0^6 x^3 dx = \frac{x^4}{4}]_0^6 = 324.$$

On remarque que la méthode de Simpson est exacte pour le polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

3.3.4 Erreurs de quadrature

Théorème 3.6 *Soit* f *une fonction de classe* $\mathcal{C}^{n+1}([a,b])$ *telle que* $f^{(n+1)}$ *existe sur* $]a,b[$. *Si les valeurs de* f *aux points* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *sont connues, et* $\int_a^b P_i(x)dx$ *est l'approximation d'ordre* n *de* $\int_a^b f(x)dx$ *où* $P_i(x)$ *est le polynôme d'interpolation de Newton de la fonction* f *alors :*

$$|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_i(x)dx| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\int_a^b |\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)|dx$$

où $M_{n+1} = \max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$.

Appliquons ce théorème aux méthodes usuelles. On obtient.

Erreur de méthode des rectangles

La méthode est d'ordre 0 *et exacte seulement pour les constantes.*

$$|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(\xi_i)dx| \leq \frac{h_i^2}{2}M_1. \tag{3.13}$$

Dans le cas d'un pas constant, on obtient :

$$|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(\xi_i)dx| \leq \frac{M_1}{2}(b-a)h. \tag{3.14}$$

Erreur de la méthode des trapèzes

Pour $n = 1$ *on trouve*

$$|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))| \leq \frac{M_2}{2}|\int_a^b (x-a)(x-b)dx| = \frac{M_2}{12}(b-a)^3. \tag{3.15}$$

Pour la formule composée de la méthode des trapèzes, on en déduit que l'erreur est majorée par

$$|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i))| \leq \frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3.$$

$$E(f) \leq \frac{M_2}{12}h^2(b-a). \tag{3.16}$$

Erreur de la méthode de Simpson

Cette fois $n = 2$ *alors on a*

$$|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}(f(a)+f(b)+4f(\frac{a+b}{2}))| \leq \frac{M_4}{24}|\int_a^b (x-a)(x-b)(x-\frac{a+b}{2})^2 dx|$$

$$\leq \frac{M_4}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5. \tag{3.17}$$

La formule composée correspondante avec pas constant h *donnera une erreur majorée par :*

$$|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i})+4\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i+1})]| \leq \frac{M_4}{2880n^4}(b-a)^5. \tag{3.18}$$

Par ailleurs, la méthode de Simpson (bien que reposant sur une interpolation à trois points) est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

Exemple 3.3 *Calculons l'intégrale* $\int_0^1 e^{-x^2}dx$. *Utilisons les méthodes élémentaires précédentes à l'aide des valeurs de* $f(x) = e^{-x^2}$ *aux points* $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ *et* $x_2 = 1$. *Alors on a*

$$f(1) = e, \quad f(\frac{1}{2}) = 0,7880 \quad et \quad f(1) = 0,36788.$$

Méthode des rectangles

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 1$$

calculons l'erreur

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}, f''(x) = 2(2x^2-1)e^{-x^2} \leq 0 \quad sur[0,1]$$

alors f' *est décroissante d'où* $M_1 = |f'(1)| = 0,735788$ *et*

$$E_{rectangle}(f) \leq \frac{M_1}{2}(b-a)h = \frac{M_1}{2} = 0.367894.$$

Méthode des trapèzes *pour* $n = 1$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \frac{h}{2}(f(0)+f(1)) = 0,68394..$$

Avec une erreur :

$$E_{trapeze}(f) \leq \frac{M_2}{12}(b-a)^3 = \frac{M_2}{12} = 0.0613132.$$

Méthode de Simpson *Pour* $n = 2$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \frac{h}{6}(f(0)+f(1)+4f(\frac{1}{2})) = 0,74718.$$

Avec une erreur

$$E_{Simpson}(f) \leq \frac{M_4}{2880}(b-a)^5 = \frac{M_4}{2880} = 0.000254764.$$

La valeur exacte est $I_{exacte} = 0,74682$. *On remarque que* $E = |I_{exacte} - I_S| = 0,00036 \simeq 4 \times 10^{-4}$, *donc la méthode de Simpson donne une approximation à* 4×10^{-4} *avec seulement trois valeurs de* f *parce que les dérivées d'ordre supérieur ne varient pas trop sur l'intervalle* $[0,1]$.

3.4 Exercices

Exercice 1 : *A partir des données expérimentales*

x	*1*	*1.01*	*1.02*
$f(x)$	*1.27*	*1.32*	*1.38*

1. Calculer les approxiationts de $f'(1.005)$, $f'(1.015)$ *et* $f''(1.01)$. *données par les formules centrées*

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$$

et

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

2. Si les données du tableau sont précises à ± 0.005 *quelle sera l'erreur commise sur les trois quantitées calculées ?*

Exercice 2 : *Soit une fonction* f *connue aux certains points* x_i, $i = 0, \ldots, n$ *et* $h = x_{i+1} - x_i$ *un pas. On cherche à approcher la dérivée première* $f'(x_i)$ *par les trois valeurs* $f(x_{i-2})$, $f(x_{i-1})$ *et* $f(x_i)$ *à l'aide d'un schéma décentré suivant :*

$$f'(x_i) = \frac{1}{h}[\alpha f(x_i) + \beta f'(x_{i-1}) + \gamma f''(x_{i-2})] + o(h^2).$$

Que valent les nombres α, β, γ *?*

Exercice 3 :

1) Donner les formules des rectangles approchant $I = \int_a^b f(t)dt$.

2) Trouver l'erreur commise en appliquant la méthode des rectangles, ainsi que le nombre minimum n *de subdivisions de* $[0, 1]$ *pour avoir* $\int_0^1 e^{t^2} dt$ *à* 10^{-2}.

3) Donner la méthode des rectangles à point milieu.

4) Trouver l'erreur commise en appliquant la méthode des rectangles à point milieu. Même application qu'à la question 2).

Exercice 4 : *On lance une fusée verticalement du sol et l'on mesure pendant les premières 80 secondes l'accéleration* γ

t (en s)	*0*	*10*	*20*	*30*	*40*	*50*	*60*	*70*	*80*
γ *en* m/s^2	*30*	*31.63*	*33.44*	*35.47*	*37.75*	*40.33*	*43.29*	*46.70*	*50.67*

Calculer la vitesse V *de la fusée à l'instant* $t = 80s$, *par les Trapèzes puis par Simpson.*

Exercice 5 : *Soit l'intégrale* $I = \int_0^\pi \sin(x)dx$.

1. *Calculer la valeur exacte de* I.
2. *En utilisant la méthode des trapèzes généralisée et la méthode de simpson généralisée pour* $h = \frac{\pi}{4}$ *:*

a) Calculer I
b) Majorer l'erreur
c) Evaluer l'erreur.

3. *Donner la valeur du pas h et le nombre de subdivision de l'intervalle* $[0, \pi]$ *pour que l'erreur obtenue par la méthode généralisé des trapèzes (resp. de Simpson) soit plus petite que* 5×10^{-4}.

Exercice 6 : *On note*

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt, \quad J(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(t_i)$$

1. On choisit $w_i = \int_a^b L_i(t)dt$, L_i *les polynômes de base de Lagrange (coefficient du polynôme de Lagrange) associés aux points* $t_0, t_1, \ldots, t_n$.
1. Montrer que $I(p) = J(p), \quad \forall p \in \mathcal{P}_n$.
2. Réciproquement, on suppose que $I(p) = J(p), \quad p \in \mathcal{P}_n$.
Montrer que $w_i = \int_a^b L_i(t)dt$.
3. On note par $p_0, p_1, \ldots, p_n$ *la base canonique de* P_n.
Montrer que $I(p) = J(p), \quad \forall p \in \mathcal{P}_n \Leftrightarrow I(p_i) = J(p_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n$.

3.5 Corrigés des exercices

Solution exercice 1
On a

x	1	1.01	1.02
$f(x)$	1.27	1.32	1.38

1. Calculons les approxiationts de $f'(1.005)$, $f'(1.015)$ *et* $f''(1.01)$ *en utilisant les formules centrées :*

$$\begin{aligned} f'(1.005) &= \frac{f(1.005 + 0.005) - f(1.005 - 0.005)}{0.005} \\ &= \frac{f(1.01) - f(1)}{0.005} \\ &= 10 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f'(1.015) &= \frac{f(1.015 + 0.005) - f(1.015 - 0.005)}{0.005} \\ &= \frac{f(1.02) - f(1.01)}{0.005} \\ &= 12. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(1.01) &= \frac{f(1.01+0.01)-2f(1.01)+f(1.01-0.01)}{0.01^2} \\ &= \frac{f(1.02)-2f(1.01)+f(1)}{0.0001} \\ &= 100. \end{aligned}$$

2. Sachant que les données du tableau sont précises à $\varepsilon = \pm 0.005$, c'est à dire l'erreur absolue de f est $\Delta f(x_i) = \pm 0.005$ pour $i = 0, 1, 2$. En vertu de la proposition 1.1 et la proposition 1.2 du premier chapitre, on a

$\Delta[f(x+h) - f(x-h)] = \Delta f(x+h) + \Delta f(x-h) \simeq 2\Delta f(x)$ et même chose pour $\Delta[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] = \Delta f(x+h) + 2\Delta f(x) + \Delta f(x-h) \simeq 4\Delta f(x)$.

Par conséquent, d'après la première question, on obtient

$$f'(1.005) = 10 \pm 2\frac{\Delta f(x)}{h} = 10 \pm 2,$$

$$f'(1.015) = 12 \pm 2\frac{\Delta f(x)}{h} = 12 \pm 2,$$

et

$$f''(1.01) = 100 \pm 4\frac{\Delta f(x)}{h^2} = 100 \pm 200.$$

D'après ces résultats, on remarque que une petite parturbation de f a induit une grande perturbation de f' et f''.

Solution exercice 2

On utilise le développement de Taylor, on a

$$f(x_{i-1}) = f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) + O(h^3)$$

et

$$f(x_{i-2}) = f(x_i - 2h) = f(x_i) - 2hf'(x_i) + 2h^2 f''(x_i) + O(h^3).$$

Ainsi

$$\frac{1}{h}[\alpha f(x_i) + \beta f(x_{i-1}) + \gamma f(x_{i-2})]$$

$$= \frac{\alpha+\beta+\gamma}{h} f(x_i) - (\beta + 2\gamma)f'(x_i) + h(\frac{\beta}{2} + 2\gamma)f''(x_i) + O(h^2)$$

et cette relation est identique à $f'(x_i)$ si et seulement si

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ -\beta - 2\gamma &= 1 \\ \frac{\beta}{2} + 2\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Alors, on obtient : $\beta = -2$, $\gamma = \frac{1}{2}$ *et* $\alpha = \frac{3}{2}$.
On a donc

$$f'(x_i) \simeq \frac{1}{h}[\frac{3}{2}f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + \frac{1}{2}] + O(h^2).$$

C'est un schéma inventé par Gear dans les années 1960.

Solution exercice 4

On sait que l'acceleration γ *est la dérivée de la vitesse* V*, donc,*

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \gamma(t)dt$$

$$V(80) = 0 + \int_0^{80} \gamma(t)dt.$$

a) Calculons $V(80)$ *par la méthode des trapèzes, d'après le tableau des valeurs, on a* $h = 10$ *et n=8. Alors*

$$\begin{aligned} V(80) &= \frac{h}{2}(\gamma(t_0) + \gamma(t_n) + {}_{n=1} n - 1\gamma(t_i)) \\ &= 5(30 + 50.67 + 2(31.63 + 33.44 + 35.47 + 37.75 + 40.33 + 43.29 + 46.70)) \\ &= 3089 m/s \end{aligned}$$

b) Calculons $V(80)$ *par la méthode de Simpson*

$$\begin{aligned} V(80) &= \frac{h}{3}(\gamma(t_0) + \gamma(t_n) + 2_{n=1} n - 1\gamma(t_{2i}) + 4_{n=0} n - 1\gamma(t_{2i+1})) \\ &= \frac{10}{3}(30 + 50.67 + 2(33.44 + 37.75 + 43.29) \\ &+ 4(31.63 + 35.47 + 40.33 + 46.70)) \\ &= 3087 m/s \end{aligned}$$

Solution exercice 5

1.

$$I = \int_0^\pi \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^\pi = 2$$

2. I) On commance par la méthode des Trapèzes :
a)

$$I_{trap} = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_4) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$$

avec $x_1 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \frac{3\pi}{4}$ *et* $x_4 = \pi$*, donc*

$$I_{trap} = \frac{\pi}{8}(f(0) + f(\pi) + 2(f(\frac{\pi}{4}) + f(\frac{\pi}{2}) + f(\frac{3\pi}{4}))) = \frac{\pi}{4}(1 + \sqrt{2}) \simeq 1.896.$$

b) On a

$$E = -\frac{h^2}{12}(x_n - x_0)f''(\zeta), \quad \textit{avec} \ \ 0 \le \zeta \le \pi$$

$$|E| = \frac{\pi^3}{192}|\sin(\zeta)| \leq \frac{\pi^3}{192} \simeq 0.16149, \quad avec \;\; 0 \leq \zeta \leq \pi.$$

c)

$$b) E_{relle} = I_{exacte} - I_{trap} \simeq 0,1038.$$

II) La méthode de Simpson a)

$$I_{Simp} = \frac{\pi}{12}(f(0)+f(\pi)+2f(\frac{\pi}{2})+4(f(\frac{\pi}{4})+f(\frac{3\pi}{4}))) = \frac{\pi}{6}(1+4\sqrt{2}) \simeq 3,4855207.$$

b) On a

$$E = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\zeta), \quad avec \;\; 0 \leq \zeta \leq \pi$$

$$|E| = \frac{h^5}{90}|\sin(\zeta)| \leq \frac{h^5}{90} \simeq 0,00033205, \quad avec \;\; 0 \leq \zeta \leq \pi.$$

c)

$$b) E_{relle} = I_{exacte} - I_{Simp} \simeq 1,4855207.$$

3. Calculons la valeur du pas h et le nombre de subdivision n de l'intervalle $[0, \pi]$ avec $\varepsilon = 5 \;\; 10^{-4}$.

Méthode des trapèzes *On a*

$$E = -\frac{h^2}{12}(x_n - x_0)f''(\zeta), \quad avec \;\; 0 \leq \zeta \leq \pi$$

$$|E| = \frac{\pi}{12}h^2|\sin(\zeta)| \leq \frac{\pi}{12}h^2 \simeq 0.0005, \quad avec \;\; 0 \leq \zeta \leq \pi.$$

$$\Leftrightarrow h^2 \leq \frac{12}{\pi}0,0005$$

$$\Leftrightarrow h \leq 0,044.$$

D'où

$$n > \frac{\pi}{h} \simeq 71,8$$

Donc le nombre de subdivision de l'intervalle $[0, \pi]$ est $n \geq 72$.

Méthode de Simpson *On a*

$$E = -\frac{\pi}{90}h^4 f^{(4)}(\zeta), \quad avec \;\; 0 \leq \zeta \leq \pi$$

$$|E| = \frac{\pi}{90}h^4|\sin(\zeta)| \leq \frac{\pi}{90}h^4 \simeq 0,0005, \quad avec \;\; 0 \leq \zeta \leq \pi.$$

$$\Leftrightarrow h^4 \leq \frac{90}{\pi}0,0005$$

$$\Leftrightarrow h \leq 0,4111408.$$

D'où

$$n > \frac{\pi}{h} \simeq 7,64116$$

Donc le nombre de subdivision de l'intervalle $[0, \pi]$ *avec la méthode de Simpson est* $n \geq 8$.

Solution exercice 6

1. *Si* $p \in \mathcal{P}_n$, *alors* $\forall t, p(t) = \sum_{i=0}^{n} p(t_i) L_i(t)$, *donc*

$$I(p) = \int_a^b p(t)dt = \sum_{i=0}^{n} p(t_i) \int_a^b Li(t)dt = \sum_{i=0}^{n} w_i p(t_i) = J(p).$$

2. *On a*

$$I(p) = J(p), \forall p \in \mathcal{P}_n), I(L_j) = J(L_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n$$

or

$$I(Lj) = \int_a^b L_j(t)dt, \quad et \quad J(L_j) = \sum_{i=0}^{n} w_i L_j(t_i) = wj.$$

D'où le résultat.

3. *On a* $I(p) = J(p)$, $\forall p \in \mathcal{P}_n$, *alors* $I(p_i) = J(p_i)$, *pour* $i = 0, \ldots, n$.
Réciproquement, on suppose que $I(p_i) = J(p_i)$, *pour* $i = 0, \ldots, n$. *Soit* $p \in \mathcal{P}_n$, *alors* $p = \sum_{i=0}^{n} a_i p_i$. *Donc*

$$I(p) = \sum_{i=0}^{n} a_i \int_a^b p_i(t)dt = \sum_{i=0}^{n} a_i I(p_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i J(p_i).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} J(p) &= \sum_{j=0}^{n} w_j p(t_j) = \sum_{j=0}^{n} wj \sum_{i=0}^{n} a_i p_i(t_j) \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n} w_j a_i p_i(t_j) \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i J(p_i) = I(p). \end{aligned}$$

D'où, le résultat.

Chapitre 4

Résolution d'équations algébriques

Ce chapitre est consacré à résoudre l'équation non linéaire du type :

$$f(x) = 0 \tag{4.1}$$

où f est une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Le problème est de trouver les valeurs de x dans l'intervalle $[a, b]$ satisfaisant l'équation $f(x) = 0$.
En général, les méthodes de résolution de l'équation non linéaire $f(x) = 0$ sont des méthodes itératives. Elles consistent à construire une suite x_n convergente (plus rapidement possible) vers la solution.

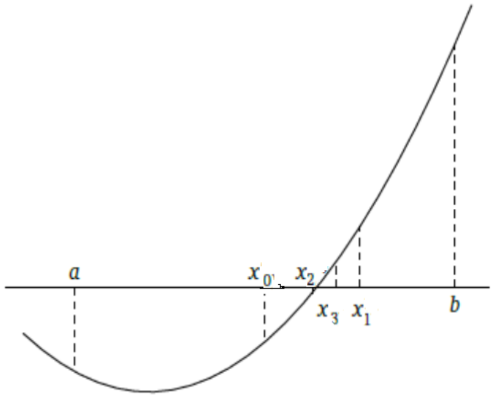
4.1 Méthode de Dichotomie (ou bissection)

Le principe de la Dichotomie repose sur la version suivante du théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 4.1 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si $f(a) \times f(b) \leq 0$ alors $\exists c \in [a, b] : f(c) = 0$.*

Pour déterminer la solution de l'équation $f(x) = 0$, avec f une fonction continue sur $[a, b]$, il faut d'abord localiser la racine $\overline{x}$ dans l'intervalle $[a, b]$, où $\overline{x}$ est une racine simple. On procède de la manière suivante :

1. *On divise l'intervalle $[a, b]$ en deux parties égales et on pose $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Alors*
$$\begin{cases} \overline{x} \in [a, x_0], & si\ f(a)f(x_0) < 0 \\ \overline{x} \in [x_0, b], & si\ f(b)f(x_0) < 0. \end{cases}$$
2. *On note le nouveau intervalle contenant $\overline{x}$ par $[a_1, b_1]$:*
$$\begin{cases} a_1 = a \quad et \quad b_1 = x_0 \quad si \quad \overline{x} \in [a, x_0] \\ a_1 = x_0 \quad et \quad b_1 = b \quad si \quad \overline{x} \in [x_0, b]. \end{cases} \tag{4.2}$$
3. *En itérant ce procédé, on obtient une suite de valeurs :*
$$x_0 = \frac{a+b}{2}, x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \ldots, x_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$



Construction des premiers itérés de la méthode de dichotomie.

Cela nous amène à l'algorithme suivant.
Algorithme de dichotomie (ou bissection)
Soit $f : [a_0, b_0] \to \mathbb{R}$ *continue et telle que* $f(a_0) \times f(b_0) < 0$.
Pour $i = 0, 1, \ldots, n$, *faire*

$$x_i = \frac{a_i + b_i}{2}.$$

Si $f(a_i) \times f(x_i) < 0$ *alors* $a_{i+1} = a_i$ *et* $b_{i+1} = x_i$.
Sinon $a_{i+1} = x_i$ *et* $b_{i+1} = b_i$.

4.1.1 Etude de convergence

Théorème 4.2 *Soit* f *une fonction continue sur* $[a, b]$. *Nous supposons que* $f(a) \times f(b) < 0$ *et que l'équation* $f(x) = 0$ *admet une et une seule solution* $c \in]a, b[$. *Si l'algorithme de dichotomie arrive jusqu'à l'étape* n *(de sorte que* $x_i \neq c$, *pour* $i = 0, \ldots, n$*) alors*

$$|x_n - c| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}. \tag{4.3}$$

Preuve. *On a* $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$ *et par recurrence* $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$
D'où $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$.
En suite, on a x_{n+1} *était au milieu de l'intervalle* $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, $\forall x \in [a_n, b_n]$.

Alors on trouve

$$|x - x_{n+1}| \leq \frac{b_{n+1} - a_{n+1}}{2} = \frac{b-a}{2^{n+2}}.$$

Et par définition c *est la racine se trouve dans* $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ *par* $f(a_{n+1}) \times f(b_{n+1}) < 0$, *nous pouvons donc prendre* $x = c$.
Ainsi

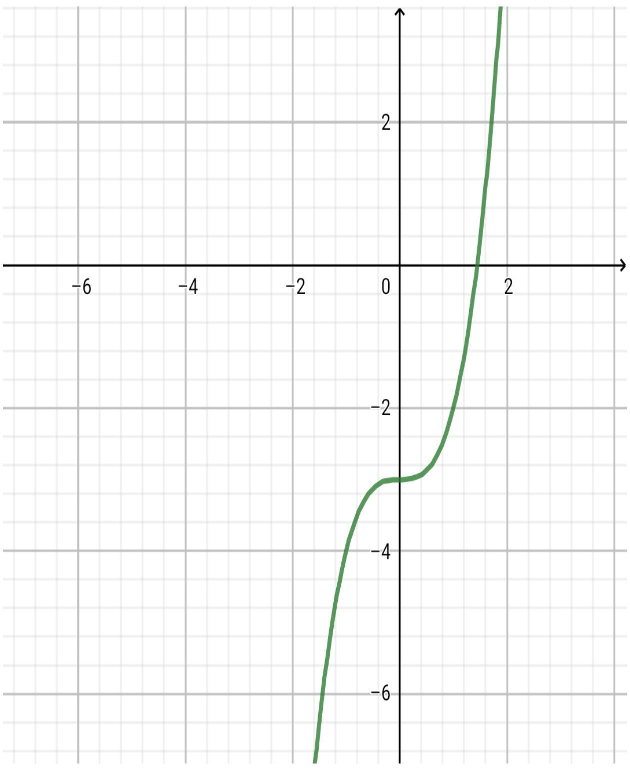
$$|x_{n+1} - c| \leq \frac{b-a}{2^{n+2}}.$$

■

Remarque 4.1 *D'après le théorème 4.2 les itérations par la méthode de la dichotomie s'achèvent à la m-ème étape quand* $|x_m - \overline{x}| \leq \frac{|b_m - a_m|}{2} = \frac{b-a}{2^{m+1}} < \varepsilon$, *où* ε *est une tolérance fixée et* $\overline{x}$ *est la racine dans* $[a, b]$. *Donc pour avoir une erreur* $|x_m - \overline{x}| \leq \varepsilon$ *if suffit de prendre le plus petit* m *qui vérifie*

$$m \geq \frac{ln(\frac{b-a}{\varepsilon})}{ln2} - 1.$$

Exemple 4.1 *Soit* $f(x) = x^3 - 3$. f *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$. *L'unique solution de l'équation* $f(x) = 0$ *est* $\sqrt[3]{3}$. *On veut approcher la valeur de* $\sqrt[3]{3}$.



On prend l'intervalle $[1, 2]$. *Alors on a*
$f(1) = -2 < 0$
$f(2) = 5 > 0$
On note $I_0 = [1, 2]$ *et on calcule* $f(\frac{a+b}{2}) = f(\frac{1+2}{2}) = \frac{3}{8} > 0$, *avec* $x_0 = \frac{3}{2}$
Donc $\sqrt[3]{3}$ *est dans l'intervalle* $[1, \frac{3}{2}]$.

$a_1 = a_0 = 1$ *et* $b_1 = \frac{3}{2}$, *et on calcule*
$f(\frac{a_1+b_1}{2}) = f(\frac{5}{4}) = -\frac{67}{64} < 0$, *et* $x_1 = \frac{5}{4}$.
Maintenant $\sqrt[3]{3}$ *est dans l'intervalle* $I_2 = [\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$ *qui est plus petit que* I_1.
$f(\frac{a_2+b_2}{2}) = f(\frac{\frac{3}{2}+\frac{5}{4}}{2}) = f(\frac{11}{8}) = -\frac{205}{512} < 0$ *et* $x_2 = [\frac{11}{8}$
Alors $I_3 = [\frac{11}{8}, \frac{3}{2}]$.
$f(\frac{a_3+b_3}{2}) = f(\frac{23}{16}) = -\frac{121}{4096} < 0$ *et* $x_3 = \frac{23}{16}$.
Ainsi $I_4 = [\frac{23}{16}, \frac{3}{2}]$.
Si on prend l'estimation de l'erreur d'arrondis $\varepsilon = 10^{-2}$, *alors d'après le théorème de convergence on obtient :*

$$n \geq \frac{ln(\frac{b-a}{\varepsilon})}{ln2} - 1 = 5,62$$

d'où $n = 6$.

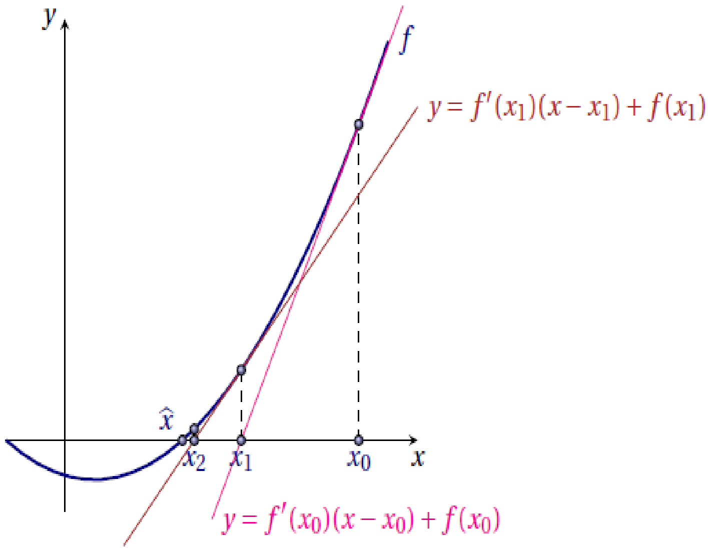
4.2 Méthode de Newton-Raphson

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ *tel que* $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$ *et on suppose que l'équation* $f(x) = 0$ *admet une seule solution dans l'intervalle* $[a,b]$. *Le principe de la méthode de Newton-Raphson consiste à remplacer le problème non linéaire* $f(x) = 0$ *par un problème affine* $g(x) = 0$, *où* g *est la meilleure approximation affine de* f *au voisinage de* x_0 *donné. On identifie la représentation de* g *à la tangente à la courbe de* f *au point d'abscisse au voisinage de* x_0. *En effet, par la formule de Taylor on a*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \tag{4.4}$$

On suppose que $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, *et nous définisons* x_1 *tel que* $g(x_1) = 0$. *Notons que* x_1 *est bien définie lorsque* $f'(x_0) \neq 0$ *donné par :*

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$



Nous construisons ainsi par récurrence, sous réserve que $x_n \in [a,b]$, la suite comme suit :

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \quad \textit{donnée} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{4.5}$$

4.2.1 Etude de convergence

Théorème 4.3 *(convergence globale de la méthode de Newton -Raphson) Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle $[a,b]$ telle que*

i) $f(a) \times f(b) < 0$;

ii) $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$ *;*

iii) $f'(x)$ *et* $f''(x)$ *sont non nulles et gardent des signes constants dans* $[a,b]$.

Alors la suite des itérés de Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \textit{pour tout} \quad n \in \mathbb{N},$$

converge vers l'unique zéro $\overline{x} \in [a,b]$ de f.

Preuve. *Les hypothèses de changement de signe de la fonction continue f et de signe constant de sa dérivée f', également continue, sur $[a,b]$ impliquent qu'il existe un unique zéro $x^* \in [a,b]$. Par conséquent, si $f(x_0)f''(x_0) = 0$, on a directement $x_0 = \xi$ et la méthode est (trivialement) convergente.*

On suppose donc que $f(x_0) \times f''(x_0) > 0$. Puisque f'' garde un signe constant

sur l'intervalle $[a, b]$*, on doit distinguer deux cas.*
Soit, $\forall x \in [a, b]$*,* $f''(x) > 0$ *et alors* $f(x_0) > 0$*. Si de plus,* $\forall x \in [a, b]$*,* $f'(x) > 0$*, on a alors,* $\forall x \in [a, x^*[$*,* $f(x) < 0$ *et,* $\forall x \in]x^*, b]$*,* $f(x) > 0$*, d'où* $x_0 \in]x^*, b]$*. On vérifie alors que*

$$\forall x \in]x^*, b], g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} > 0,$$

la fonction g *définissant la méthode est donc strictement croissante sur* $]x^*, b]$*. On en déduit d'une part que*

$$\xi = g(\xi) \leq g(x_0) = x_1,$$

et d'autre part

$$x_1 = g(x_0) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0$$

doù $\xi \leq x_1 < x_0$*. Par récurrence, on obtient que la suite de Newton Raphson est strictement décroissante et minorée par* ξ*. Elle est donc convergente et a pour limite l'unique point fixe* ξ *de la fonction* g*. Si,* $\forall x \in [a, b]$*,* $f'(x) < 0$*, un raisonnement identique conduit au fait que la* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de Newton-Raphson est strictement croissante et majorée par* ξ*. De nouveau, cette suite est convergente et a pour limite* ξ*. Enfin, si,*$\forall x \in [a, b]$*,* $f''(x) < 0$ *et* $f(x_0) < 0$*, il suffit de reprendre la preuve ci-dessus en remplaçant* f *par* $-f$ *pour établir la convergence de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

■

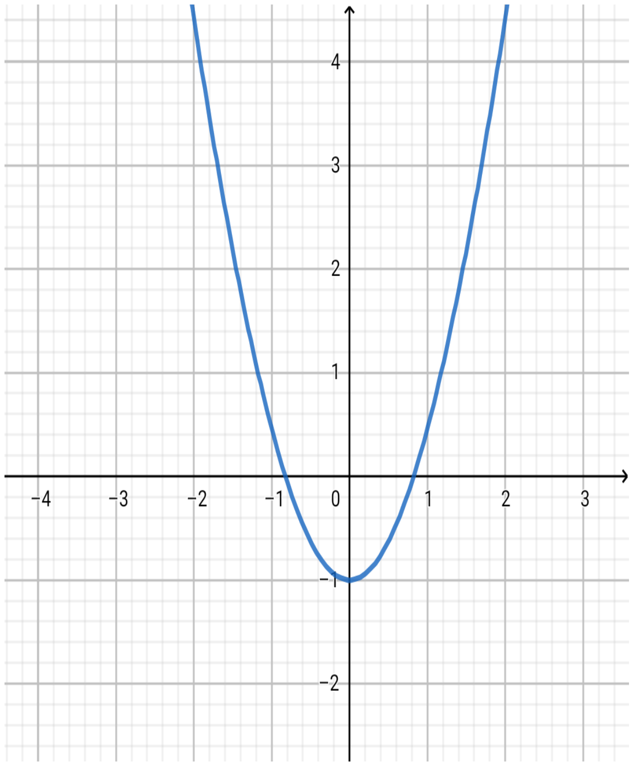
Remarque 4.2 *Initialisation* x_0 *dans* $[a, b]$ *de la suite de Newton Raphson vérifie :* $f(x_0) \times f''(x_0) \geq 0$*.*

Définition 4.1 *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite convergeant vers* $\overline{x}$*. S'il existe un nombre* k *et une constante* $C \neq 0$ *tels que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1} - \overline{x}|}{|x_n - \overline{x}|^k} = C \tag{4.6}$$

on dit que la convergence est d'ordre k *et* C *est la constante d'erreur asymptotique.*

Exemple 4.2 *Soit* $f(x) = x^2 - cosx$ *sur* $[\frac{1}{2}, 1]$ *et soit* $x_0 = \frac{\pi}{4}$*.*



On a $f'(x) = 2x + \sin x > 0$ *sur* $[\frac{1}{2}, 1]$ *et* $f''(x) = 2 + \cos x > 0$ *sur* $[\frac{1}{2}, 1]$. *En utilisant la suite de Newton pour trois itérations, on trouve :*
$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0,8250207$
$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,8241327556$
$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0,8241323123$
On observe à chaque itération que $|f(x_0)| \simeq 10^{-1}$, $|f(x_1)| \simeq 2\times 10^{-3}$, $|f(x_2)| \simeq 10^{-6}$ *et* $|f(x_3)| \simeq 3 \times 10^{-13}$.
On voit que l'exposant de $|f(x_i)|$, $i = 0, 1, 2, 3$ *est double à chaque itération, alors on dit que la méthode de Newton est d'ordre 2 (ou bien la convergence de la méthode de Newton est quadratique).*

4.3 Méthode de point fixe

La méthode de point fixe consiste à transformer l'équation non linéaire $f(x) = 0$ *en un problème équivalent*

$$g(x) = x \tag{4.7}$$

où la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *a la propriétée suivante*

$$\overline{x} = g(\overline{x}) \quad \textit{si et seulement si} \quad f(\overline{x}) = 0.$$

Définition 4.2 *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $\overline{x} \in \mathbb{R}$ est tel que $g(\overline{x}) = \overline{x}$, on dit que $\overline{x}$ est un point fixe de g (l'image de $\overline{x}$ par g est lui-même).*

La méthode de point fixe consiste à la construction dune suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \quad \text{donnée} \\ x_{n+1} = g(x_n), \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4.8}$$

Remarque 4.3 *Le choit de x_0 a un influence sur le comportement (convergence) de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, par exemple si on prend $g(x) = x^2$. Alors si on choisit x_0 à gauche de 1, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le point fixe 0. Mais si on choisit x_0 à droite de 1 la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini.*

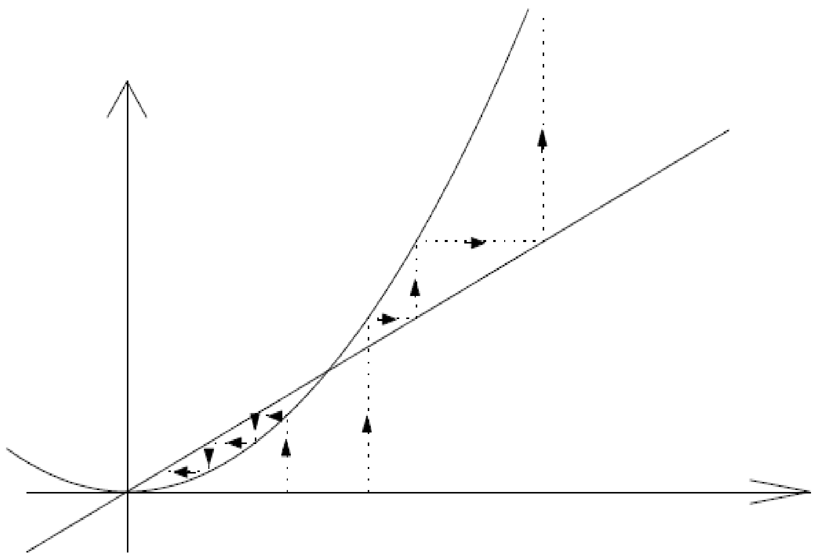


FIGURE 2.4 – Méthode de point fixe pour $g(x) = x^2$

Et si on choisit x_0 exactement 1 on voit que la suite ne converge jamais vers 1 qui est un point fixe instable.

Le théoreme suivant nous donne les conditions de convergence de la suite de la méthode de point fixe.

Théorème 4.4 *Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On se donne $x_0 \in [a,b]$. Si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *$g(x) \in [a,b]$ pour tout $x \in [a,b]$ (condition de stabilité)*

2. Il existe $k \in [0,1[$ tel que $|g((x) - g(y)| \leq k|x-y|$ pour tout $x, y \in [a,b]$ (condition de contraction stricte) (ou bien $|g'(x)| < 1$, $\forall x \in [a,b]$.

Alors

i) g est continue,

ii) g a un et un seul point fixe $\overline{x}$dans $[a,b]$,

iii) la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers $\overline{x}$ pour tout choix de x_0 dans $[a,b]$.

De plus, si x^* est la solution de léquation $g(x) = x$ alors

$$|x^* - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|, \quad n \geq 1. \tag{4.9}$$

Preuve. ***Continuité*** *La condition de contraction stricte implique que g est continue puisque, si on prend une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a,b]$ qui converge vers un élément x de $[a,b]$, alors nous avons $|g(x) - g((y_n)| \leq k|x - y_n|$ et par suite $\lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = g(x)$.*

Existence *La fonction $h(x) = g(x) - x$ est continue dans $[a,b]$ et, d'apès la condition de stabilité, on a $h(a) = g(a) - a \geq 0$ et $h(b) = g(b) - b \leq 0$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que h a au moins un zéro dans $[a,b]$, i.e. g a au moins un point fixe dans $[a,b]$..*

Unicité *L'unicité du point fixe découle de la condition de contraction stricte. En effet, on suppose qu'on a deux points fixes distincts $\overline{x_1}$ et $\overline{x_2}$, alors*

$$|\overline{x_1} - \overline{x_2}| = |g(\overline{x_1}) - g(\overline{x_2})| \leq k|\overline{x_1} - \overline{x_2}| < |\overline{x_1} - \overline{x_2}|$$

ce qui est impossible.

Convergence *On a*

$$0 \leq |x_{n+1} - \overline{x}| = |g(x_n) - g(\overline{x})| \leq k|x_n - \overline{x}|, \quad k < 1.$$

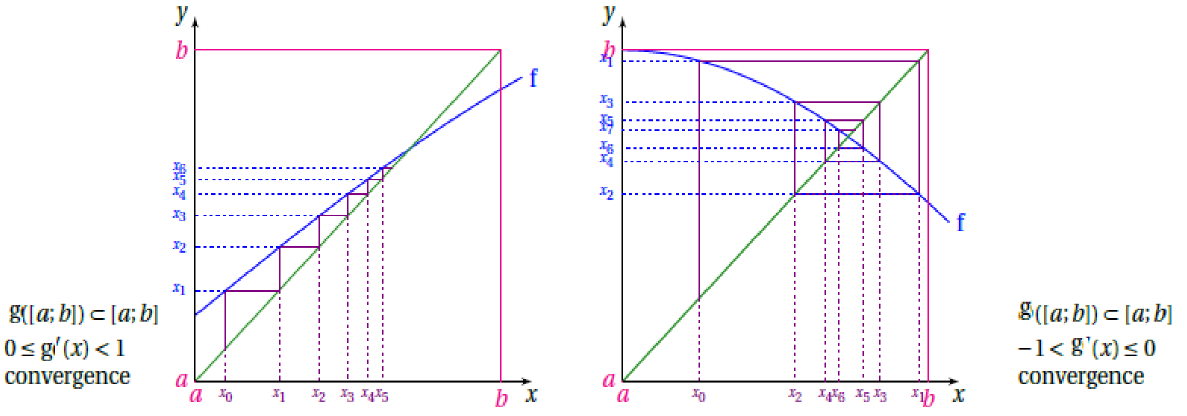
Et par recurrence on obtient

$$|x_{n+1} - \overline{x}| \leq k^{n+1}|x_0 - \overline{x}|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puisque $0 \leq k < 1$, alors

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - \overline{x}| = 0.$$

■



Interprétation géométrique du théorème de point fixe

Exemple 4.3 *Soit l'équation* $e^x - x - 2 = 0$. *On pose* $f(x) = e^x - x - 2$, *alors*

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + x = x \Leftrightarrow e^x - 2 = x$$

ou

$$e^x - x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = x + 2 \Leftrightarrow x = \ln(x+2).$$

Donc on note $g_1(x) = e^x - 2$ *et* $g_2(x) = ln(x+2)$.
D'autre part, on a $f(1) = e - 3 < 0$ *et* $f(2) = e^2 - 4 > 0$, *d'où on prend* $I = [1,2]$.
Maintenant, on vérifie les conditions du théorème de point fixe.

$$1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow e - 2 \leq e^x - 2 \leq e^2 - 2 > 2$$

d'où $g_1([1,2]) \nsubseteq [1,2]$. *Alors la méthode de point fixe diverge.*
Par contre la fonction $g_2([1,2]) \subset [1,2]$ *et* $|g_2'(x)| < k$ *où* $0 \leq k < 1$. *En effet,* $1 < \ln 3 \leq \ln(x+2) \leq \ln 4 < 2$ *pour* $x \in [1,2]$
et $g_2'(x) = \frac{1}{x+2}$ *alors* $g_2'(1) = \frac{1}{3} < 1$ *et* $g_2'(2) = \frac{1}{4} < 1$ *D'autre part,* $g_2''(x) = \frac{-1}{(x+2)^2} < 0$.
Donc $|g_2'(x)| < \frac{1}{3} < 1$. *D'où la méthode de point fixe converge.*
On choisit $x_0 = 1$, *on a*

$$x_1 = g_2(x_0) = \ln 3$$

$$x_2 = g_2(x_1) = \ln(\ln 3 + 2) = 1,1309$$

$$x_3 = g_2(x_2) = 1,143205032$$

On voit que la suite de la méthode de point fixe par la fonction g_2 converge vers le point fixe $\overline{x} \simeq 1,143205$ sur l'intevalle $[1,2]$.

4.4 Exercies

Exercice 1 : *Soit $f(x) = 2x^3 - x - 5$.*

1. *Tracer le graphe de la fonction f.*
2. *Montrer que la fonction f s'annule dans l'intervalle $[1,2]$.*
3. *En utilisant la méthode de Dichotomie dans l'intervalle $[1,2]$ avec une précision de $\varepsilon = 10^{-2}$. Calculer les zéros de cette fonction.*

Exercice 2 : *On veut donner une approximation de la solution de l'équation suivante*

$$\ln x + x = 0.$$

Montrer qu'il n'y a qu'une solution $x_0 \in \mathbb{R}^+$ puis appliquer la méthode de Newton-Raphson sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ pour les cinq premières itérations.

Exercice 3 : *On veut trouver les zéros de la fonction suivante*

$$f(x) = e^{x^2} - 4x^2.$$

1. *Etudier graphiquement l'équation $f(x) = 0$. Et en déduire qu'il y a une racine dans l'intervalle $[0,1]$.*
2. *Etudier la convergence de la suite de la méthode de point fixe et quel est son ordre de convergence.*
3. *Etudier la convergence de la suite de la méthode de Newton en précisant l'ordre de convergence.*
4. *Que peut-on conclure ?*

Exercice 4 : *Soit $A \geq 0$, on considère la suite suivante :*

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(A - x_n), \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

1. *Montrer que si la suite (x_n) converge alors sa limite est soit $\sqrt{A}$ soit $-\sqrt{A}$.*
2. *On suppose que $A \in]0,4[$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $|x_0 - \sqrt{A}| \leq \varepsilon$ alors la suite (x_n) converge vers $\sqrt{A}$.*
3. *Proposer une méthode plus éfficace pour calculer la racine carré de A.*

Exercice 5 : *On cherche de déterminer le zéro de la fonction f définie par*

$$f(x) = 1 - 3e^{-x}$$

.

1. *Rappeler pourquoi f admet un unique zéro sur $\mathbb{R}$ noté $\overline{x}$.*
2. *Calculer $\overline{x}$ directement à partir de l'équation satisfaite par $\overline{x}$.*
3. *L'équation $f(x) = 0$ est équivalente à*

$$\forall \lambda \neq 0, \quad x = x + \lambda f(x).$$

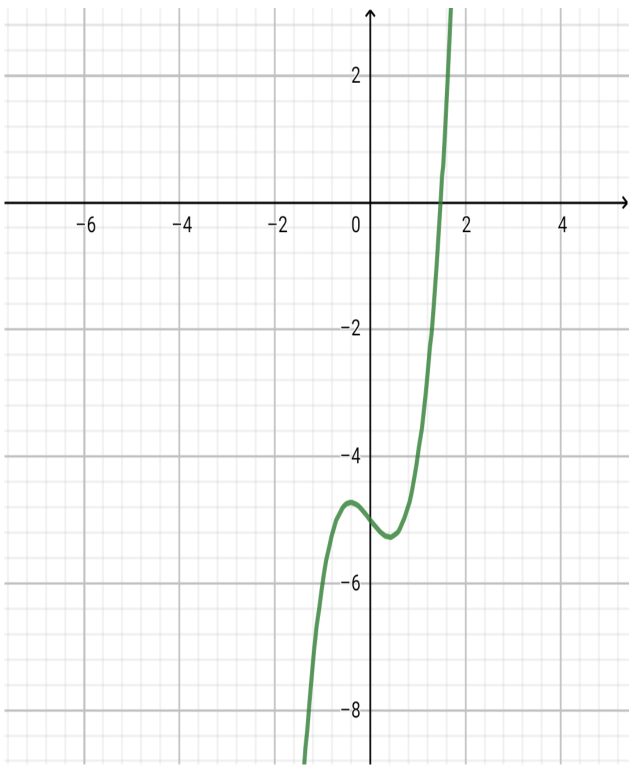
Si on pose $g(x) = x + \lambda f(x)$, on est donc ramené à trouver λ pour que la suite définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ converge.

(a) On prend x_0 dans $[1, 2]$. Touver λ pour que la suite converge et justifier le choix de x_0.

(b) Que peut-on dire de la vitesse de convergence de la suite ?

4.5 Corrigés des exercices

Solution exercice 1 *Soit $f(x) = 2x^3 - x - 5$ une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sur l'intervalle $[1, 2]$ on a $f'(x) = 6x^2 - 1 > 0$ et $f(1) = -4 < 0$, $f(2) = 9 > 0$. D'apès théorème des valeurs intermédiares il existe un unique $c \in]1, 2[$ tel que $f(c) = 0$.*



En appliquant la méthode de dichotomie avec une precision $\varepsilon = 10^{-2}$ *sur* $[1, 2]$. *On calcule d'abord le nombre d'itération. On sait que*

$$n \geq \frac{\ln(\frac{b-a}{\varepsilon})}{\ln 2} - 1$$

avec $a = 1$ *et* $b = 2$. *On obtient* $n \simeq 6$.
Pour $I_0 = [1, 2]$, *on calcule*
$f(\frac{a+b}{2}) = f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4} > 0$,
doù
$I_1 = [1, \frac{3}{2}] = [a_1, b_1]$,
alors
$f(\frac{a_1+b_1}{2}) = f(\frac{5}{4}) = -\frac{75}{32} < 0$,
doù
$I_2 = [\frac{5}{4}, \frac{3}{2}] = [a_2, b_2]$,
alors
$f(\frac{a_2+b_2}{2}) = f(\frac{11}{8}) = -\frac{301}{256} < 0$.
D'où
$I_3 = [\frac{11}{8}, \frac{3}{2}] = [a_3, b_3]$,
alors
$f(\frac{a_3+b_3}{2}) = f(\frac{23}{16}) = -\frac{1017}{2048} < 0$.
D'où
$I_4 = [\frac{23}{16}, \frac{3}{2}] = [a_4, b_4]$,
alors
$f(\frac{a_4+b_4}{2}) = f(\frac{47}{32}) = -\frac{2161}{16384} < 0$.
D'où
$I_5 = [\frac{47}{32}, \frac{3}{2}] = [a_5, b_5]$,
alors
$\overline{x} = \frac{95}{64} \in [\frac{47}{32}, \frac{3}{2}]$.

Solution exercice 2 *La fonction* $f(x) = x + \ln(x)$ *est définie, continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$, *et* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. *Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique* $c \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que* $f(c) = 0$.
Appliquons la méthode de Newton-Raphson sur $I = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$. *La suite de Newton-Raphson est*

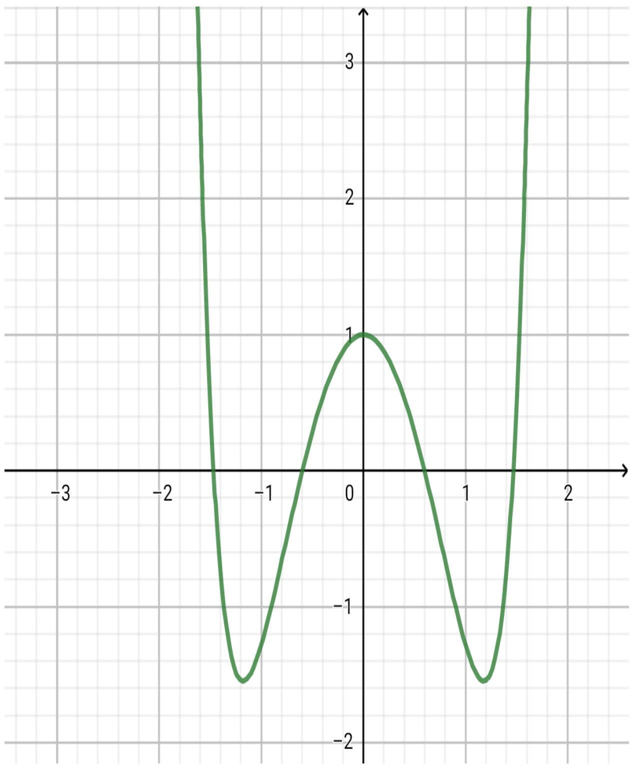
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n + \ln(x_n)}{1 + \frac{1}{x_n}} = \frac{x_n(1 + \ln(x_n))}{1 + x_n}.$$

Avec $x_0 = \frac{1}{2}$ *on obtient*
$x_1 \simeq 0,56438239352$,

$x_2 \simeq 0,567138987716$,
$x_3 \simeq 0,567143290399$,
$x_4 \simeq 0,567143290410$,
$x_5 \simeq 0,5671432904098 \simeq 0,567143290410$.
On remarque que on a 10 décimales exactes avec x_5.

Solution exercice 3

1. Soit $f = e^{x^2} - 4x^2$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On remarque que $f(-x) = f(x)$ c'est-à-dire que la fonction f est paire, donc on peut extraire notre étude sur l'intervalle $[0, +\infty[$.



D'après le graphe de la fonction f on voit que cette fonction a quatre zéros. D'autre part, on a f est continue et $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = e - 4 < 0$. Alors d'apès théorème des valeurs intermédiares

$$\exists c \in]0, 1[, \quad f(c) = 0.$$

2. Etudions la convergence de la suite de point fixe de l'équetion $f(x) = 0$:

$$e^{x^2} - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x = \sqrt{e^{x^2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} e^{\frac{x^2}{2}}.$$

On pose $g(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x^2}{2}}$ qui est $\mathcal{C}^1([0, 1])$. On a

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} e^{\frac{x^2}{2}} \leq \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} < 1$$

d'où $g([0,1]) \subset [0,1]$.

$$|g'(x)| = |\frac{x}{2}e^{\frac{x^2}{2}}| = |xg(x)| < |x| < 1$$

ainsi g *est contractante.*
D'où d'apès théorème de point fixe la suite $x_{n+1} = g(x_n)$, $x_0 \in [0,1]$ *est convergente vers le racine* $c \in]0,1[$. *D'autre part,*

$$g'(c) = cg(c) = c^2 \neq 0$$

alors la méthode de point fixe converge seulement à l'ordre 1.
3.On définit la suite de Newton de la fonction f *comme suit*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n^2} - 4x_n^2}{2x_n e^{x_n^2} - 8x_n} = x_n - \frac{e^{x_n^2} - 4x_n^2}{2x_n(e^{x_n^2} - 4)}.$$

Puisque c est une racine simple de f, *la méthode de Newton est d'ordre* 2.
4. On conclut que la méthode de Newton est plus efficace de la méthode de point fixe.

Solution exercice 4

1. On suppose que x_n *converge vers* $\overline{x}$. *En passant à la limite on trouve l'équation satisfaite par* $\overline{x}$

$$\overline{x} = \overline{x} + \frac{1}{2}(A - \overline{x}^2) \Leftrightarrow \overline{x}^2 = A.$$

D'où $\overline{x} = \pm\sqrt{A}$.
2. On pose $g(x) = x + \frac{1}{2}(A - x^2)$. *Si* $A \in]0,4[$ *et le point fixe* $\overline{x} = \sqrt{A}$ *alors on a* $|g'(\overline{x})| = |1 - \sqrt{A}| < 1$, *et par continuité de* g', *il existe* $\varepsilon > 0$ *et* $k < 1$ *tels que*

$$|g'(x)| < k, \quad \textit{pour tout } x \in [\sqrt{A} - \varepsilon; \sqrt{A} + \varepsilon].$$

On en déduit que pour tous $x, y \in [\sqrt{A} - \varepsilon; \sqrt{A} + \varepsilon]$, *on a*

$$|g(y) - g(x)| = \int_x^y g'(t)dt \leq |y - x| \max_{t \in [\sqrt{A}-\varepsilon; \sqrt{A}+\varepsilon]} |g'(t)| \leq k|y - x|.$$

En prenant $y = \sqrt{A} = g(\sqrt{A})$, *on en conclut que*

$$|\sqrt{A} - g(x)| = |g(\sqrt{A}) - g(x)| \leq k|x - \sqrt{A}| < \varepsilon$$

et donc que $g(x) \in [\sqrt{A} - \varepsilon, \sqrt{A} + \varepsilon]$. *Donc d'après théorème de point fixe on obtient que la suite* x_n *converge vers* $\sqrt{A}$.
3. Prenons maintenant la méthode de Newton pour résoudre l'équation $f(x) = x^2 - A = 0$. *La suite de Newton est*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{x_n^2 + A}{2x_n}.$$

Alors la suite de Newton (x_n) *converge vers* $\sqrt{A}$ *de manière quadratique pour* x_0 *suffisamment proche de* $\sqrt{A}$*. En fait la méthode de Newton converge dans ce cas précis pour tout* $x_0 > 0$*.*

Solution exercice 5

1. La fonction $f = 1 - 3e^{-x}$ *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $f'(x) = 3e^{-x}$*. En plus,* $\underset{x \to -\infty}{f}(x) = -\infty < 0$ *et* $\underset{x \to +\infty}{f}(x) = 1 > 0$*, alors d'après le théorème des valeurs intermédiare il existe un unique* $\overline{x} \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(\overline{x}) = 0$*.*

2. On résolut l'équetion $1 - 3e^{-\overline{x}} = 0$ *on trouve* $\overline{x} = \ln 3$*.*

3. Maintenant, on pose $g(x) = x + \lambda f(x)$*,* $\lambda \neq 0$*.*

$$g'(x) = 1 + 3\lambda e^{-x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(a). On a $f(1) = 1 - \frac{3}{e} < 0$ *et* $f(2) = 1 - \frac{3}{e^2} > 0$ *et* $f'(x) > 0$ *sur* $[1, 2]$ *alors* $\overline{x} \in [1, 2]$ *donc on coisit* x_0 *dans l'intervalle* $[1, 2]$*.*

Pour que la méthode converge on a besoin de garantir $|g'(x)| < 1$ *pour tout* $x \in [1, 2]$*.*

Pour $g'(x) < 1$ *il est nécessaire que* $\lambda < 0$ *et pour que* $g'(x) > -1$ *il faut que* $\lambda > -\frac{2e}{3}$*.*

Ainsi la méthode de point fixe converge si

$$\lambda \in]\frac{-2e}{3}, 0[.$$

(b) Le choix optimal pour λ *(pour la convergence de la suite* x_n*) est celui pour lequel*

$$g'(\overline{x}) = 0 \Leftrightarrow 1 + 3\lambda e^{-\overline{x}} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-e^{\overline{x}}}{3}.$$

Et d'après la formule de Taylor à l'ordre 2 on a

$$\exists c_n \in [1, 2] : \quad g(x_n) = g(\overline{x}) + g'(\overline{x})(x_n - \overline{x}) + \frac{g''(c_n)}{2}(x_n - \overline{x})^2.$$

Et donc, pour $\lambda = \frac{-e^{\overline{x}}}{3}$*, on a* $g(\overline{x}) = \overline{x}$ *et* $g'(\overline{x}) = 0$*. On en déduit que*

$$|x_{n+1} - \overline{x}| \leq \sup_{x \in [1,2]} |g''(x)||x_n - \overline{x}|^2.$$

La méthode est donc d'ordre 2. [amssymb,twoside,12pt]book

Bibliographie

[1] M. Atteia, M. Pradel, Eléments d'analyse numérique, Ceradues-Editions. 1990.

[2] J. Baranger, Introduction à l'analyse numérique, Ed. Hermann 1977.

[3] M. Boumahrat, A. Bourdin, Méthodes numériques appliquées,. Ed. OPU 1983.

[4] J.P. Calvi, Analyse numérique, UPS Université de Toulouse 2011.

[5] Ph. G.Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Dunod, Paris 1998.

[6] F. Curtis., P.O. Gerald Wheatdey, Applied Numerical Analysis, Addison-Wesley Pub. Compagny. 2003.

[7] B. Démodovitch, I. Maron, Eléments de calcul numérique, Ed. Mir Mosco. 1979.

[8] A. Fortin, Analyse numérique pour ingénieurs, Presses internationales polytechnique 1994.

[9] M. Lakrib, Cours d'analyse numérique, Office des publications universitaires OPU 4274, 2016.

[10] P. Lascaux, R. Theodor, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art d'ingénieur, Tomes I et II, Masson, Paris. 1986.

[11] *G. Legendre, Introduction à l'analyse numérique et au calcul scientifique, Dauphine université de Paris 2018*

[12] *G.A. Meurant, G.H. Golub, Résolution numérique des grands systèmes, Ed. Stanford University. 1983.*

[13] *M. Pierre, A. Henrot, Analyse Numérique, Ecole de MINES de Nancy 2013-2014.*