



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا «محمد بوضياف»

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur Et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF

Polycopié

De BOUSMAHA Mohammed
Maitre de conférences

Faculté d'Architecture et de Génie Civil
Département d'Architecture



Cours Simplifiés:
Résistance Des
Matériaux

*** Année 2018-2019 ***

PREFACE

Résistance de matériaux! Destiné aux architectes et ingénieurs en génie civil, est une discipline de base de plusieurs branches de technologie, (RDM) est en constante évolution en fonction des besoins du développement des nouvelles structures dans le domaine de la construction et ouvrages d'art, que ce soit théoriquement ou expérimentalement (technologie des matériaux) ainsi que le l'apogée des logiciels de calculs numérique imposé par le progrès rapide des processeurs et carte mère et la modélisation en 3D.

Chaque chapitre de ce travail comporte les notions fondamentales de la RDM. Consistant du cours et d'applications. L'enseignement de ce module est nécessaire vu qu'il regroupe physique et mathématique, traitent surtout les techniques de calcul de stabilité, résistance et de rigidité et de dimensionnement optimum des éléments de structure. La résistance des matériaux est la base de chaque concepteur ou technicien utilisant ou non les derniers logiciels de calculs, l'introduction de données et l'interprétation des résultats ne peuvent se faire que si l'utilisateur d'un logiciel de calcul a une connaissance de base en RDM.

Cet ouvrage présente en simplifiant pour le lecteur universitaire chaque phénomène qui touche la structure, qui nous amène à comprendre le comportement avant et après chargement de chaque élément de la structure. C'est un support aux étudiants débutants et spécialement à ceux de la deuxième année LMD en architecture.

Je remercie le bon dieu de m'avoir donné la possibilité d'évoluer, ma famille et les collègues qui ont apporté leur aide lors des années d'enseignement de ce module.

L'auteur

مقدمة

مقاومة المواد! المخصص للمهندسين المعماريين والمهندسين في الهندسة المدنية ، هو نظام أساسي لعدة فروع من التكنولوجيا ، (RDM) يتطور باستمرار وفقا لاحتياجات تطوير هياكل جديدة في مجال البناء والهياكل الهندسية ، أن هذا إما نظرياً أو تجريبياً (تكنولوجيا المواد) بالإضافة إلى ذروة برمجيات الحساب الرقمي التي يفرضها التقدم السريع للمعالجات واللوح الأم والنمذجة ثلاثية الأبعاد.

يحتوي كل فصل من هذا العمل على أساسيات RDM. تتكون من الدروس والتطبيقات. تدريس هذه الوحدة أمر ضروري لأنه يجمع بين الفيزياء والرياضيات، وخاصة التعامل تقنيات حساب استقرار وقوة وصلابة والأبعاد الضرورية من العناصر الهيكلية. إن مقاومة المواد هي أساس كل مصمم أو فني يستخدمون أحدث برامج الحساب أو لا، ولا يمكن إجراء إدخال البيانات وتفسير النتائج إلا إذا كان لدى مستخدم برنامج حساب المعرفة الأساسية في RDM.

يقدم هذا الكتاب تبسيط للطالب الجامعي لكل ظاهرة تؤثر على البنية، مما يفودنا إلى فهم السلوك قبل وبعد تحميل كل عنصر من عناصر الهيكل. الكتاب دعم للمبتدئين وخاصة لأولئك من السنة الثانية من LMD في الهندسة المعمارية.

أشكر الله لإعطائي الفرصة للتطور، وعائلتي وزملائي الذين ساعدوا خلال سنوات التدريس.

المؤلف

SOMMAIRE

CH I : INTRODUCTION

<i>Objectif du module</i>	2
I-1 Hypothèse et principes	2
I-2 Conditions d'équilibres:	3
I-3 Modes d'appuis:	3
I-4 Forces extérieures :	3
I-5 Calcul des efforts en utilisant la méthode des sections :	4
I-6 Convention de signe :	4
I-7 Contrainte normale et tangentielle :	5
I-8 Poutre CANTI-LEVERS:	5

CH II : TRACTIONS ET COMPRESSIONS SIMPLES

II-1 Définition de traction (compression) :	9
II-2 Allongement d'une barre (loi de HOOKE):	9
II-2-1 Module d'élasticité:	10
II-2-2 Coefficient de POISSON :	11
II-2-3 Allongement dû au poids propre de la barre:	11
II-3 Diagramme de traction :	12
II-4 Contrainte admissible :	12
II-5 Système hyperstatique:	13

CH III : CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS.

III-1 Moment statique d'une section:	15
III-2 Centre de gravité :	15
III-3 Moment d'inertie :	16
III-3-1 Moment d'inertie polaire d'une surface plane :	16
III-3-2 Rotation d'axe :	16
III-3-3 Axes principaux :	17
III-4 Axes centraux principaux :	17

CHIV: Flexion simple.

Définition:	21
IV-1 Convention de signes du moment de flexion et de l'effort tranchant:	21
IV-2 Relation entre M, T et l'intensité de la charge:	21
IV-3 Contraintes normales et choix des dimensions de sections droites d'une poutre:	22
IV-4 Contraintes tangentielles et vérification de la résistance :	24
IV-5 Déformation des poutres fléchis :	25
IV-5-1 Méthode par double intégration:	26
IV-5-2 Méthode des paramètres initiaux:	27
IV-5-3 Méthode graphique: (méthode de Mohr)	28

CH V : Flexion déviée.

Introduction :	31
V-1 Contraintes :	31
V-2 Axes neutres :	31

**CH VI :
Flexion composée.**

Définition :	35
VI-1 Contraintes normales:	35
VI-2 Axes neutres AN :	35
VI-3 Traction excentrée :	35
VI-4 Contrainte normale maximale :	36
VI-5 Noyau central :	36
VI-6 Construction du noyau central d'une section	36

**CH VII :
Flambement.**

Définition :	38
VII-1 Elancement :	38
VII-2 Calcul de la charge critique d'Euler :	39
VII-3 Contrainte critique d'Euler :	39
VII-4 Formule de Rankine :	40

**CH VIII :
Treillis isostatique.**

Définition :	45
IX-1 Hypothèses de calculs :	45
IX-2 Système isostatique :	45
IX-3 Calculs des efforts dans les barres :	45
IX-3-1 Méthode des nœuds :	45
IX-3-2 Méthode des sections :	47
IX-3-3 Méthode graphique :	47

**CH IX :
Assemblage boulons ordinaires, HR.**

Définition :	50
IX-1 Disposition des boulons:	50
IX-2 Principe d'assemblage par boulons :	51
IX-3 Bases de Calculs :	51
A- calcul des boulons au cisaillement :	51
B- calcul des boulons à la pression diamétrale :	52
C - calcul des boulons à la traction :	52

**CH X :
Stabilité des structures en refends (étude de la torsion).**

Définition :	55
XI-1 Détermination de la distribution des efforts horizontaux:	55
1-1 Hypothèses :	55
1-2 Effort de translation:	55
X-2 Détermination de la distribution des efforts de torsion:	57
2-1 Détermination du centre de torsion :	57
2-2 Détermination des Efforts de torsion de chaque mur:	58

**CH XI : EXERCICES.
Références bibliographique.**

Liste des figures :**CH I :
INTRODUCTION.**

Fig.I.1 Schéma et réaction d'appuis	3
Fig.I.2 Représentation d'une barre sous effet de charge	3
Fig.I.3 Coupes virtuelle sur la section droite d'une barre	4
Fig.I.4 Coupes virtuelle en 2D sur la section droite d'une barre	4
Fig.I.5 Représentation des Efforts en utilisant la méthode des sections	4
Fig.I.6 Représentation contraintes en utilisant la méthode des sections	5
Fig.I.7 Schéma d'une poutre Canti-Levers	5
Fig.I.8 Schéma d'une poutre Canti-Levers isostatique	5
Fig.I.8 Schéma de Conditions pour placer les articulations	5

**CH II :
TRACTIONS ET COMPRESSIONS SIMPLES.**

Fig.II.1 Une barre soumise à un effort suivant son axe neutre	9
Fig.II.2 Représentation de l'effort normal avec la méthode des sections	9
Fig.II.3 Représentation de la contrainte normale avec la méthode des sections	9
Fig.II.4 Représentation de l'allongement après chargement	9
Fig.II.5 Etude de l'allongement longitudinal d'une barre	10
Fig.II.6 Diagrammes résultant efforts, contraintes, allongement	10
Fig.II.7 Représentation de l'allongement d'une barre	11
Fig.II.8 Etude de l'allongement dû au poids propre	12
Fig.II.9 Diagramme de traction	12
Fig.II.10 Déformation d'une barre en plasticité	12
Fig.II.11 Exemple d'étude en hyperstatique	13

**CH III :
CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS.**

Fig.III.1 Moment statique d'une section droite	15
Fig.III.2 Centre de gravité d'une section droite	15
Fig.III.3 Etude d'une section droite en T	16
Fig.III.4 Moment d'inertie d'une section droite	16
Fig.III.5 Moment d'inertie d'une section droite circulaire	16
Fig.III.6 Rotation d'axes d'une section droite circulaire	16
Fig.III.7 Exemple d'une section triangulaire	18

**CHIV:
Flexion simple.**

Fig.IV.1 Schéma de charge sur une barre	21
Fig.IV.2 Convention de signe du moment fléchissant	21
Fig.IV.3 Convention de signe de l'effort tranchant	21
Fig.IV.4 Schéma statique de chargement uniforme d'une barre	21
Fig.IV.5 Exemple d'étude 1	22
Fig.IV.6 Etude de la résistance d'une barre due à une charge concentrée	22
Fig.IV.7 Exemple d'étude 2	23
Fig.IV.8 Exemple d'étude 3	27
Fig.IV.9 Schéma de charge sur une barre	28
Fig.IV.10 Schéma des conditions aux limites	29
Fig.IV.11 exemple d'étude 4	29

**CH V :
Flexion déviée**

Fig.V.1 Schéma statique et application d'une charge inclinée	31
Fig.V.2 Exemple 1	31

**CH VI :
Flexion composée.**

Fig.VI.1 Application d'une force excentrée sur une barre	35
Fig.VI.2 Localisation de l'axe neutre	36
Fig.VI.3 Localisation contraintes max	36
Fig.VI.4 Construction du noyau central	36
Fig.VI.5 Noyau central d'un rectangle	37

**CH VII :
Flambement.**

Fig.VII.1 Schéma statique d'un cas de flambement	39
Fig.VII.2 Représentation de la longueur de flambement	39
Fig.VII.3 Exemple d'étude 1	40
Fig.VII.4 Exemple d'étude 2	41
Fig.VII.5 Exemple d'étude 3	42

**CH VIII :
Treillis isostatique.**

Fig.VIII.1 Schéma de montage de treillis	45
Fig.VIII.2 Exemple 1	46
Fig.VIII.3 Exemple 2	47

**CH IX :
Assemblage boulons ordinaires, HR.**

Fig.IX.1 Représentation en plan de la disposition des boulons	50
Fig.IX.2 Représentation de dimensions de recouvrement	51
Fig.IX.3 Montage de plusieurs plaques	52
Fig.IX.4 Représentation de la force F sur un boulon	52
Fig.IX.5 Jonction de deux éléments avec plaques couvre joint	53

**CH X :
Stabilité des structures en refends (étude de la torsion).**

Fig.X.1 Représentation de la disposition des forces sur 2 refends	55
Fig.X.2 Représentation de la disposition des forces sur plusieurs refends	55
Fig.X.3 Schématisation des forces sur plusieurs ressorts.	56
Fig.X.4 Exemple de disposition de mur voiles.	57
Fig.X.5 Représentation des réactions de chaque mur voile	58
Fig.X.6 Représentation des déplacements de chaque mur	58

Chapitre I

CHAPITRE I: INTRODUCTION

Objectif du module:

La résistance des matériaux (R.D.M) a pour but l'étude de la résistance, de la rigidité et de la stabilité des constructions. Elle constitue l'outil indispensable pour l'ingénieur constructeur afin de réaliser des ouvrages économiques sans se déformer excessivement sous l'effet des sollicitations appliquées.

On peut aussi dire que la résistance des matériaux ou la mécanique des matériaux, est une branche de la mécanique appliquée pour étudier le comportement des corps solides sous l'action des différents types de charges. Elle traite (non seulement sous effets de charges qui leurs sont appliquées) le calcul de la capacité des structures et de ses éléments à supporter sans subir de destruction, ou une déformation tolérée, mais aussi une présentation des critères de base pour la conception des structures (forme, dimensions,...), introduisant l'utilisation des matériaux dans les meilleurs conditions de sécurité et d'économie. La résistance des matériaux est basée sur les résultats théoriques de la mécanique et les propriétés des matériaux.

Les limites de la résistance des matériaux sont celles imposées par ses hypothèses mêmes. Les disciplines connexes telles que la théorie d'élasticité, de la plasticité ou la méthode des éléments finis se libèrent de certaines de ces contraintes.

Enfin, et de façon générale, la mécanique = étude des effets d'actions extérieures sur des solides et fluides. Choix d'une modélisation = fonction de l'application de la physique et mathématiques, des objectifs visés, des hypothèses fixées...

RDM = Etude des déformations, déplacements et contraintes d'objets de forme simple.

Dans le cadre de ce cours. En mécanique des solides déformables des poutres, il faut prendre en considération :

- *Les déplacements relatifs entre points d'un solide (notion de déformations)*
- *Les efforts intérieurs associés (notion de contraintes)*

L'objectif est de déterminer par le calcul, les éléments de structures :

- *Dimensionner ces pièces (objectifs d'économie)*
- *Vérifier leur tenue mécanique (déformations / contraintes limites imposées)*

I-1 Hypothèse et principes:

La RDM se base sur les hypothèses suivantes :

1. Homogénéité des matériaux: les matériaux sont considérés comme homogènes, isotropes et continus.
2. Hypothèse sur les formes : les solides étudiés sont assimilables à des poutres (de sorte que la longueur est très supérieure à sa largeur et à sa hauteur).
Pas de variation brusque.
3. Hypothèse des petites perturbations HPP: les déplacements et les déformations de la poutre sont supposés très petits par rapport aux dimensions de la section droite.
4. Hypothèse de NAVIER et BERNOULLI : les sections droites, planes et

perpendiculaires restent planes et perpendiculaires après déformation.

5. Hypothèse de SAINT VENANT : les contraintes et les déformations dans une section éloignée ne dépendent que des résultantes des forces extérieures.

Note : Le schéma de calcul est la base de toute étude en RDM, car il est absolument impossible de résoudre un problème de construction réelle (multiplicité de ces propriétés).

I-2 Conditions d'équilibres:

II La somme des forces égale à zéro. $\sum \vec{F} = 0$

III La somme moments égale à zéro. $\sum \vec{M}_F = 0$

III-1 Modes d'appuis:

Il existe trois modes voir figure 1 :

- Appui simple ou mobile (sans frottement).
- Appui double.
- Encastrement.

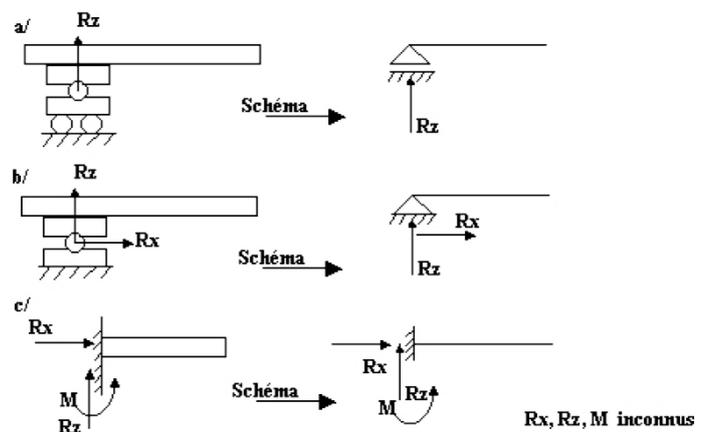


Fig.I.1 Schéma et réaction d'appuis.

III-2 Forces extérieures :

Il y a plusieurs type de forces, telles que les forces extérieure, les réactions, forces volumiques (poids propre d'un corps) ainsi que les forces superficielles (concentrées ou réparties uniformément ou pas).

Si on considère un solide en forme de barre, F_1, F_2, \dots, F_n force extérieur.

(s) est en équilibre (figure 2).

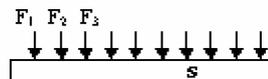


Fig.I.2 Représentation d'une barre sous effet de charge.

Pour déterminer les forces intérieures, il est nécessaire de considérer une coupe fictive du solide (la barre) par un plan perpendiculaire. Sachant que "R" est la résultante des forces intérieures, il est plus commode de décomposer M et R suivant les axes ox, oy, oz :

R	N_x effort normale suivant ox . Q_y effort tranchant suivant oy Q_z effort tranchant suivant oz .
M	M_x moment de torsion par rapport à ox . M_y moment de flexion par rapport à oy . M_z moment de flexion par rapport à oz .

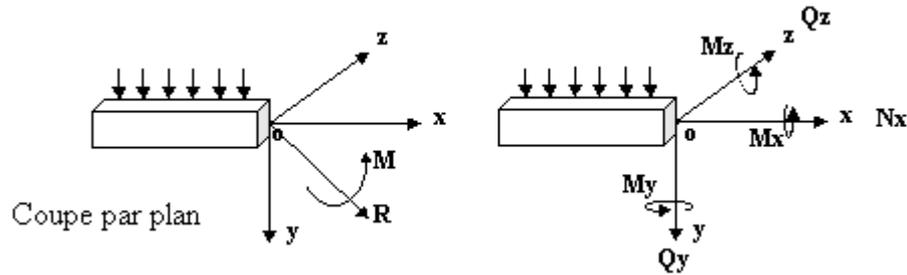


Fig.I.3 Coupes virtuelle sur la section droite d'une barre.

Cas particulier :

Suivant le plan xoz (2D). Les sollicitations (N_x , Q_z , M_z) sont non nulles.

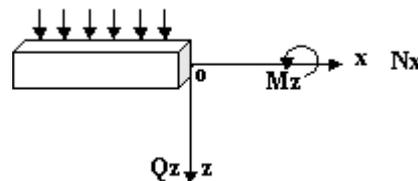


Fig.I.4 Coupes virtuelle en 2D sur la section droite d'une barre.

III-3 Calcul des efforts en utilisant la méthode des sections :

Pour déterminer les efforts intérieurs, il est possible d'étudier les résultats obtenus d'une coupe virtuelle de la barre à une distance inconnue x de l'appui en considérant la partie gauche ou droite de la coupe.

La partie gauche :

Les inconnus sont (Q_y , M_y , N_x)

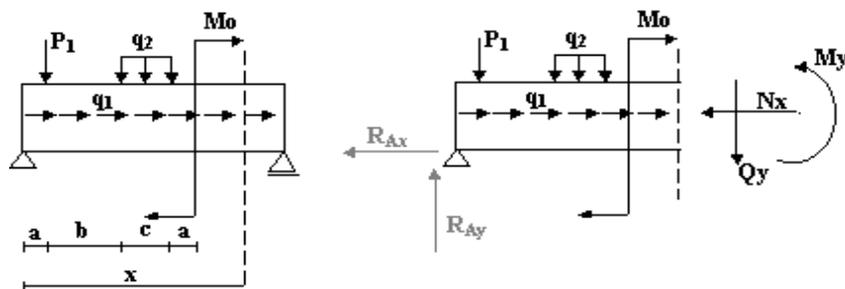


Fig.I.5 Représentation des Efforts en utilisant la méthode des sections.

$$\sum F_{/y}=0 \Rightarrow Q_y - R_{ay} + P_1 + q_2 \cdot c = 0 \quad Q_y = R_{ay} - P_1 - q_2 \cdot c$$

$$\sum M_{/F}=0 \Rightarrow M_y = R_{ay} \cdot x + P_1(x-a) + q_2 \cdot c \cdot (x-a-b-c/2) + M_0$$

$$\sum F_{/x}=0 \Rightarrow N_x - q_1 \cdot x + R_{ax} = 0$$

$$N_x = q_1 \cdot x - R_{ax}$$

III-4 Convention de signe :

1. L'effort normal : N_x est positif lorsqu'il est dirigé vers l'extérieur de la section.
2. L'effort tranchant Q_y : positif lorsqu'il tend à faire tourner un élément de longueur d_x dans le sens de l'aiguille d'une montre.
3. Moment fléchissant M : est positif s'il provoque la traction des fibres inférieures du solide.

III-5 Contrainte normale et tangentielle :

Dans le cas d'étude une section de petite envergure, Δs est la section d'influence (la surface afférente) de Δp la résultante des efforts intérieurs.

La limite de cette résultante par la section lorsque cette dernière tend vers zéro est appelée contrainte :

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta s} = \sigma$$

Il est possible décomposer σ en deux composantes l'une verticale et l'autre tangentielle.

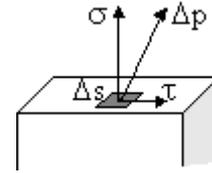


Fig.I.6 Représentation contraintes en utilisant la méthode des sections.

III-6 Poutre CANTI-LEVERS :

Une poutre CANTI-LEVERS est une poutre droite reposante sur plusieurs appuis, divisée en plusieurs tronçons au moyen des articulations de façon à ce que la poutre soit isostatique.

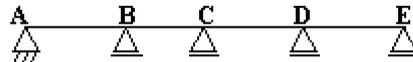


Fig.I.7 Schéma d'une poutre Canti-Levers.

$d = r - 2 = 5 - 2 = 3$ fois hyperstatiques.

(d : Degré hyperstatique, r : Nombre d'inconnues, 2 nombres d'équations).

Pour rendre cette poutre isostatique, il faut trois articulations tout en respectant les conditions d'emplacement (voir conditions pour placer les articulations), le but est d'avoir trois conditions supplémentaires dont le moment au niveau de chaque articulation est égal à zéro.

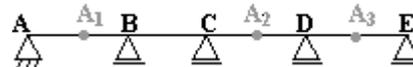


Fig.I.8 Schéma d'une poutre Canti-Levers isostatique.

Les trois conditions supplémentaires sont:

$$\sum_A^{A_1} M_{A_1} = 0, \quad \sum_A^{A_2} M_{A_2} = 0, \quad \sum_A^{A_3} M_{A_3} = 0$$

Conditions pour placer les articulations:

Quatre conditions doivent être vérifiées :

1. Il est interdit d'avoir deux articulations dans la première et/ou la dernière travée, sauf dans le cas d'encastrement.
2. Il est interdit d'avoir plus de deux articulations dans les travées intermédiaires.
3. Il est interdit d'avoir deux articulations dans deux travées intermédiaires et successives.
4. Il est interdit d'avoir une articulation dans la première ou la dernière travée si la travée d'à côté a deux articulations.

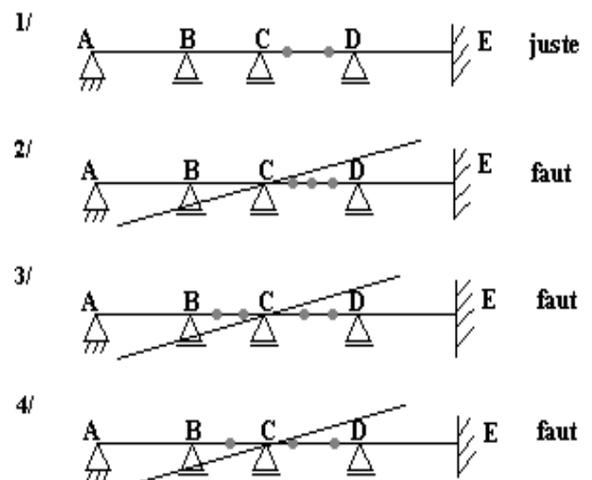
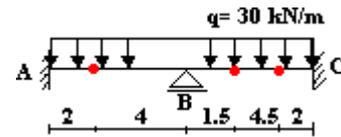


Fig.I.9 Schéma de Conditions pour placer les articulations.

Exemple :

Calculer les réactions en A, B, C

**Solution :**

Sachant que le degré d'hyperstatique **d** de la structure est égal à :

$$d = 5 - 2 = 3 \text{ fois hyperstatique.}$$

Pour que la structure redevienne isostatique, il faut rajouter 03 articulations (03 nœuds) supplémentaires et cela pour avoir les équations manquantes.

En coupe la poutre au niveau des articulations D, E, F

1. EF

$$\sum V_i = 0$$

$$V_E + V_F - q \cdot l = 0$$

$$V_E + V_F - 30 \cdot 4,5 = 0$$

$$V_E + V_F = 135 \text{ kN}$$

$$\sum M_{E/v_i} = 0,$$

$$V_F \cdot 4,5 - \frac{q \cdot l^2}{2} = 0,$$

$$V_F = 67,5 \text{ kN}$$

Donc :

$$V_E = 67,5 \text{ kN}$$

2. FC

$$\sum V_i = 0,$$

$$V_C - V_F - q \cdot l = 0$$

$$V_C - V_F - 30 \cdot 2 = 0$$

$$V_C = 127,5 \text{ kN}$$

$$M_C - V_F \cdot 2 - 30 \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

$$M_C = 195 \text{ kN/m}$$

3. DBE

$$\sum V_i = 0,$$

$$V_D + V_B - V_E - q \cdot l = 0$$

$$V_D + V_B - V_E - 30 \cdot 5,5 = 0$$

$$V_D + V_B = 232,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_{D/v_i} = 0,$$

$$V_E \cdot 5,5 + \frac{q \cdot l^2}{2} - V_B \cdot 4 = 0,$$

$$V_B = 206,25 \text{ kN}$$

Donc:

$$V_D = 26,25 \text{ kN}$$

4. AD

$$\sum V_i = 0,$$

$$V_A - V_D - q \cdot l = 0$$

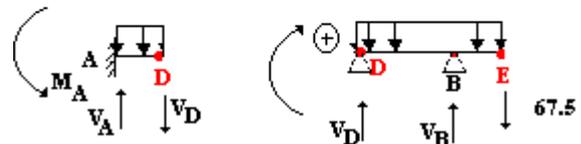
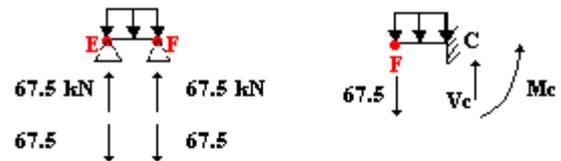
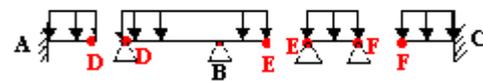
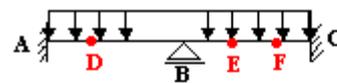
$$V_A - V_D - 30 \cdot 2 = 0$$

$$V_A = 86,25 \text{ kN}$$

$$\sum M_{A/v_i} = 0,$$

$$V_D \cdot 2 + \frac{q \cdot l^2}{2} - M_A = 0,$$

$$M_A = 112,5 \text{ kN/m}$$



Vérification :

$$\sum V_i = 0,$$

$$V_A + V_B + V_C - 30.14 = 0 \text{ (Vérifier)}$$

Chapitre II

CHAPITRE II: TRACTIONS ET COMPRESSIONS SIMPLES

II-1 Définition de traction (compression) :

Une barre est soumise à la traction (compression) lorsqu'elle soumise à deux forces opposées, qui tendent à l'allonger.

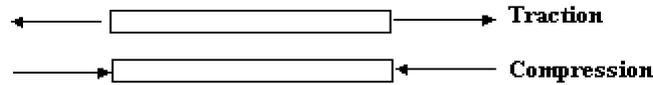


Fig.II.1 Une barre soumise à un effort suivant son axe neutre.

Pour déterminer l'effort normal dans une barre, il est nécessaire d'utiliser la méthode des sections. Dans le cas d'une barre homogène, on suppose que les forces intérieures sont uniformément réparties dans toute la section alors que la contrainte normale est la même par tous les points de la section.

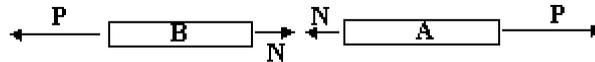


Fig.II.2 Représentation de l'effort normal avec la méthode des sections.

Avec l'étude du tronçon A, il est à noter que :

La masse (le poids) de la barre est négligée devant P.

Le tronçon a été soumis à la force P et à l'action du tronçon B forces intérieures qui se traduit par :

$$N = \sum \sigma \cdot \Delta s = \sigma \cdot \sum \Delta s = \sigma \cdot S$$

σ : étant la contrainte normale.

N : désigne l'effort normal appliqué au centre de gravité de S.

$$\sum F_{xi} = 0 \Rightarrow N - P = 0$$

$$N = P = \sigma \cdot S$$

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{P}{S}$$

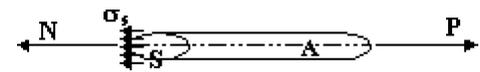


Fig.II.3 Représentation de la contrainte normale avec la méthode des sections.

II-2 Allongement d'une barre (loi de HOOKE):

Les dimensions d'une barre tendue (comprimé) varient en fonction de la grandeur des forces appliquées.

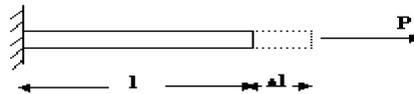


Fig.II.4 Représentation de l'allongement après chargement.

Supposant que :

avant de placer la charge, la longueur de la barre est **l**. Après chargement, la longueur est devenue **l+Δl**.

Δl : Allongement absolue de la barre.

Pour la barre chargée, l'état de contrainte est homogène, la déformation ϵ suivant l'axe de la barre est par tout la même égale à :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

ε : allongement relatif.

Dans le cas des allongements petits pour la plus part des matériaux on utilise la loi de Hooke. Cette dernière exprime la dépendance linéaire entre les contraintes et les déformations $\sigma = \varepsilon \cdot E$.

II-2-1 Module d'élasticité:

Dans le cas d'un état de contrainte non homogène, on détermine la déformation de la section A:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{N}{S} = \frac{P}{S}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dz)}{dz}$$

$$\sigma = \frac{N}{S} = \varepsilon \cdot E = \frac{\Delta(dz)}{dz} \cdot E \Rightarrow \Delta(dz) = \frac{N}{E \cdot S} dz$$

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{E \cdot S} dz$$

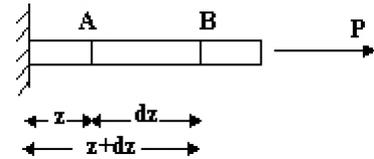


Fig.II.5 Etude de l'allongement longitudinal d'une barre.

Lorsque la barre est chargée seulement en ces extrémités $N=P$ ne dépend pas de z , on déduit :

$$\Delta l = \frac{P}{E \cdot S} \cdot \int_0^l dz = \frac{P}{E \cdot S} \cdot l$$

Si on tient compte en plus des allongements dus à la variation de la température, on se sert de la méthode de superposition pour une barre uniformément chargée en ses extrémités et uniformément chargée, on a :

$$\Delta l = \frac{P}{E \cdot S} \cdot l + \alpha \cdot l \cdot \Delta \theta$$

α : coefficient de dilatation thermique du matériau.

Exemple :

Soit les barres suivantes, représenter le diagramme des efforts, contraintes, allongements.

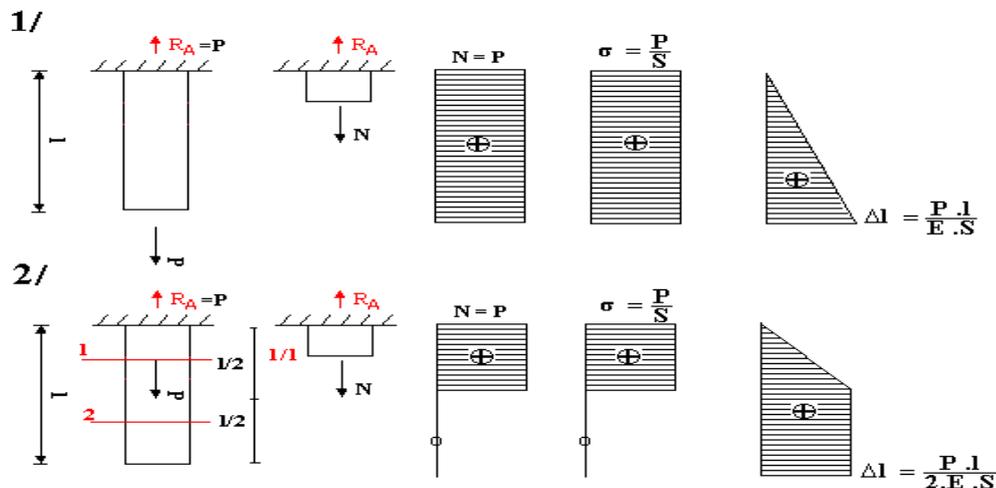


Fig.II.6 Diagrammes résultant efforts, contraintes, allongement.

Section 1-1 :

$$N_1 = P = R \Rightarrow \Delta l = \frac{P}{2.E.S} . l$$

Section 2-2 : $N_2 = P - R = 0 \Rightarrow \Delta l = 0$

II-2-2 Coefficient de POISSON :

Le coefficient de poisson caractérise les propriétés du matériau et il se détermine expérimentalement par :

$$\nu = \frac{\epsilon_{\text{transversal}}}{\epsilon_{\text{longitudinal}}}$$

Sachant que :

$$\epsilon_{\text{Transversal}} = \frac{\Delta a}{a}$$

$$\epsilon_{\text{Longitudinal}} = \frac{\Delta l}{l}$$



Fig.II.7 Représentation de l’allongement d’une barre.

Remarque :

Le coefficient de poisson ν est sans unité. Pour les métaux, il est de : $0.35 \geq \nu \geq 0.25$.

II-2-3 Allongement dû au poids propre de la barre:

On peut constater ce phénomène grâce à l’effet de la gravitation terrestre. Si on suppose que la barre utilisée a les caractéristiques suivantes :

Longueur l .

Surface S .

Poids spécifique γ .

$P(z) = \gamma . S . z$ est la force due au poids propre de la barre. La contrainte normale est obtenue de:

$$\sigma_z = \frac{P(z)}{S} = \frac{\gamma . z . S}{S} = \gamma . z$$

$$\sigma_z = \gamma . z \text{ et } \sigma_z = \epsilon . E \Rightarrow \epsilon . E = \gamma . z \quad (1)$$

Et puisque :

$$\epsilon . E = \frac{d(dz)}{dz} . E \quad (2)$$

Alors :

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \frac{d(dz)}{dz} = \frac{\gamma . z}{E}$$

De ce fait :

$$d(dz) = \frac{\gamma . z}{E} . dz$$

$$\int_0^l d(dz) = \int_0^l \frac{\gamma . z}{E} . dz$$

$$\Delta l = \frac{\gamma}{E} . \frac{l^2}{2} . S$$

En fin :
$$\Delta l = \frac{P}{2.E.S} . l$$

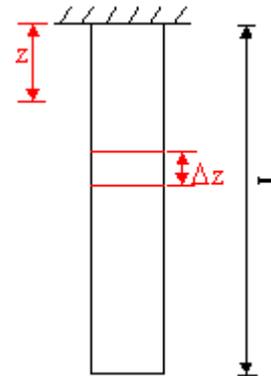


Fig.II.8 Etude de l’allongement dû au poids propre.

II-3 Diagramme de traction :

Si on applique une traction à une barre d'acier doux, on constate qu'on a obtenu quatre zones d'études de la fonction contrainte allongement.

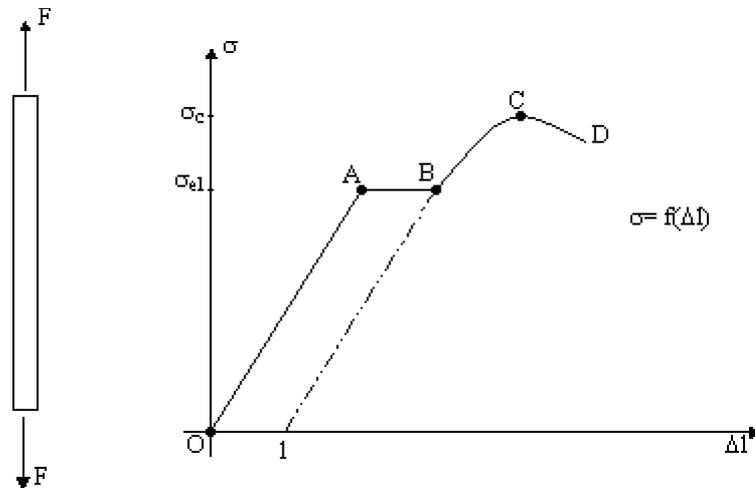


Fig.II.9 Diagramme de traction.

1. **Zone OA** : Dans ce domaine, la fonction contrainte déformation du matériau suit la loi de Hooke.

OA est une droite : $\sigma = 0 \Rightarrow \Delta l = 0$.

Si on décharge l'acier, la barre reprend sa dimension initiale. La contrainte limite est appelée contrainte limite élastique.

2. **Zone AB** : C'est la zone d'écoulement plastique du matériau qui est suivant un quasi- palier, l'allongement de la pièce augmente malgré que la charge reste constante.

3. **Zone BC** : la pièce dans cette zone répond dans le domaine élastique mais lorsqu'on décharge l'allongement ne disparaît pas, le résultat est un allongement résiduel permanent (OI). Lorsqu'on fait croître la charge dans cette zone, des contractions transversales apparaissent en divers points dans la pièce.

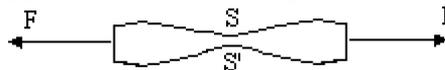


Fig.II.10 Déformation d'une barre en plasticité.

Dans une section SS' de moindre résistance, un col se forme de la dimension de la section, il s'accroît simultanément avec l'augmentation de l'allongement.

4. **Zone CD** : on constate que l'allongement augmente pour des charges inférieures à la valeur maximale σ_c (contrainte de rupture): C'est le phénomène de striction. Pour une valeur de la charge plus faible que σ_c il y a une rupture de l'éprouvette.

II-4 Contrainte admissible :

σ_A : contrainte limite élastique. C'est la contrainte maximale qui n'entraîne pas de déformation résiduelle.

$$\sigma_A = \sigma_{el}$$

σ_c : contrainte de rupture. Elle est égale au rapport de la plus grande force que peut supporter la barre par l'aire de la section droite initiale, $\sigma_c = \sigma_u$.

En pratique, il importe de fixer la contrainte maximale qu'une pièce pourra supporter sans risque de rupture ni de déformation inacceptable. Cette contrainte maximale est

appelée contrainte admissible $\bar{\sigma}$ pour la traction et $\bar{\sigma}'$ pour la compression. Elle est définie par rapport à la contrainte limite élastique soit par rapport à la contrainte limite de rupture (le choix se porte sur la contrainte la plus facile à mesurée).

$$\bar{\sigma} = \rho_1 \cdot \sigma_{\text{él}}$$

Ou bien,

$$\bar{\sigma} = \rho_2 \cdot \sigma_u$$

Sachant que ρ_1, ρ_2 coefficients de pondération. $\rho_1 < 1, \rho_2 < 1$

ρ_1, ρ_2 dépendent de la nature du matériau, du mode de sollicitation et des caractéristiques géométriques de la section.

Exemple : Pour l'acier :

$$\frac{1}{2} \cdot \sigma_{\text{él}} < \bar{\sigma} < \frac{2}{3} \sigma_{\text{él}} \quad \text{Ou bien,} \quad \frac{1}{5} \cdot \sigma_u < \bar{\sigma} < \frac{1}{3} \sigma_u$$

Il faut donc vérifier d'une façon générale (dans la section la plus sollicitée), la contrainte maximale qui se développe doit être inférieure à la contrainte admissible.

$$\sigma_{\text{max}} < \bar{\sigma} \quad \text{En traction.}$$

$$\sigma'_{\text{max}} < \bar{\sigma}' \quad \text{En compression.}$$

La dimension nécessaire de la surface **S** d'une section droite d'une barre en traction ou en compression est choisie d'après la formule suivante :

$$\bar{\sigma} \geq \frac{N_{\text{max}}}{S} \Rightarrow S \geq \frac{N_{\text{max}}}{\bar{\sigma}} \text{ ou bien } S_{\text{nécessaire}} = \frac{N_{\text{max}}}{\bar{\sigma}}$$

II-5 Système hyperstatique:

Le système est appelé hyperstatique dans le cas où le nombre d'inconnues dépasserait le nombre d'équations $n_i > n_e$.

Pour résoudre un système hyperstatique, il est nécessaire d'avoir les équations de la statique et les équations de compatibilité des déplacements.

Exemple :

Déterminer R_A, R_B

$$n_i = 2.$$

$$n_e = 1.$$

$n_i > n_e$ système 1 fois hyperstatique ($n_i - n_e = 1$).

$$R_A + R_B = P \quad \dots (1).$$

$$\Delta l_t = \Sigma \Delta l = 0.$$

Après chargement, il est noté que la section I est tracté.

II est comprimé.

$$\Delta l_t = 0 \Rightarrow \Delta l_I = \Delta l_{II}.$$

$$\frac{R_A \cdot l}{3 \cdot E \cdot S} = \frac{R_B \cdot 2 \cdot l}{3 \cdot E \cdot S}$$

$$\Rightarrow R_A = 2 \cdot R_B \quad \dots (2)$$

De (1) et (2) on peut avoir :

$$2 \cdot R_B + R_B = P \Rightarrow R_B = \frac{1}{3} P \quad \text{et} \quad R_A = \frac{2}{3} P$$

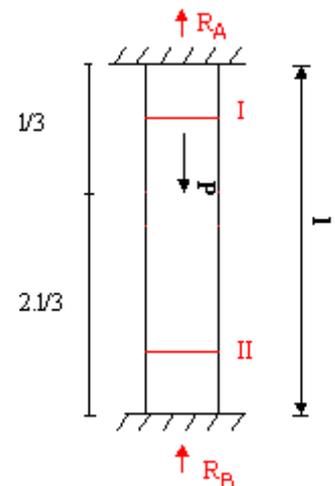


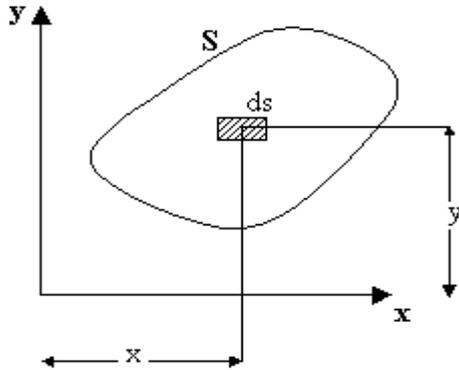
Fig.II.11 Exemple d'étude en hyperstatique

Chapitre III

CHAPITRE III: CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS.

III-1 Moment statique d'une section:

Le moment statique d'une surface par rapport un axe situé dans son plan égale au produit de la surface par la distance du centre de gravité à l'axe.



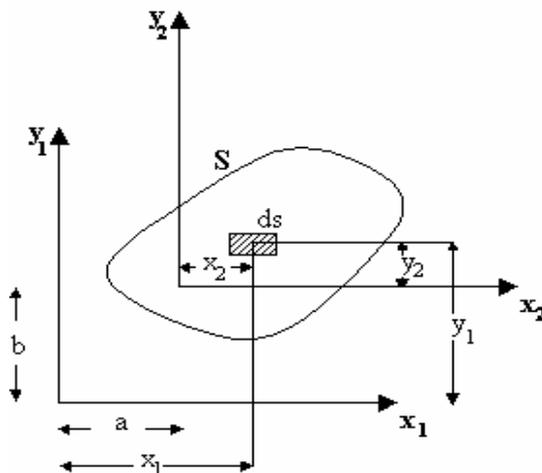
$$\text{Le moment statique/x} = M_{Sx} = \int_S y \cdot ds$$

$$\text{Le moment statique/y} = M_{Sy} = \int_S x \cdot ds$$

Fig.III.1 Moment statique d'une section droite.

La dimension du moment statique est [cm³] ou bien [m³].

III-2 Centre de gravité :



$$x_2 = x_1 - a$$

$$y_2 = y_1 - b$$

On a :

$$M_{Sx_2} = \int_S y_2 \cdot ds = \int_S (y_1 - b) \cdot ds = \int_S y_1 \cdot ds - b \cdot S$$

Donc :

$$M_{Sx_2} = M_{Sx_1} - b \cdot S$$

Et par analogie :

$$M_{Sy_2} = M_{Sy_1} - a \cdot S$$

Fig.III.2 Centre de gravité d'une section droite.

Par conséquent. Lorsqu'on translate parallèlement les axes, le moment statique varie d'une quantité égale au produit de la surface par la distance entre les axes.

Supposant que les axes x_2, y_2 sont des axes principaux, x_2, y_2 passent par le centre de gravité (CG) donc :

$$M_{Sx_2} = M_{Sx_1} - b \cdot S = 0 \quad b = \frac{M_{Sx_1}}{S} = Y_G$$

$$M_{Sy_2} = M_{Sy_1} - a \cdot S = 0 \quad a = \frac{M_{Sy_1}}{S} = X_G$$

X_G, Y_G sont les coordonnées du centre de gravité de la section par rapport aux axes x_1, y_1 . D'une manière générale les coordonnées du centre de gravité sont données par les équations suivantes:

$$Y_G = \frac{\sum y_i S_i}{\sum S_i} \quad X_G = \frac{\sum x_i S_i}{\sum S_i}$$

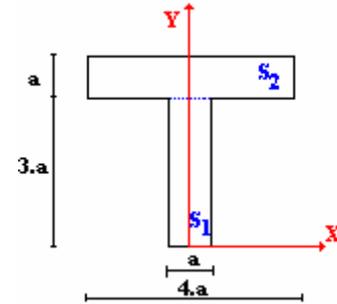
Exemple :

$$X_G=0,$$

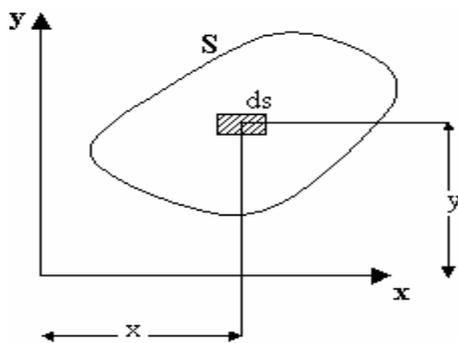
$$S_1 = a \cdot 3.a = 3 \cdot a^2 \quad S_2 = 4.a \cdot a = 4 \cdot a^2$$

$$Y_G = \frac{\sum y_i S_i}{\sum S_i} \quad Y_G = \frac{y_1 \cdot S_1 + y_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2}$$

$$Y_G = \frac{3 \cdot \frac{a}{2} \cdot 3a^2 + \frac{7}{2} \cdot a \cdot 4 \cdot a^2}{3 \cdot a^2 + 4 \cdot a^2} = \frac{37}{14} \cdot a$$

**Fig.III.3** Etude d'une section droite en T.**III-3 Moment d'inertie :**

Le moment d'inertie se calcule de la manière suivante :



$$I_x = \int_S y^2 \cdot ds$$

$$I_y = \int_S x^2 \cdot ds$$

Le produit d'inertie :

$$I_{xy} = \int_S x \cdot y \cdot ds$$

Fig.III.4 Moment d'inertie d'une section droite.

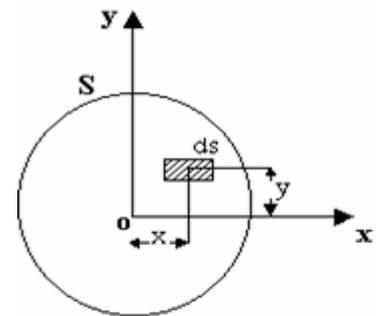
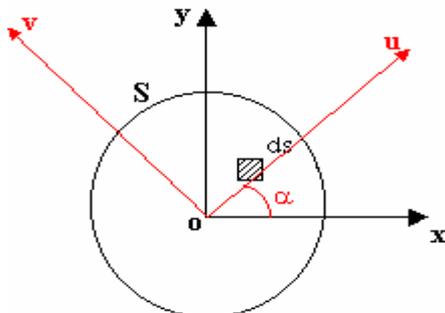
NB : L'unité du moment d'inertie est [cm⁴] ou [m⁴]

Le produit d'inertie peut être positif ou négatif.

III-3-1 Moment d'inertie polaire d'une surface plane :

Dans le cas où on calcule suivant les coordonnées polaires le moment d'inertie serait de :

$$I_0 = \int_S r^2 \cdot ds = \int_S (x^2 + y^2) \cdot ds = I_x + I_y$$

**Fig.III.5** Moment d'inertie d'une section droite circulaire.**III-3-2 Rotation d'axe :**

Soit :

S surface droite et pleine.

$$(ox, oy) = \alpha$$

I_x, I_y et I_{xy} sont connus

I_u, I_v et $I_{uv} = ?$

Fig.III.6 rotation d'axes d'une section droite circulaire.

Les moments d'inertie I_u, I_v, I_{uv} se calcul de la manière suivante :

$$I_u = \frac{(I_x + I_y)}{2} + \frac{(I_x - I_y)}{2} \cdot \cos 2\alpha - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha$$

$$I_v = \frac{(I_x + I_y)}{2} - \frac{(I_x - I_y)}{2} \cdot \cos 2\alpha + I_{xy} \cdot \sin 2\alpha$$

$$I_{uv} = \frac{(I_x - I_y)}{2} \cdot \sin 2\alpha + I_{xy} \cdot \cos 2\alpha$$

Nb: on constate que les valeurs des moments d'inertie dépendent de α .

III-3-3 Axes principaux :

Les moments d'inerties I_u et I_v passeront par un extremum pour toute valeur de α annulant le premier dérivé :

$$\frac{d I_u}{d \alpha} = -(I_x - I_y) \cdot \sin 2\alpha - 2 \cdot I_{xy} \cdot \cos 2\alpha = 0$$

D'où :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}$$

Pour une certaine valeur α_0 de α , I_u passe par un maximum et I_v passe par un minimum (puisque $I_u + I_v = \text{cst}$).

I_u, I_v : sont appelés les moments d'inerties principaux, les deux axes orthogonaux u et v sont appelés des axes principaux d'inertie.

III-4 Axes centraux principaux :

Lorsque deux axes principaux ont leurs origines confondues avec le centre de gravité de la surface il prenne le nom d'axes centraux principaux et les moments d'inerties extrêmes sont appelé moments d'inerties centraux principaux ($I_{uv} = 0$).

$$I_u = \frac{(I_x + I_y)}{2} + \frac{(I_x - I_y)}{2} \cdot \cos 2\alpha - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha$$

$$I_{uv} = \frac{(I_x - I_y)}{2} \cdot \sin 2\alpha + I_{xy} \cdot \cos 2\alpha = 0 \quad \dots (1)$$

$$(1) \Rightarrow I_{xy} = \frac{(I_y - I_x)}{2} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$$

Donc

$$I_u = \frac{(I_x + I_y)}{2} + \frac{(I_x - I_y)}{2} \cdot \cos 2\alpha - \frac{(I_y - I_x)}{2} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \sin 2\alpha$$

$$I_u = \frac{(I_x + I_y)}{2} + \frac{(I_x - I_y)}{2} \cdot \cos 2\alpha + \frac{(I_x - I_y)}{2} \cdot \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos 2\alpha} \quad \dots (2)$$

Par analogie:

$$I_v = \frac{(I_x + I_y)}{2} - \frac{(I_x - I_y)}{2} \cdot \cos 2\alpha + \frac{(I_y - I_x)}{2} \cdot \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos 2\alpha} \quad \dots (3)$$

$$(2) \Rightarrow I_u = \frac{(I_x + I_y)}{2} + \frac{(I_x - I_y)}{2} \cdot \frac{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$I_u = \frac{(I_x + I_y)}{2} + \frac{(I_x - I_y)}{2 \cos 2\alpha} = I_{u_{\max}}$$

Par analogie:

$$(3) \Rightarrow I_v = \frac{(I_x + I_y)}{2} - \frac{(I_x - I_y)}{2 \cos 2\alpha} = I_{v_{\min}}$$

En introduisant les transformations trigonométriques suivantes :

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} ; \quad \sin 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}$$

On aura :

$$I_{u_{\max}} = \frac{(I_x + I_y)}{2} + \sqrt{\frac{(I_x - I_y)^2}{4} + I_{xy}^2}$$

$$I_{v_{\min}} = \frac{(I_x + I_y)}{2} - \sqrt{\frac{(I_x - I_y)^2}{4} + I_{xy}^2}$$

Exemple :

Calculer I_x , I_G , I_Δ

Solution :

Sachant que : $I_x = \int y^2 \cdot ds$,

Avec $ds = z \cdot dy$.

Donc : $I_x = \int z \cdot y^2 \cdot dy$

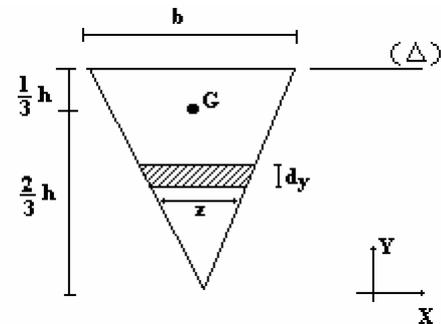


Fig.III.7 Exemple d'une section triangulaire.

$$\frac{z}{y} = \frac{b}{h} \Rightarrow z = \frac{b}{h} \cdot y$$

$$I_x = \int_0^h y^2 \frac{b}{h} \cdot y \cdot dy = \frac{b}{h} \cdot \int_0^h y^3 \cdot dy = \frac{b \cdot h^3}{4}$$

Sachant que :

$$I_x = I_G + S \cdot d^2 \quad \Rightarrow \quad I_G = I_x - S \cdot d^2$$

Donc :

$$I_G = \frac{b \cdot h^3}{4} - \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \cdot \left(\frac{4}{9} \cdot h^2\right)$$

$$I_G = \frac{b \cdot h^3}{36}$$

D'où, on peut avoir la valeur du moment d'inertie par rapport à l'axe Δ (I_Δ) :

$$I_\Delta = I_G + S \cdot d^2$$

$$I_G = \frac{b \cdot h^3}{4} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot h\right)^2$$

$$I_G = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Pour résumer, il est possible de regrouper les caractéristiques géométriques de la section droite standard sous forme de tableau :

Figure	Aire	Moment Inertie	Module Section	Rayon Giration
	A	I_{AN}	S	r_{AN}
<p>Rectangle</p>	bh	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{h}{\sqrt{12}}$
<p>Triangle</p>	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$		$\frac{h}{\sqrt{18}}$
<p>Cercle</p>	$\frac{\pi d^2}{4} = \pi r^2$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{I}{2}$

Figure	Aire	Moment Inertie	Module Section	Rayon Giration
	A	I_{AN}	S	r_{AN}
<p>Rectangle creux</p>	$bh - b'h'$	$\frac{bh^3 - b'h'^3}{12}$	$\frac{bh^3 - b'h'^3}{6h}$	$\sqrt{\frac{bh^3 - b'h'^3}{12A}}$
<p>Cylindre creux</p>	$\frac{\pi(d^2 - d'^2)}{4}$	$\frac{\pi(d^4 - d'^4)}{64}$	$\frac{\pi(d^4 - d'^4)}{32d}$	$\frac{\sqrt{d^2 + d'^2}}{4}$
<p>Demi-cercle</p>	$\frac{\pi r^2}{2}$	$0,11 r^4$		$0,26 r$

Chapitre IV

CHAPITRE IV: Flexion simple.

Définition:

En supposant que les forces P_1 et P_2 et q existent dans un même plan, on entend par une flexion simple un mode de sollicitation telle que dans la section droite de la barre existent deux composantes d'efforts intérieurs ($M \neq 0$, $T \neq 0$, $N = 0$).

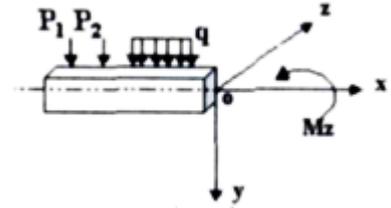


Fig.IV.1 Schéma de charge sur une barre.

IV-1 Convention de signes du moment de flexion et de l'effort tranchant:

- Moment :

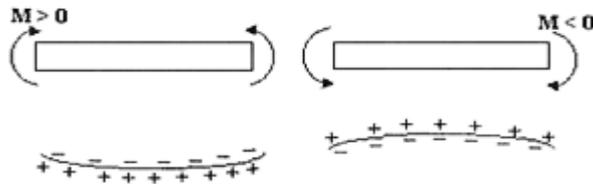


Fig.IV.2 Convention de signe du moment fléchissant

Remarque: la **flexion pure** est une flexion due à une seule application d'un moment de fléchissant M aux extrémités de la barre.

- Effort tranchant :

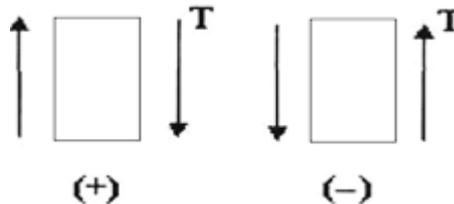


Fig.IV.3 Convention de signe de l'effort tranchant.

IV-2 Relation entre M , T et l'intensité de la charge:

Supposant qu'on sollicite une barre par une charge q quelconque.

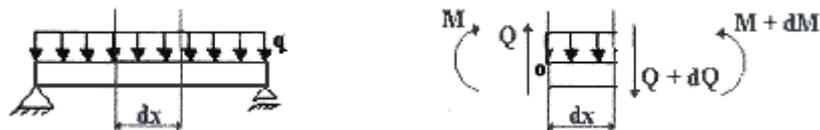


Fig.IV.4 Schéma statique de chargement uniforme d'une barre.

$$\sum y_i = 0 \Rightarrow Q - Q - dQ - q \cdot dx = 0$$

$$\Rightarrow q = -\frac{dQ}{dx} \quad \dots (1)$$

$$\sum M_{F/C} = 0 \Rightarrow M - M - dM + (Q + dQ) \cdot dx - q \cdot \frac{(dx)^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow -dM + Q \cdot dx + dQ \cdot dx + q \cdot \frac{(dx)^2}{2} = 0$$

Sachant que : $dQ \cdot dx \cong 0$ et que : $q \cdot \frac{(dx)^2}{2} \cong 0$,

Alors :

$$- dM + Q \cdot dx = 0,$$

$$Q = \frac{dM}{dx} \quad \dots (2)$$

L'équation (1) et (2) nous permet d'avoir :

$$q = - \frac{d^2M}{dx^2}$$

Si la charge q est une charge constante ($q = \text{cst}$) l'effort tranchant est linéaire.

$$q = - \frac{dQ}{dx} = \text{cst} \Rightarrow dQ = -q \cdot dx \Rightarrow Q = -q \cdot x + c \quad c = \text{cst}$$

Exemple:

Représenter graphiquement le moment fléchissant, l'effort tranchant.

$$L = a + b$$

$$R_A = \frac{P \cdot b}{L} \quad \text{et} \quad R_B = \frac{P \cdot a}{L}$$

- Effort tranchant :

$$0 \leq x \leq a \quad T(x) = R_A$$

$$a \leq x \leq L \quad T(x) = R_B$$

- Moment Fléchissant :

$$0 \leq x \leq a \quad M(x) = R_A \cdot x$$

$$x=0 \quad M=0$$

$$x=a \quad M = R_A \cdot a = \frac{P \cdot b \cdot a}{L}$$

$$a \leq x \leq L \quad M(x) = R_A \cdot x$$

$$x=a \quad M = R_A \cdot a = \frac{P \cdot b \cdot a}{L}$$

$$x=L \quad M=0$$

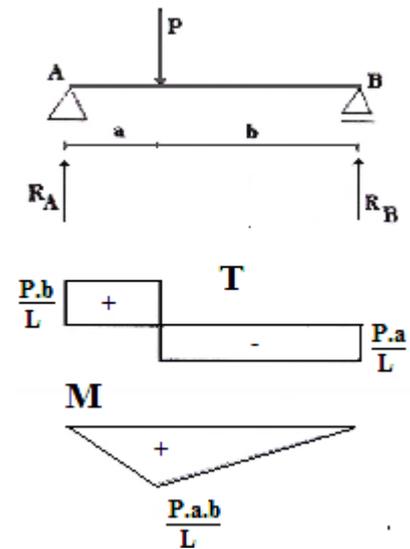


Fig.IV.5 Exemple d'étude 1.

IV-3 Contraintes normales et choix des dimensions de sections droites d'une poutre:

On détermine la contrainte normale en un point arbitraire de la section droite d'une poutre en flexion simple par la formule suivante :

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot y$$

M : moment fléchissant dans la section droite considérée.

I : moment d'inertie de la section par rapport à l'axe neutre.

y : distance du point considéré à l'axe neutre.

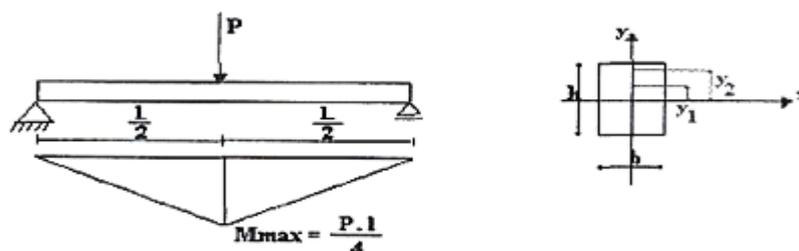


Fig.IV.6 Etude de la résistance d'une barre due à une charge concentrée.

Au milieu de la barre, on constate que le moment est maximum d'où :

$$\sigma = \frac{M^{\max}}{I_x} \cdot y$$

Si on calcule la contrainte à une distance y_1, y_2 sachant que $y_1 < y_2$, on constate que :

$$\sigma_1 = \frac{M^{\max}}{I_x} \cdot y_1 \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{M^{\max}}{I_x} \cdot y_2$$

Donc :

$$\sigma_1 < \sigma_2$$

Pour ce faire, la contrainte maximale sera de :

$$\sigma_{\max} = \frac{M^{\max}}{I_x} \cdot y_{\max}$$

Les maximums des contraintes normales de traction ou de compression dans la section considérée correspondent au point les plus éloignés de l'axe neutre.

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot y = \frac{M}{\frac{I}{y}} = \frac{M}{\bar{W}}$$

\bar{W} : est le module de résistance de la section droite de la poutre en flexion par rapport l'axe neutre.

Pour les poutres dont les résistances en traction et en compression sont les mêmes, la formule de la contrainte de flexion permet de choisir la section :

$$\bar{W} = \frac{M^{\max}}{\bar{\sigma}}$$

M^{\max} : moment fléchissant maximum en valeur absolue.

$\bar{\sigma}$: Contrainte admissible.

Il faut vérifier que la contrainte ne dépasse pas la contrainte admissible $\bar{\sigma}$

$$\sigma \leq \bar{\sigma} \Rightarrow \frac{M}{\bar{W}} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow \bar{W} \geq \frac{M}{\bar{\sigma}}$$

Exemple:

Calculer et vérifier le module de résistance de cette structure pour les différents types de section droite.

$$\bar{\sigma} = 1600 \text{ kg/cm}^2$$

$$R_A = R_B = 3.2 \text{ t}$$

$$\text{Et : } M^{\max} = 3.2 \text{ t.m}$$

Il faut vérifier que :

$$\sigma^{\max} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow \frac{M^{\max}}{W^{\min}} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow W^{\min} \geq \frac{M^{\max}}{\bar{\sigma}},$$

$$\text{sachant que } W^{\min} = \frac{I_x}{y_{\max}}$$

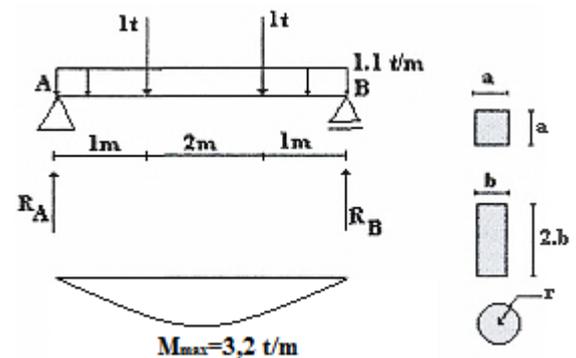


Fig.IV.7 exemple d'étude 2.

1. section carrée (a.a):

$$W^{\min} = \frac{I_x}{y^{\max}} = \frac{a^4}{\frac{12 \cdot a}{2}} = \frac{a^3}{6}$$

$$W^{\min} \geq \frac{M^{\max}}{\sigma} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot M^{\max}}{\sigma}} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 3,2 \cdot 10^5}{1600}} = 10,6 \text{ cm} \Rightarrow S_1 = a \cdot a = 113 \text{ cm}^2$$

2. section rectangulaire (b.2b) :

$$W^{\min} = \frac{I_x}{y^{\max}} = \frac{b \cdot (2 \cdot b)^3}{12 \cdot b} = \frac{2 \cdot a^3}{3}$$

$$W^{\min} \geq \frac{M^{\max}}{\sigma} \Rightarrow b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot M^{\max}}{2 \cdot \sigma}} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 3,2 \cdot 10^5}{2 \cdot 1600}} = 6,89 \text{ cm} \Rightarrow S_2 = b \cdot 2 \cdot b = 89,57 \text{ cm}^2$$

3. section circulaire :

$$W^{\min} = \frac{I_x}{y^{\max}} = \frac{\pi \cdot d^4}{64 \cdot d} = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$$

$$W^{\min} \geq \frac{M^{\max}}{\sigma} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M^{\max}}{\pi \cdot \sigma}} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3,2 \cdot 10^5}{\pi \cdot 1600}} = 12,68 \text{ cm} \Rightarrow S_3 = \pi \cdot \frac{d^2}{4} = 126,2 \text{ cm}^2$$

Le résultat est que: $S_3 > S_1 > S_2$

Alors, le choix le plus judicieux est la section rectangulaire.

IV-4 Contraintes tangentielles et vérification de la résistance :

En un point arbitraire d'une section droite rectangulaire, l'expression de la contrainte tangentielle est :

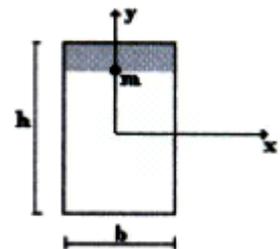
$$\tau = \frac{Q \cdot M_s}{b \cdot I_x}$$

Q : effort tranchant dans la section considérée.

M_s : moment statique par rapport à l'axe neutre x de la partie de l'aire de la section située au-dessus de y où est déterminé la contrainte.

B : largeur de la section.

I_x : moment d'inertie de la section par rapport à l'axe neutre x.

**Exemple :**

$$Q = 8t$$

$$h = 12 \text{ cm}, h_0 = 8 \text{ cm}.$$

$$b = 6 \text{ cm}, b_0 = 4 \text{ cm}.$$

Calculer $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$

Sachant que :

$$\tau = \frac{Q \cdot M_s}{b \cdot I_x} \text{ et } I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b_0 \cdot h_0^3}{12} = 693,33 \text{ cm}^4$$

1. Pour le point 1 : on a $\tau_1 = 0$, puisque $M_s/1 = 0$

2. pour le point 2 :

$$Ms_{/2} = S.y = \frac{1}{2} \cdot (h - h_0) \cdot b \cdot \left[(h - h_0) \cdot \frac{1}{4} + \frac{h_0}{2} \right] = 60 \text{ cm}^3$$

$$\tau_2 = \frac{Q.M_s}{b.I_x} = \frac{8000.60}{6.693,33} = 115,40 \text{ kg/cm}^2$$

3. pour le point 3 :

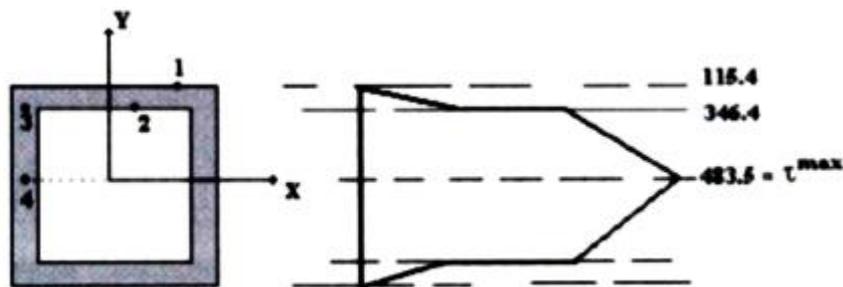
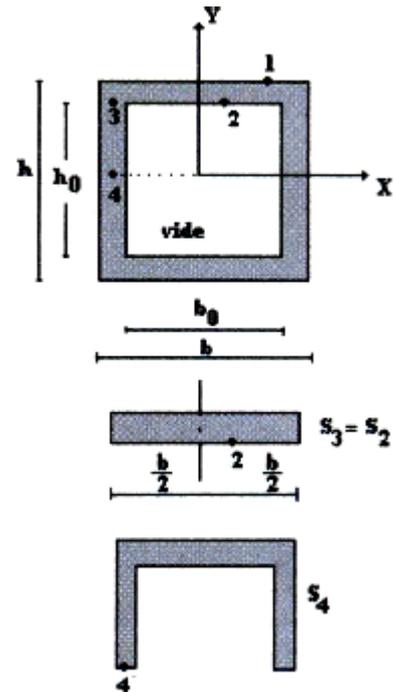
$Ms_{/3} = Ms_{/2}$, Alors :

$$\tau_3 = \frac{Q.M_s}{b.I_x} = \frac{8000.60}{2.693,33} = 364,4 \text{ kg/cm}^2$$

4. pour le point 4 :

$$Ms_{/4} = Ms_{/2} + 2 \cdot \left[\frac{h_0}{2} \cdot \frac{b - b_0}{2} \cdot \frac{h_0}{4} \right] = 76 \text{ cm}^3$$

$$\tau_4 = \frac{8000.76}{2.693,33} = 438,5 \text{ kg/cm}^2$$



IV-5 Déformation des poutres fléchis :

Les déplacements des sections d'une poutre sont caractérisés par :

- Des déplacements linéaires du centre de gravité des sections droites dans une direction normale à l'axe géométrique de la poutre appelé déplacements verticaux 'v'.
- Par des déplacements angulaires des sections droite appelé rotation des sections 'θ'.

La section ka subit un déplacement vertical kk' égale à dv et une rotation θ.

θ : Rotation mesuré de l'axe x à la tangente de la déformé.

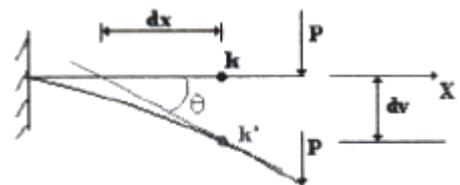
θ > 0, si la rotation est effectuée dans le sens des aiguilles d'une montre.

θ < 0, si la rotation est effectuée dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Pour les poutres rigides (θ < 1) $\text{tg}\theta \approx \theta \approx \frac{dv}{dx}$

v(x) caractérise la déformation de la poutre.

Pour déterminer v et θ on peut utiliser les méthodes suivantes :



1. Méthode par double intégration.
2. Méthode des paramètres initiaux.
3. Méthodes graphiques (méthode de Mohr).

IV-5-1 Méthode par double intégration:

Il est possible de montrer qu'il existe une relation entre la courbure de l'axe de la poutre $\frac{1}{r}$ et le moment fléchissant :

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E.I} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} = \pm \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Le signe dépend de l'orientation des axes. Positif si l'axe (oy) est dirigé vers le haut et négatif dans le cas contraire.

Avec la supposition que l'axe (oy) serait dirigé vers le bas, le résultat sera :

$$\frac{1}{r} = - \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Pour une poutre rigide $\frac{dv}{dx}$ est petit (tend vers zéro).

On peut négliger $\frac{dv}{dx}$ devant 1 alors : $\frac{1}{r} = - \frac{d^2v}{dx^2}$

Et $\frac{1}{r} = \frac{M}{E.I}$

Donc : $\frac{d^2v}{dx^2} = - \frac{M}{E.I}$

Où : $v(x) = - \iint \frac{M}{E.I} . dx$

Il est possible de déterminer les constantes d'intégration à l'aide des conditions aux limites.

Exemple:

Calculer $\theta(x)$, $v(x)$ et v^{\max}

Ayant les données suivantes :

Les conditions aux limites C.A.L :

qd $x=L$ $v(L) = 0$

qd $x=L$ $\theta(L) = 0$

$M(x) = -P.x$

Et $\frac{d^2v}{dx^2} = - \frac{M}{E.I}$

Donc : $E.I. \frac{d^2v}{dx^2} = -M(x)$

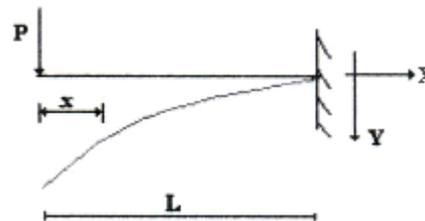


Fig.IV.8 Exemple d'étude 3.

$$E.I. \frac{d^2v}{dx^2} = P.x \Rightarrow E.I. \frac{dv}{dx} = P. \frac{x^2}{2} + C = E.I.\theta(x)$$

$$E.I.v(x) = P. \frac{x^3}{6} + C.x + D$$

C et **D** coefficients déterminés à partir des C.A.L

$$x=L, \quad v(L) = 0 \Rightarrow E.I.v(L) = 0 \Rightarrow P. \frac{L^3}{6} + C.L + D = 0$$

$$x=L, \quad \theta(L) = 0 \Rightarrow E.I.\theta(L) = 0 \Rightarrow P. \frac{L^2}{2} + C = 0 \Rightarrow C = -P. \frac{L^2}{2}$$

En remplaçant la valeur de C dans l'équation précédente, le résultat sera :

$$P. \frac{L^3}{6} - P. \frac{L^2}{2}.L + D = 0$$

$$D = P. \frac{L^3}{3}$$

Il est possible d'écrire $v(x)$ et $\theta(x)$ en tout point sous la forme suivante :

$$E.I.\theta(x) = P. \frac{x^2}{2} - P. \frac{L^2}{2} = \frac{P}{2}.(x^2 - L^2)$$

$$\theta(x) = \frac{P}{2.E.I}.(x^2 - L^2)$$

$$E.I.v(x) = P. \frac{x^3}{6} - P. \frac{L^2}{2}.x + P. \frac{L^3}{3}$$

$$v(x) = \frac{P}{6.E.I}(x^3 - 3.L^2.x + 2.L^3)$$

D'où, la valeur de v^{\max} au niveau de l'extrémité libre, sera :

$$v^{\max} = v(0) = \frac{P}{6.E.I}(0^3 - 3.L^2.0 + 2.L^3)$$

$$v^{\max} = \frac{P.L^3}{3.E.I}$$

Si on a :

$$P = 5t, \quad E.I = 2000 \text{ t.m}^2, \quad L = 3m$$

$$\text{Le résultat sera de } v^{\max} = \frac{5.3^3}{3.2000} = 22,5\text{mm}$$

IV-5-2 Méthode des paramètres initiaux:

Dans le cas d'une poutre quelconque chargée de différentes sollicitations, on peut écrire :

$$M(x) = T_0.x + M_0 + m.(x-a)^0 \Big|_{x>a} + P.(x-b) \Big|_{x>b} + q \frac{(x-c)^2}{2} \Big|_{x>c}$$

Sachant que : $E.I.v''(x) = -M(x)$

$$E.I.v''(x) = - \left[T_0.x + M_0 + m.(x-a)^0 \Big|_{x>a} + P.(x-b) \Big|_{x>b} + q \frac{(x-c)^2}{2} \Big|_{x>c} \right]$$

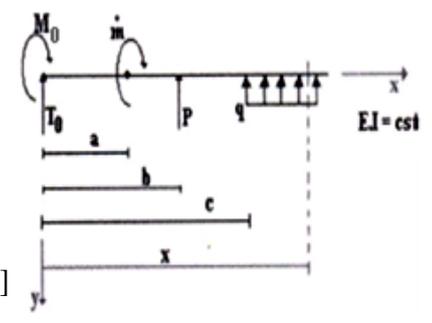


Fig.IV.9 Schéma de charge sur une barre.

$$E.I.v'(x) = C - \left[T_0. \frac{x^2}{2} + M_0.x + m.(x-a) \Big|_{x>a} + P. \frac{(x-b)^2}{2} \Big|_{x>b} + q \frac{(x-c)^3}{6} \Big|_{x>c} \right]$$

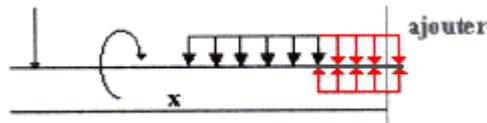
$$E.I.v(x) = D + C.x - \left[T_0 \cdot \frac{x^3}{6} + M_0 \cdot \frac{x^2}{2} + m \cdot \frac{(x-a)^2}{2} \right]_{x>a} + P \cdot \frac{(x-b)^3}{6} \Big|_{x>b} + q \cdot \frac{(x-c)^4}{24} \Big|_{x>c}$$

C'est l'équation universelle de ligne élastique.

Pour déterminer C et D, on utilise les conditions aux limites.

Pour résoudre cette équation :

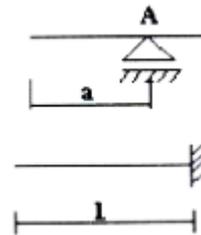
1. On choisit l'origine des coordonnées à l'extrémité gauche de la poutre.
2. Il faut représenter les expressions des moments fléchissant sous la forme de polynôme de degré k.
3. Le moment concentré m doit être représenté sous la forme $m \cdot (x-a)^0$.
4. La charge uniforme sur telle ou telle zone doit être prolongée jusqu'au bout de l'extrémité mais dans les zones où il n'y a pas de charge, il faut appliquer la charge ayant la même intensité mais de direction opposée.



On détermine les constantes d'intégration à l'aide des conditions aux limites (conditions d'appuis).

Conditions d'appuis:

- Appui simple : $x = a$; $v(a) = 0$ et $\theta(a) = 0$
- Encastrement : $x = l$; $v(l) = 0$ et $\theta(l) = 0$



IV-5-3 Méthode graphique: (méthode de Mohr)

La méthode graphique est commode pour calculer les déplacements des sections particulières de la poutre, cette méthode est valable que dans le cas où il est facile de déterminer les surfaces et les centres de gravité des diagrammes des moments fléchissant provoqué par les charges.

1. Construire le diagramme du moment fléchissant pour la poutre donnée.
2. Détermine la poutre auxiliaire.
3. Charger la poutre auxiliaire par une charge fictive d'intensité $\frac{M}{E.I}$

diagramme du moment $\frac{M}{E.I}$.

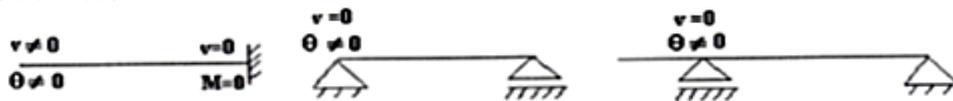
4. Tracer le diagramme de l'effort tranchant fictif et du moment fléchissant fictif.

On aura :

$$\theta(x) = T^f(x)$$

$$v(x) = M^f(x)$$

Poutres données :



Poutres auxiliaires :

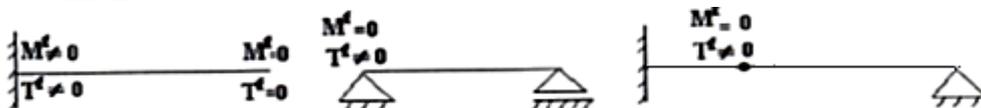


Fig.IV.10 Schéma des conditions aux limites.

Exemple:Calculer θ_A , θ_B , f_{\max}

Les réactions aux niveaux des appuis sont :

$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$

Le moment maximum est de : $M^{\max} = \frac{P.L}{4}$

Calcul de la charge fictive :

$$P' = \frac{M^{\max}}{E.I} \cdot \frac{L}{2} = \frac{P.L}{4.E.I} \cdot \frac{L}{2}, \text{ surface de charge.}$$

Les réactions d'appuis de cette charge sont :

$$R'_A = R'_B = \frac{P'}{2}$$

$$R'_A = R'_B = \frac{P.L^2}{16.E.I}$$

On peut en déduire la valeur de θ_A , θ_B comme suit :

Effort fictif

$$|\theta_A| = |\theta_B| = \frac{P.L^2}{16.E.I}$$

$$f^{\max} = M'(x = \frac{L}{2}) = \frac{P.L^2}{16.E.I} \cdot \frac{L}{2} - \frac{P.L^2}{4.E.I} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{L}{2}\right)$$

$$= \frac{P.L^2}{32.E.I} - \frac{P.L^2}{96.E.I}$$

$$f^{\max} = \frac{P.L^2}{48.E.I}$$

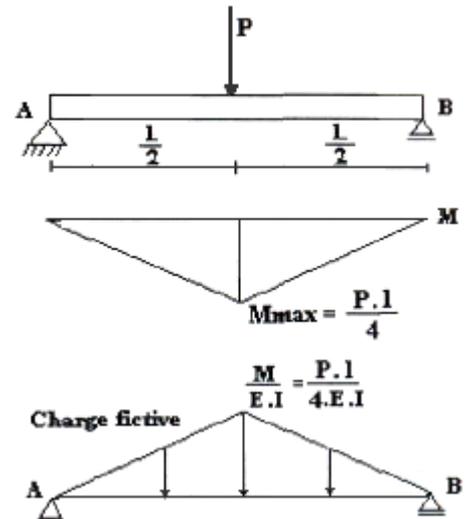
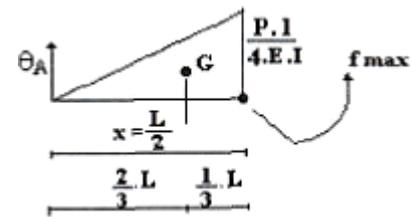


Fig.IV.11 Exemple d'étude 4.



Le tableau suivant résume les caractéristiques géométriques des sections particulières.

	Aire	a	b
	$\frac{1}{2} \cdot L \cdot h$	$\frac{2}{3} L$	$\frac{1}{3} L$
	$\frac{2}{3} \cdot L \cdot h$	$\frac{5}{8} L$	$\frac{3}{8} L$
	$\frac{1}{3} \cdot L \cdot h$	$\frac{3}{4} L$	$\frac{1}{4} L$

Chapitre V

CHAPITRE V: Flexion déviée.

Introduction :

Dans le cas où la poutre possède deux plans de symétries longitudinaux G_x et G_y , le plan de charge contient le centre de gravité de la section mais distinct du plan de symétrie.

L'expérience montre que tout se passe comme si la poutre est sollicitée simultanément par deux flexions simples, le plan de charge pour chacune d'elle étant égal aux projections des charges réelles sur ses plans de symétries.

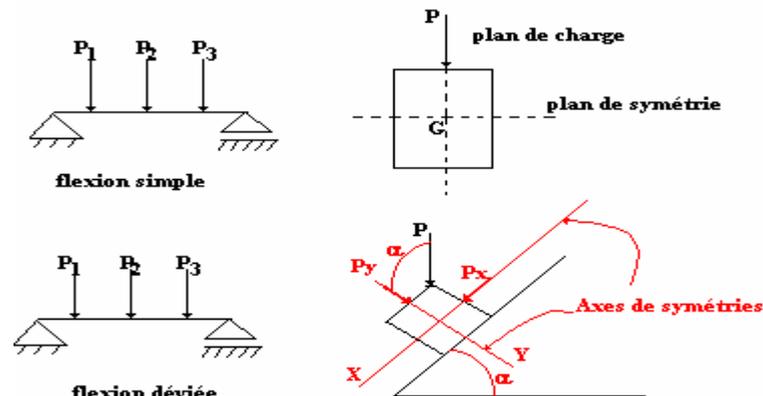


Fig.V.1 Schéma statique et application d'une charge inclinée.

V-1 Contraintes :

01 flexion déviée = 02 flexions simples.

$$P_x = P \cdot \sin(\alpha) \quad P_y = P \cdot \cos(\alpha) \quad N=0 \quad M \neq 0 \quad T \neq 0$$

La contrainte est obtenue de :

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x$$

Le signe de σ dépend des signes des moments fléchissant.

I_x, I_y : Moments d'inertie principaux centraux de la section droite de la poutre.

V-2 Axes neutres :

C'est l'ensemble des points pour lesquels σ est nul ($\sigma=0$).

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x = 0$$

Donc

$$y = - \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y} \cdot x$$

L'axe neutre est une droite qui passe par le centre de gravité de la section.

Exemple :

Soit une poutre soumise à une charge répartie déviée q , appuyée aux deux extrémités.

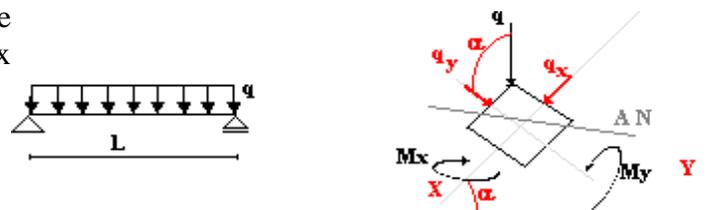


Fig.V.2 Exemple 1.

Déterminer :

1. L'équation de l'axe neutre.
2. Contraintes maximales.
3. f_{\max} .

Solution :

1. l'équation de l'axe neutre: sachant que :

$$q_x = q \cdot \sin \alpha \quad \text{et} \quad q_y = q \cdot \cos \alpha$$

$$M_x = q_y \cdot \frac{L^2}{8} = q \cdot \cos \alpha \cdot \frac{L^2}{8}$$

$$M_y = q_x \cdot \frac{L^2}{8} = q \cdot \sin \alpha \cdot \frac{L^2}{8}$$

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x = 0. \quad \text{Position de l'axe neutre.}$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad \text{et} \quad I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

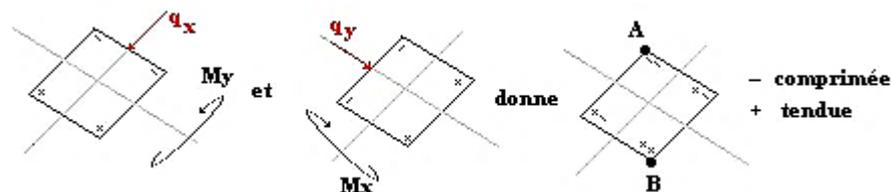
$$y = - \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y} \cdot x$$

$$y = - \frac{q \cdot \cos \alpha \cdot \frac{L^2}{8} \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}}{q \cdot \sin \alpha \cdot \frac{L^2}{8} \cdot \frac{h \cdot b^3}{12}} \cdot x = \cot \alpha \cdot \frac{h^2}{b^2} \cdot x$$

$$\text{donc : } y = \cot \alpha \cdot \left(\frac{h^2}{b^2} \right) \cdot x$$

2. Calcul des contraintes maximales :

On constate qu'en deux points A, B de la section droite, on a des contraintes σ^A , σ^B maximales.



$$A \left(-\frac{b}{2}, -\frac{h}{2} \right) \rightarrow \sigma^A$$

$$B \left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) \rightarrow \sigma^B$$

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x$$

$$\text{Ayant : } M_x = q \cdot \cos \alpha \cdot \frac{L^2}{8}$$

$$M_y = q \cdot \sin \alpha \cdot \frac{L^2}{8}$$

Il est possible d'écrire :

$$\sigma_{\min}^A = \frac{q \cdot \cos \alpha \cdot L^2}{8 \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) + \frac{q \cdot \sin \alpha \cdot L^2}{8 \cdot \frac{h \cdot b^3}{12}} \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{q \cdot L^2}{b \cdot h} \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{h} + \frac{\sin \alpha}{b}\right)$$

$$\sigma_{\max}^B = \frac{q \cdot \cos \alpha \cdot L^2}{8 \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} \cdot \left(\frac{h}{2}\right) + \frac{q \cdot \sin \alpha \cdot L^2}{8 \cdot \frac{h \cdot b^3}{12}} \cdot \left(\frac{b}{2}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{q \cdot L^2}{b \cdot h} \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{h} + \frac{\sin \alpha}{b}\right)$$

3. f_{\max} ?

En utilisant la méthode de Mohr, on a :

Dans le cas d'une flexion simple.

$$f_{\max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot L^4}{E \cdot I}$$

Dans ce cas :

$$f_x^{\max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_x \cdot L^4}{E \cdot I}$$

$$f_y^{\max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_y \cdot L^4}{E \cdot I}$$

Ce qui nous amène à :

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

Chapitre VI

CHAPITRE VI: Flexion composée.

Définition :

Une barre est soumise à la flexion composée si elle est soumise simultanément à la flexion simple et à la compression (ou traction).

$$N \neq 0 \quad M \neq 0 \quad FC = FS + (\pm N)$$

VI-1 Contraintes normales:

Dans le cas d'application du théorème de superposition :

Sous l'action du moment fléchissant M , on a la contrainte :

$$\sigma_1 = \frac{M}{I} \cdot y$$

Sous l'action de l'effort normale N , on a la contrainte :

$$\sigma_2 = \pm \frac{N}{S}$$

La contrainte normale résultante sera de :

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{M}{I} \cdot y \pm \frac{N}{S}$$

VI-2 Axes neutres AN :

C'est l'ensemble des points pour lesquels σ est nul ($\sigma=0$).

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot y \pm \frac{N}{S} = 0$$

Donc :

$$y = \pm \frac{N}{M} \cdot \frac{I}{S} \quad \text{représente l'ordonnée de l'axe neutre.}$$

L'axe neutre est une droite qui ne passe pas par le centre de gravité de la section.

VI-3 Traction excentrée :

Dans le cas d'une force de traction excentrée appliquée à une section quelconque, on constate que :

Les coordonnées de la force P sont : $P(y_c, z_c)$ Les efforts résultant :

$$\begin{aligned} N &= P, \\ M_y &= P \cdot z_c, \\ M_z &= P \cdot y_c. \end{aligned}$$

La traction excentrée est une flexion composée. La contrainte :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{M_y}{I_y} \cdot z + \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{N}{S} \\ \sigma &= \frac{P \cdot z_c}{I_y} \cdot z + \frac{P \cdot y_c}{I_z} \cdot y + \frac{P}{S} \\ \sigma &= \frac{P}{S} \cdot \left(1 + \frac{S \cdot z_c}{I_y} \cdot z + \frac{S \cdot y_c}{I_z} \cdot y \right) \end{aligned}$$

On pose:

$$i_z^2 = \frac{I_z}{S} \quad \text{et} \quad i_y^2 = \frac{I_y}{S} \quad \text{Rayons de girations.}$$

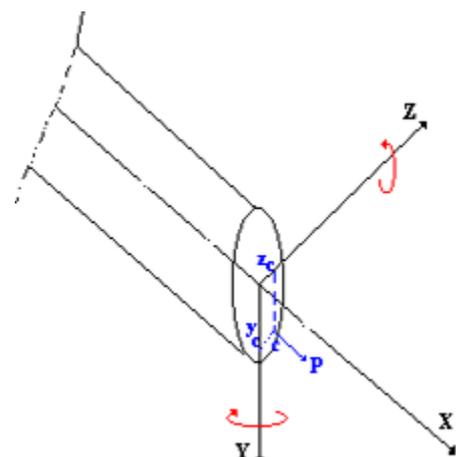


Fig.VI.1 Application d'une force excentrée sur une barre.

Donc :

$$\sigma = \frac{P}{S} \cdot \left(1 + \frac{z_c}{i_y^2} \cdot z + \frac{y_c}{i_z^2} \cdot y \right)$$

L'axe neutre est obtenu dans le cas où $\sigma = 0$:

$$\text{Alors : } \sigma = \frac{P}{S} \cdot \left(1 + \frac{z_c}{i_y^2} \cdot z + \frac{y_c}{i_z^2} \cdot y \right) = 0$$

L'axe neutre est une droite qui ne passe pas par le centre de gravité de la section.

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow z_n = -\frac{i_y^2}{z_c} \quad (\text{eq1})$$

$$\text{Si } z = 0 \Rightarrow y_n = -\frac{i_z^2}{y_c} \quad (\text{eq2})$$

C : centre de chargement.

VI-4 Contrainte normale maximale :

Les contraintes normales max se trouvent aux points les plus éloignés de l'axe neutre.

σ_{\max} correspond aux points A ou B.

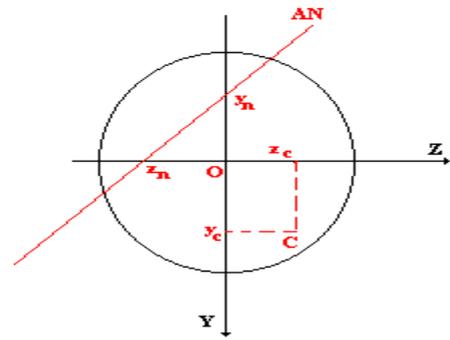


Fig.VI.2 Localisation de l'axe neutre.

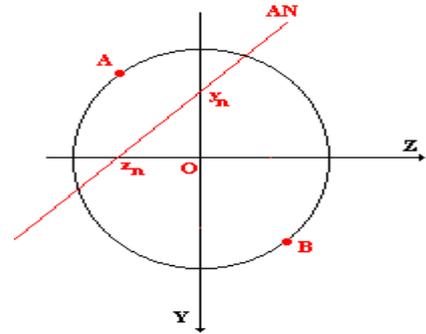


Fig.VI.3 Localisation contraintes max.

VI-5 Noyau central :

Supposant qu'un poteau est soumis à un effort de traction ou de compression excentrée, si le poteau comprimé est en béton armé, on préfère ne pas avoir des contraintes de traction dans la section droite car le béton a une faible résistance à la traction.

Dans ce cas, il est utile de savoir d'avance les valeurs admissibles de l'excentricité. Pour ce faire, il faut tracer le noyau central de la section droite.

Le noyau central est la région autour du centre de gravité où la force doit être appliquée pour avoir les contraintes de même signe dans toute la section droite de la barre.

VI-6 Construction du noyau central d'une section :

Pour avoir les limites du noyau central, il faut passer par les étapes suivantes :

1. tracer les tangentes à la section en négligeant les creux.
2. déterminer les centres de chargement (points d'application des charges) correspondant aux axes neutres tracés à l'aide des formules : eq(1), eq(2).
3. tracer des droites par les points obtenus.

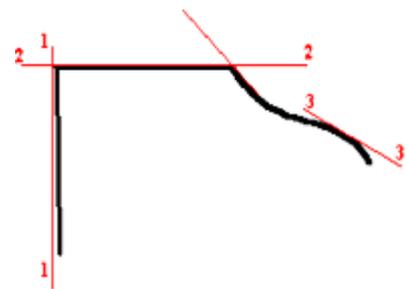


Fig.VI.4 Construction du noyau central.

La région limitée par ces droites représente le noyau central de la section.

VI-7 Le noyau central d'une section rectangulaire :

Pour une section rectangulaire les axes neutres sont positionnés aux extrémités de la section droite.

L'axe neutre 1-1 :

$$z_n = \infty \quad y_n = -\frac{h}{2} \quad \text{coordonnées de l'axe 1-1}$$

Sachant que :

$$z_n = -\frac{i_y^2}{z_c} \quad \text{et} \quad i_y^2 = \frac{I_y}{S}$$

$$y_n = -\frac{i_z^2}{y_c} \quad \text{et} \quad i_z^2 = \frac{I_z}{S}$$

Puisque $z_n = \infty \Rightarrow z_c = 0$

$$y_n = -\frac{h}{2} = -\frac{i_z^2}{y_c} \Rightarrow y_c = \frac{2 \cdot i_z^2}{h}$$

$$i_z^2 = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{h^2}{12}$$

$$y_c = \frac{2 \cdot \left(\frac{h^2}{12}\right)}{h} = \frac{h}{6}$$

Les coordonnées du noyau central par rapport à l'axe 1-1 sera :

$$(z_c, y_c) = \left(0, \frac{h}{6}\right)$$

Par analogie l'étude des axes restant, sera :

L'axe neutre 2-2 :

$$z_n = \frac{b}{2} \quad y_n = \infty \Rightarrow (z_c, y_c) = \left(-\frac{b}{6}, 0\right)$$

L'axe neutre 3-3 :

$$z_n = \infty \quad y_n = \frac{h}{2} \Rightarrow (z_c, y_c) = \left(0, -\frac{h}{6}\right)$$

L'axe neutre 4-4 :

$$z_n = -\frac{b}{2} \quad y_n = \infty \Rightarrow (z_c, y_c) = \left(\frac{b}{6}, 0\right)$$

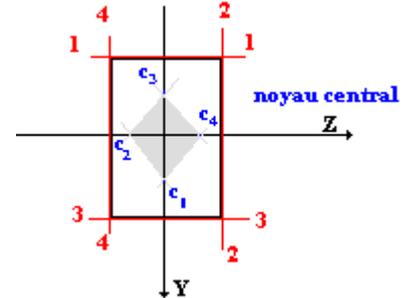


Fig.VI.5 Noyau central d'un rectangle.

Conclusion : il est possible de constater que le noyau central d'une section rectangulaire est un losange (les contraintes sont de mêmes signes).

Chapitre VII

CHAPITRE VII: Flambement.

Définition :

On suppose qu'il existe une sollicitation P variable agissant sur un poteau alors :

Si $P < P_{cr}$ sachant que P_{cr} étant la charge critique de compression.

On peut calculer alors la contrainte de compression qui sera de :

$$\sigma = \frac{P}{S} = \frac{P}{h.b}$$

Le raccourcissement suivant la loi de Hook sera de :

$$\Delta l = \frac{P.l}{E.S} = \frac{P.l}{E.h.b}$$

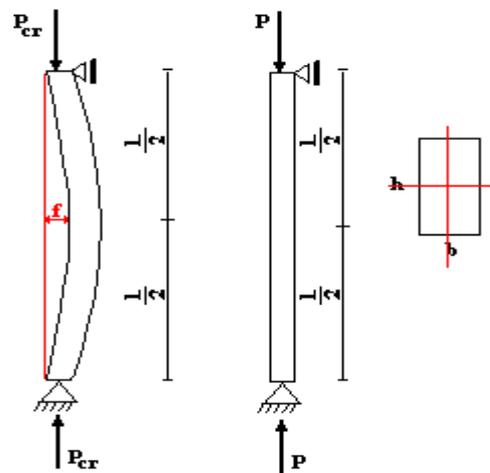


Fig.VII.1 Schéma statique d'un cas de flambement.

Lorsque la pièce commence à se déformer latéralement, on dit qu'elle subit un **flambement**. Si on augmente la charge P , on constate qu'à une certaine charge critique P_{cr} la poutre fléchit suivant le sens de la plus petite inertie, elle prend une proportion instable.

VII-1 Elancement :

L'élancement est noté λ , il se calcule comme suit :

$$\lambda = \frac{l_f}{i}$$

Sachant que :

i : rayon de giration

$$i = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$$

l_f : longueur de flambement.

l_f dépend des conditions d'extrémité de la barre sollicitée.

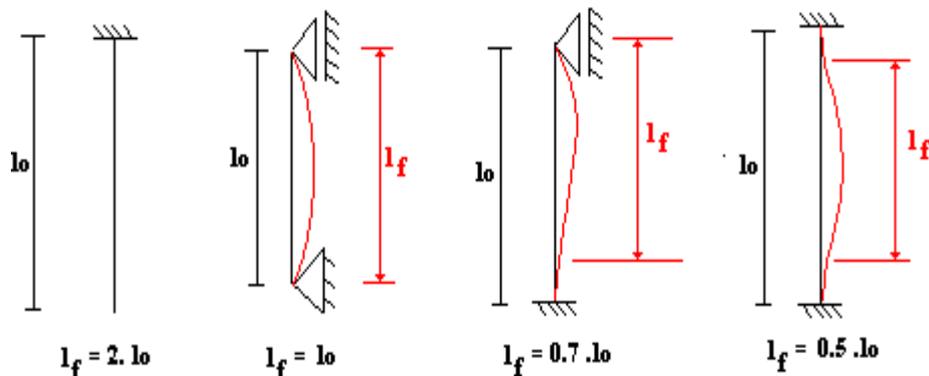


Fig.VII.2 Représentation de la longueur de flambement.

Si $\lambda < 50$; on a une pièce courte (la pièce ne flambe pas).

Dans ce cas de figure, le calcul sera fait en compression simple.

Si $\lambda > 50$; on a une pièce longue.

VII-2 Calcul de la charge critique d'Euler :

Pour un poteau AB soumis à une charge variable, on suppose que la section et l'inertie sont invariable (constante).

Si $P < P_{cr}$ pas de flambement. Si $P > P_{cr}$ le poteau flambe.

Sachant que : $E.I.y'' = -M(x)$.

Et:

$$M(x) = P.y \Rightarrow E.I.y'' = -P.y \Rightarrow E.I.y'' + P.y = 0$$

$$y'' + \frac{P}{E.I} . y = 0$$

$$y'' + k^2 . y = 0 \quad ; \text{ on pose } k^2 = \frac{P}{E.I}$$

la solution de cette équation différentielle sera : $y(x) = A \cos(k.x) + B \sin(kx)$.

Les constantes A et B se déterminent à partir des conditions aux limites.

$$x = 0, y = 0 = A + B(0)$$

$$\Rightarrow A = 0$$

$$x = l, y = 0 = B.\sin(k.l)$$

donc : $k.l = n \pi$ avec $n=1, \dots, n$

$$k = \frac{n.\pi}{l}$$

Sachant que $k^2 = \frac{P}{E.I}$

alors :

$$\frac{n^2.\pi^2}{l^2} = \frac{P}{E.I} \Rightarrow P = \frac{n^2.\pi^2}{l^2} . E.I$$

Si $n=1$, on a : $P_{cr} = \left(\frac{\pi}{l_f}\right)^2 . E . I_{min}$

P_{cr} : charge critique d'Euler.

E : module d'élasticité.

I_{min} : moment d'inertie min de la section droite de la barre. l_f : longueur de flambement.

VII-3 Contrainte critique d'Euler :

Après détermination de la charge critique d'Euler, il est possible de calculer la contrainte correspondante de la sorte :

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{1}{A} . \left(\frac{\pi}{l_f}\right)^2 . E . I_{min}$$

$$\lambda = \frac{l_f}{i}$$

$$\Rightarrow l_f = \lambda . i \quad \text{sachant que } i = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{E . I_{min} . \pi^2}{\lambda^2 . A . i^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{E . \pi^2}{\lambda^2}$$

A partir de la charge critique, on peut déterminer la valeur de la charge admissible suivant la formule :

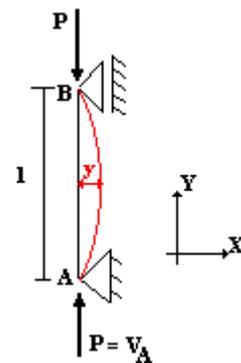


Fig.VII.3 Exemple d'étude 1.

$$\bar{P} = \frac{P_{cr}}{\alpha}$$

α : coefficient de sécurité. Pour l'acier $\alpha = 4$, Pour le bois $\alpha = 10$.

VII-4 Formule de Rankine :

Rankine a proposé une autre méthode pour calculer la charge critique P_{cr} . Au lieu de considérer la pièce à sa limite de stabilité élastique, Rankine a établi un coefficient de flambement C_f qu'il applique à la contrainte réelle de Rankine $C_f \cdot \sigma < \bar{\sigma}$.

$$C_f \cdot \frac{P}{A} < \bar{\sigma} \Rightarrow \frac{P}{A} < \frac{\bar{\sigma}}{C_f}$$

Avec

$$C_f > 1 \quad C_f = 1 + k' \cdot \frac{l_f}{i^2}$$

$$i^2 = \frac{I_{\min}}{A}$$

k' : Coefficient dépendant de la nature du matériau.

$$k' = \frac{\sigma_e}{\pi^2 \cdot E}$$

Exemples :

Acier courant	$k' = 10^{-4}$
Bois	$k' = 2 \cdot 10^{-4}$
Fer	$k' = 0.8 \cdot 10^{-4}$

La charge admissible selon Rankine sera :

$$\frac{P}{A} < \frac{\bar{\sigma}}{C_f} \Rightarrow P < A \cdot \frac{\bar{\sigma}}{1 + k' \cdot \left(\frac{l_f}{i}\right)^2}$$

Domaine de validité :

On peut déterminer le domaine de validité en fonction de l'élanement λ .

Dans le cas de la formule de Rankine :	$50 < \lambda < 105$	aciers doux
	$50 < \lambda < 70$	bois
formule d'Euler :	$\lambda > 105$	aciers doux
	$\lambda > 70$	bois

Exemple :

1. Pour une colonne d'acier de hauteur 8m. $R_{ext} = 10\text{cm}$ et $R_{int} = 10\text{cm}$.

On a:

$$\bar{\sigma} = 1600 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e = 2400 \text{ kg/cm}^2$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

Solution :

$$\text{Ayant : } \lambda = \frac{l_f}{i}$$

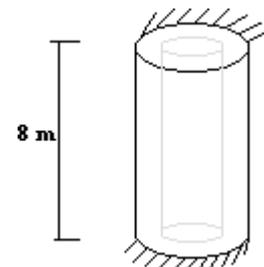


Fig.VII.4 Exemple d'étude 2.

$$\text{et } i = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$$

sachant que :

$$I = \frac{\pi}{64} \cdot (D_e^4 - D_i^4) = \frac{\pi}{64} \cdot (20^4 - 16^4) = 4634.64 \text{ cm}^4$$

$$A = 113.04 \text{ cm}^2$$

$$i = 6.40 \text{ cm}^2$$

$$\lambda = \frac{l_f}{i} = \frac{0.5 \cdot 800}{6.4} = 62.5$$

En utilisant la formule de Rankine :

$$P < A \cdot \frac{\bar{\sigma}}{1 + k' \cdot \left(\frac{l_f}{i}\right)^2}$$

et :

$$k' = \frac{\sigma_e}{\pi^2 \cdot E} = \frac{2400}{(3.14)^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6} = 1.15 \cdot 10^{-4}$$

Donc :

$$P < 1.24 \cdot 10^5 \text{ kgf}$$

2. Bois :

Section (8 . 24) cm² Hauteur 4m.

$$\bar{\sigma} = 60 \text{ kg/cm}^2$$

E = 0,12 . 10⁶ kg/cm² Calculer la charge critique.

$$I_{\min} = \frac{24 \cdot 8^3}{12}$$

$$i = 2,31 \text{ cm.}$$

$$\lambda = \frac{l_f}{i} = \frac{400}{2,31} = 173$$

Formule d'Euler :

$$P_{cr} = \left(\frac{\pi}{l_f}\right)^2 \cdot E \cdot I_{\min} = 7570 \text{ kg}$$

La charge admissible :

$$\bar{P} = \frac{P_{cr}}{\alpha}$$

Et : $\alpha = 10$.

Donc :

$$\bar{P} = \frac{7570}{10} = 757 \text{ kg}$$

3. Soit une poutre de section carrée articulée en ses extrémités ayant une longueur de 1m, elle est soumise à une charge de compression P.

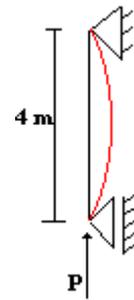


Fig.VII.5 Exemple d'étude 3.

On suppose que :

a: est le coté de section qui sera de 50mm.

$E = 10^5 \text{ MPa}$, $\sigma_e = 200 \text{ Mpa}$ et $\bar{\sigma} = 1600 \text{ kg/cm}^2$

Calculer la charge critique.

Solution :

$$l_f = l_0$$

$$\lambda = \frac{l_f}{i}$$

$$\text{et } i = 1.49 \text{ cm.}$$

$$\text{Donc : } \lambda = 69.43.$$

Avec la formule de Rankine :

$$P < A \cdot \frac{\bar{\sigma}}{1 + k' \left(\frac{l_f}{i}\right)^2}$$

Avec:

$$k' = \frac{\sigma_e}{\pi^2 \cdot E}$$

On aura :

$$P < 2.68 \cdot 10^4 \text{ kg}$$

Et :

$$P_{cr} = 2.68 \cdot 10^4 \text{ kg.}$$

Chapitre VIII

CHAPITRE VIII: Treillis isostatique.

Définition :

Un système est dit triangulé lorsqu'il est constitué par un ensemble de barre rectiligne articulé entre elle dans une configuration de triangle juxtaposé dans un même plan.

Ce type de structure ne subit aucun moment fléchissant, par contre, par des efforts de compression ou de traction.

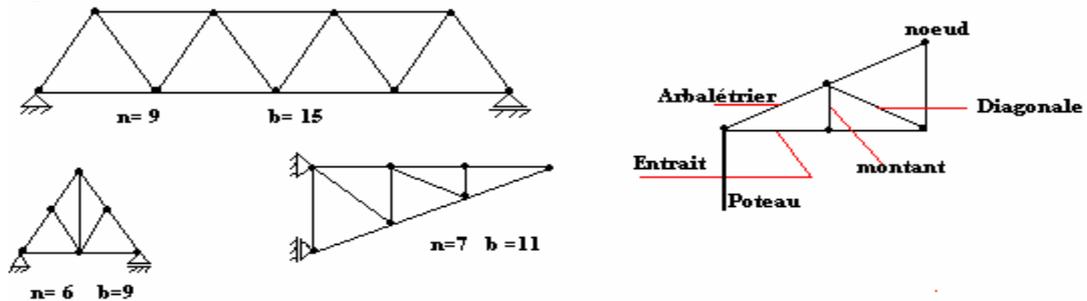


Fig.VIII.1 Schéma de montage de treillis

La ferme est constituée d'une membrure supérieure (arbalétrier) et d'une membrure inférieure (entrait).

D'une âme à treillis constituée d'éléments verticaux (montants) et obliques (diagonales).

IX-1 Hypothèses de calculs :

1. Les barres sont considérées comme rigides et indéformables.
2. Les barres sont considérées comme articulées sans frottement aux nœuds.
3. Le poids propre des barres est négligeable vis à vis les charges extérieures sollicitant le système.
4. Les charges extérieures sont appliquées aux nœuds.
5. Les barres sont soumises soit à la traction soit à la compression.

IX-2 Système isostatique :

Un treillis est isostatique intérieurement si $(b = 2.n - 3)$

b: nombre de barres

n : nombre de nœuds.

Si $b > 2.n - 3$ le système est hyperstatique intérieurement. Si $b < 2.n - 3$ le système est instable.

IX-3 Calculs des efforts dans les barres :

Après vérification de $b = 2.n - 3$, il faut vérifier si le système est extérieurement isostatique (nombre inconnue). Pour ce faire, le calcul des efforts dans les barres se fait selon trois méthodes :

1. Méthode graphique (abandonnée) CREMONA
2. Méthode des nœuds
3. Méthode des sections

IX-3-1 Méthode des nœuds :

Elle est utilisée si le nombre des forces inconnues agissant sur un nœud sont égales aux plus à 2 (≥ 2). Au niveau de chaque nœud, on écrit l'équation de la statique.

Exemple :

Calculer les efforts internes de la structure suivante
Isostatique intérieurement : $b = 2.n-3$

$$b = 6.2-3 = 9 \text{ vérifiée}$$

Le système est isostatique extérieurement ($n_i=n_e$).

$$\text{Donc : } V_A=V_B = 10t$$

Nœud A :

$$\sum F_V=0 \Rightarrow 10 + N_{AD}.\sin(\alpha)=0$$

$$N_{AD} = -\frac{10}{\sin(\alpha)}$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos(\alpha) = 0.555$$

$$\text{et } \sin(\alpha)=0.832$$

Donc :

$$N_{AD} = -\frac{10}{\sin(\alpha)} = -18.01t$$

$$\sum F_H=0 \Rightarrow N_{AF} + N_{AD}.\cos(\alpha)=0$$

Donc :

$$N_{AF} = 15t.$$

Nœud D :

$$\sum F_V=0 \Rightarrow -5 - N_{AD}.\sin(\alpha) + N_{DC}.\sin(\alpha) - N_{DF}.\sin(\beta)=0$$

$\beta=\alpha$, donc :

$$N_{DC} - N_{DF} = -8.99t$$

$$\sum F_H=0 \Rightarrow N_{CD}.\cos(\alpha) + N_{CE}.\cos(\alpha)=0$$

$$N_{CE} = -13.49t.$$

$$\sum F_V=0 \Rightarrow -10 - N_{CE}.\sin(\alpha) - N_{CD}.\sin(\alpha) - N_{CF}=0$$

$$N_{CF} = 4.97t.$$

Nœud E :

$$\sum F_H=0 \Rightarrow -N_E.\cos(\alpha) - N_{EC}.\cos(\alpha) + N_{EB}.\cos(\alpha)=0$$

$$\sum F_V=0 \Rightarrow -5 + N_{EC}.\sin(\alpha) - N_{EF}.\sin(\alpha) - N_{EB}.\sin(\alpha)=0$$

$$N_{EF} = -4.5t, N_{EB} = -18t.$$

Nœud F :

$$\sum F_H=0 \Rightarrow N_{EB} - N_{FA} - N_{FD}.\cos(\alpha) + N_{FE}.\cos(\alpha)=0$$

$$N_{FB} = 15t.$$

Vérification : Nœud B :

$$\sum F_H=0 \Rightarrow -N_{FB} - N_{BE}.\cos(\alpha)=0 \text{ Vérifiée.}$$

$$\sum F_V=0 \Rightarrow V_B + N_{BE}.\sin(\alpha)=0 \text{ Vérifiée.}$$

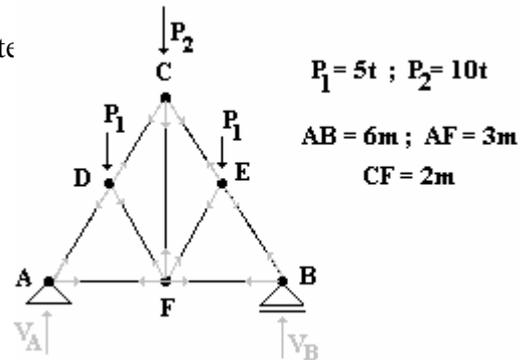
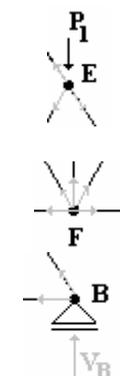
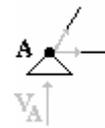


Fig.VIII.2 Exemple 1



IX-3-2 Méthode des sections :

Le principe de la méthode consiste à déterminer l'effort dans une barre quelconque sans avoir au préalable à calculer les efforts dans les autres barres (comme pour la méthode précédente). Le principe est le suivant :

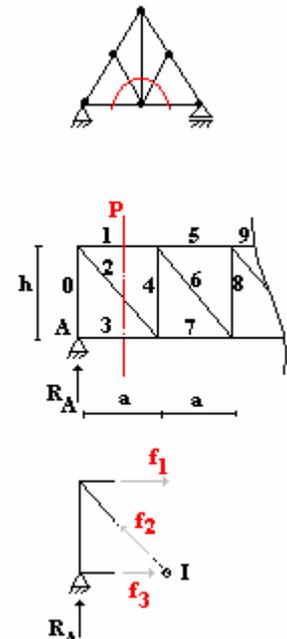
1. On coupe le treillis en deux parties par un plan (P) qui sectionne au maximum trois barres ou les efforts sont inconnus.
2. On écrit pour l'un des tronçons pour les forces extérieures un équilibre des forces intérieures existant dans les barres coupées. Pour ce faire, on écrit l'équilibre des moments par rapport à un point.

le plan P coupe les barres 1,2,3 $f_i = ?$

$$\sum M_{f/I} = 0 \Rightarrow f_1 \cdot h + R_A \cdot a = 0$$

Pour cela, on écrit $\sum M$ par rapport au point I d'intersection de deux barres prises parmi les trois.

3. On obtient l'effort dans la troisième barre.

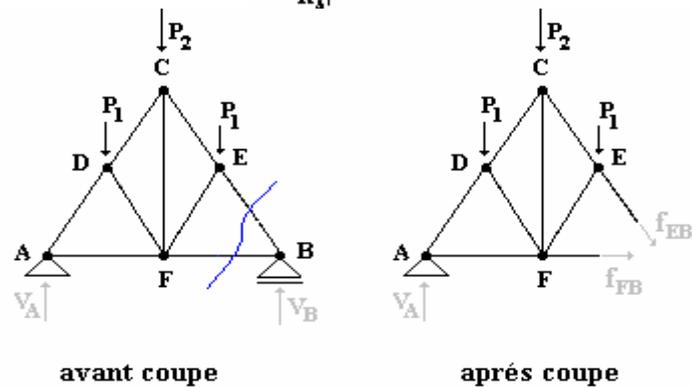


Exemple :

Reprendre l'exemple précédent, calculer l'effort dans la barre BF. On coupe au niveau de la barre BF et BE. En appliquant la somme des moments vis à vis le point C, on obtient :

$$\sum M_{/C} = 0 \Rightarrow$$

$$V_A \cdot 3 - P_1 \cdot 1.5 + P_1 \cdot 1.5 - f_{FB} \cdot 2 = 0, f_{FB} = 15t$$



IX-3-3 Méthode graphique :

La méthode graphique dite CREMONA permet de déterminer graphiquement les efforts dans les barres d'un treillis isostatique en équilibre.

- Elle consiste à isoler chaque nœud du système soumis simultanément au forces intérieure et extérieure dans les barres.
- Il est possible d'utiliser cette méthode que si le nombre de forces inconnues agissant sur un nœud est au plus égal à 2 (≤ 2).
- A l'équilibre le polygone des forces est fermé.

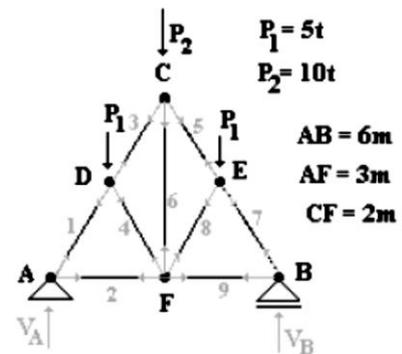


Fig.VIII.3 Exemple 2

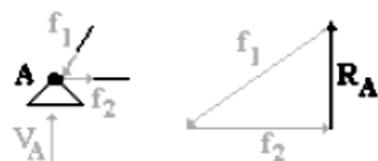
Exemple : Nœud A :

Echelle $2 \cdot 10^{-2}$ mm/daN.

Le nœud A est en équilibre sous l'action des trois forces (R_A, f_1, f_2)

f_1 : est la force intérieure agissant sur le tronçon AB d'intensité inconnue.

f_2 : est la force intérieure agissant sur le tronçon AB d'intensité inconnue.

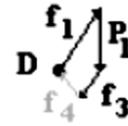
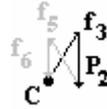


Nœud D :

Les forces en équilibre, dans l'ordre où on les rencontre en tournant autour de D dans le sens des aiguilles d'une montre sont :

La force f_1 (connue). La force P_1 .

La force f_3 dans DC. La force f_4 dans DF.

**Nœud C :**

ETC...

Chapitre IX

CHAPITRE IX: Assemblage boulons ordinaires, HR.

Définition :

Pour assurer la stabilité et le montage d'un système triangulé ou de charpente, il est nécessaire de prévoir un montage sûr et efficace et cela ne peut se faire que si les pièces mises en place sont reliées par soudure ou par boulonnage.

Il existe trois moyens d'assemblage :

- Rivet
- Boulons ordinaires
- Boulons HR (avec précontrainte)

Les rivets constituent le premier moyen d'assemblage qui a été utilisé en construction métallique, actuellement il est préférable d'utiliser les boulons ou boulons et la soudure.

IX-1 Disposition des boulons:

La disposition est suivant des lignes ou des fils. Deux dispositions peuvent exister en chaîne et aléatoire (voir figure 1).

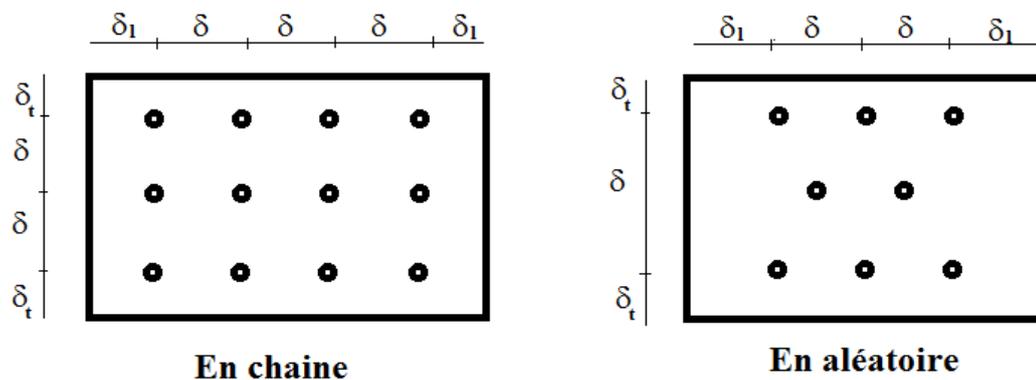


Fig.IX.1 Représentation en plan de la disposition des boulons.

Il faut assurer une distance minimum entre les trous de boulons afin :

1. D'assurer la répartition uniforme des efforts entre boulons.
2. D'éviter le déchirement de pièces assemblées.
3. Une bonne disposition des boulons.

Conformément aux règles CM66, on peut écrire :

$3.d \leq \delta \leq 7.d$ Pour les fils extérieurs (contour de l'assemblage) aux cas de pièces soumises aux intempéries (oxydation, corrosion),

$3.d \leq \delta \leq 10.d$ Pour les fils extérieurs (sans oxydation),

$\delta = 30 e_{\min}$ Pour les fils intérieurs.

Sachant que :

d : Diamètre du trou de boulons $d = \Phi + 2\text{mm}$

Φ : Diamètre du boulon.

e_{\min} : l'épaisseur de la plus mince des plaques assemblées.

Dans le sens l'effort :

$$\left[1,5 \cdot d \text{ ou } \frac{0,8 T}{e \cdot \sigma_e} \right] \leq \delta_{11} \leq 4 \cdot d$$



$$\left[1,5 \cdot d \text{ ou } \frac{0,8 T}{e \cdot \sigma_e} \right] \leq \delta_{12} \leq 2,5 \cdot d$$

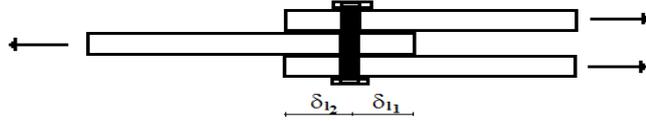


Fig.IX.2 Représentation de dimensions de recouvrement.

T : effort pondéré de cisaillement exercé sur un boulon par une pièce d'épaisseur (e).

Dans le sens transversal à l'effort :

$$1,5 d \leq \delta_i \leq 2,5 d$$

IX-2 Principe d'assemblage par boulons :

Le boulon est un élément constitué de deux éléments (corps et écrous). Les plus utilisés en CM66 sont ceux à tête prismatique à 6 pans et avec des diamètres de 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 et 24. Sachant qu'il est possible d'obtenir directement la contrainte caractéristique pour classer la qualité σ_{red} suivant la norme NF E27-005.

Classe de qualité	4.6	4.8	5.6	5.8	6.6	6.8	6.9	8.8	10.9
σ_{red} [N/mm ²]	240	280	300	340	350	410	410	450	670

IX-3 Base de Calculs :

Les boulons subissent le cisaillement dû à la pression diamétrale et à la traction (arrachement des têtes), les vérifications de la résistance des boulons font intervenir soit : A : la section de la tige lisse

A_r : la section de la tige fileté

Le tableau 1 de l'annexe 14,12 des règles CM66 donne la valeur de la section (A_r) des boulons utilisés (ordinaires avec $\sigma_e = 24 \text{ daN/mm}^2$),

Diamètre	\varnothing (mm)	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Section de tige lisse	A (mm ²)	50,2	78,5	113	154	201	254	314	380	452
Section résistante	A_r (mm ²)	36,6	58,0	84,3	115	157	192	245	303	353
Efforts pondérés admissibles :										
- à la traction	N (daN)	700	1 115	1 620	2 210	3 015	3 885	4 700	5 820	6 780
- au cisaillement	partie lisse T (daN)	780	1 225	1 760	2 400	3 135	3 960	4 900	5 930	7 050
	partie filetée T (daN)	570	905	1 315	1 795	2 450	2 995	3 820	4 730	5 510

A- calcul des boulons au cisaillement :

Sachant que T est l'effort de cisaillement pondéré exercé sur chaque section cisailé du boulon, il est nécessaire de vérifier :

$$1,54 \frac{T}{A_r} \leq \sigma_{red}$$

B- calcul des boulons à la pression diamétrale :

A partir de :

$$\frac{T}{d \cdot e} \leq 3 \cdot \sigma_e$$

C - calcul des boulons à la traction :

Si N est l'effort pondéré de la traction exercé sur chaque boulon, il est nécessaire de vérifier :

$$1,25 \frac{N}{A_r} \leq \sigma_{red}$$

Remarque :

1/ ayant α : nombre de plans de cisaillement (ou glissement), la capacité du boulon sera de :

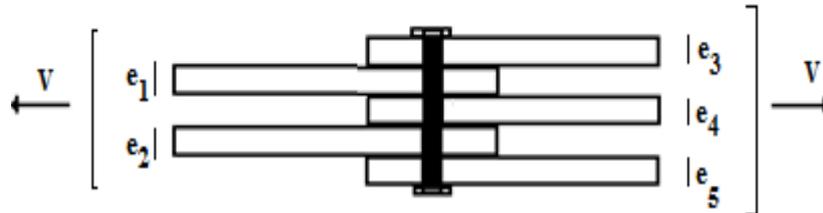


Fig.IX.3 Montage de plusieurs plaques.

$$\Sigma e_i = \min (\Sigma e_i = e_1 + e_2 ; \Sigma e_i = e_3 + e_4 + e_5)$$

La capacité portante d'un boulon sera :

$$T_b = \min (T_c, T_p)$$

Avec :

$$T_c = \alpha \cdot A_r \cdot \frac{1}{1,54} \cdot \sigma_{red}$$

Et

$$T_p = d \cdot \sum e_i \cdot 3 \cdot \sigma_e$$

2/ Dans le cas des boulons à la fois tractés et cisailés:

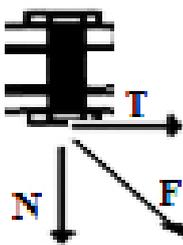


Fig.IX.4 Représentation de la force F sur un boulon.

F force exercée inclinée

Il faut vérifier que :

$$1,25 \frac{N}{A_r} \leq \sigma_{red} \text{ et } \sqrt{\frac{N^2 + 2,36 \cdot T^2}{A_r}} \leq \sigma_e$$

A_r : section filetée dans le cas où aucune disposition n'est prise,

3/ La disposition ne prend aucune limitation sur l'épaisseur des pièces assemblés.

4/ Les formules de vérification s'appliquent aussi aux boulons **HR** quand ils sont

utilisées sans précontrainte.

5/ Le diamètre des boulons doit répondre aux conditions suivantes sans limitation sur l'épaisseur des plats.

- $4d \geq \Sigma e_i$
- $d \geq e_c + 2\text{mm}$

Avec d : diamètre du trou

e_c : épaisseur du couvre joint

Et Φ_{\max} est obtenu par le tab 14.101 du CM66 (voir tableau 2).

Tableau 2 de l'annexe 14,101 des règles CM66 donne la valeur des diamètres normaux des boulons utilisés (ordinaires avec $\sigma_c = 24 \text{ daN/mm}^2$),

Boulons	Tôle et âme d'épaisseur	Cornière de largeur d'aile	Aile de fer U de hauteur	Ailes de poutrelles H de profil n°
8	2	30		
10	3	35		
12	4	40-45	80	
14	5	50	100 à 130	10 et 12
16	6	60	140 à 160	14
18	7	70	175 à 180	15 et 16
20	8	80-90	200 à 220	18
22	10 à 14	100-120	240 à 300	20 à 24
24	>14	>120		>24

6/ en cas d'utilisation de couvre joint :

L'épaisseur du couvre joint doit vérifier :

$$2 e_c \geq e$$

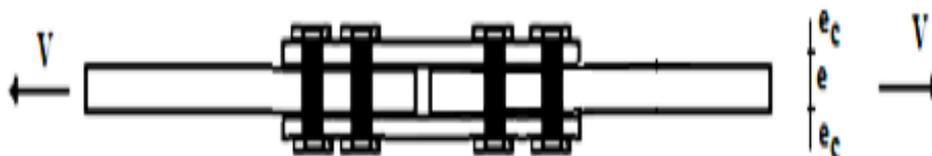


Fig.IX.5 Jonction de deux éléments avec plaques couvre joint.

Chapitre X

CHAPITRE X: Stabilité des structures en refends (étude de la torsion).

Définition :

Lorsque les efforts horizontaux s'avèrent trop importants, il est nécessaire de renforcer la structure par des murs-voiles (refends), ils assurent plus particulièrement la stabilité du bâtiment dans le cas où cette dernière est soumise aux efforts horizontaux (vents, séisme, ...) et où la torsion sera présente.

Deux types de refend existent, avec ouverture (porte, fenêtre ou porte fenêtre) et sans ouverture.

X-1 Détermination de la distribution des efforts horizontaux:

1-1 Hypothèses : Les hypothèses prises en compte sont :

- Les planchers indéformables,
- Les murs-voiles ont la même inertie (ou variation linéaire entre elle),
- Le contreventement est bien encasté au niveau des fondations,
- Le nombre de niveau d'étages dépasse 4,
- En torsion, le refend ne représente aucune rigidité.

1-2 Effort de translation:

A/ Les calculs dans le cas isostatique, sont :

Avec $L=a+b$

$$F_1 = \frac{T \cdot a}{L}$$

$$F_2 = \frac{T \cdot b}{L}$$

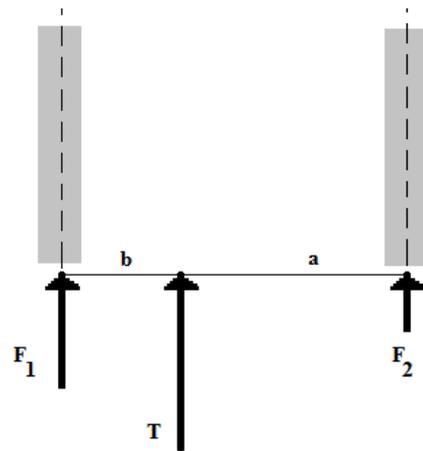


Fig.X.1 Représentation de la disposition des forces sur 2 refends.

B/ cas hyperstatique :

Avec I_i ($i=1, \dots, 4$) inertie de chaque refend

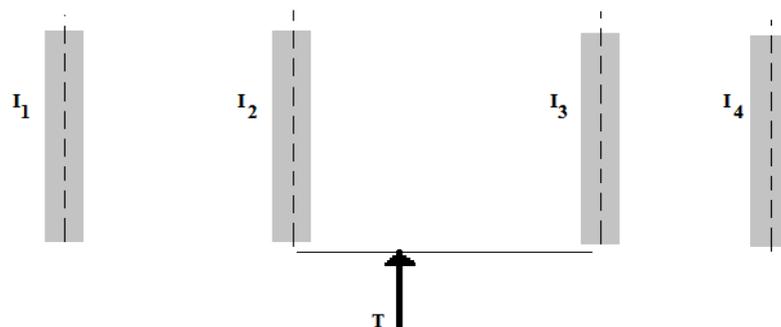


Fig.X.2 Représentation de la disposition des forces sur plusieurs refends.

Le système étudié peut être schématisé comme suit :

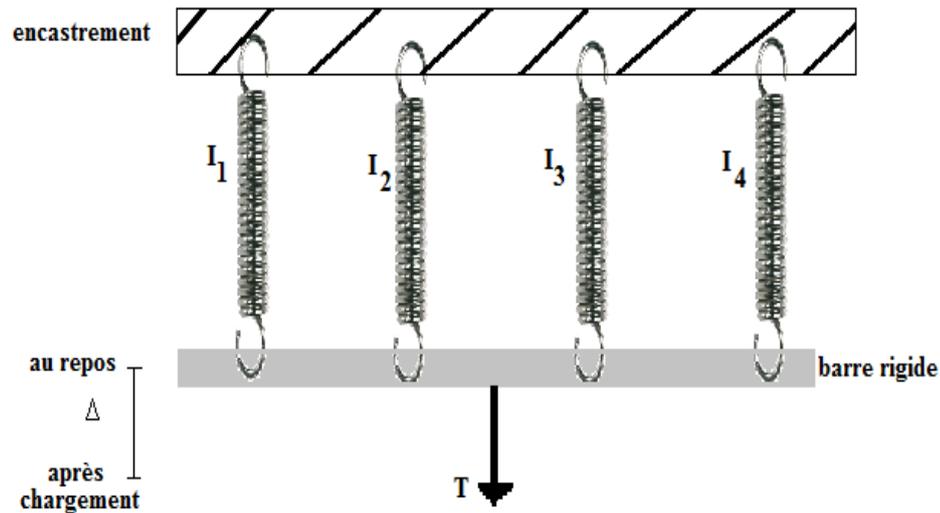


Fig.X.3 Schématisation des forces sur plusieurs ressorts.

Chaque ressort a une inertie propre à lui et réagit différemment de l'autre, avec :

$$\sum F_i = T$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = T \quad (\text{eq1})$$

$$F_1 = I_1 \cdot \Delta_1$$

$$F_2 = I_2 \cdot \Delta_2$$

$$F_3 = I_3 \cdot \Delta_3$$

$$F_4 = I_4 \cdot \Delta_4$$

Après chargement, le déplacement final de la barre est identique au déplacement de chaque ressort (il est important de considérer la barre comme indéformable), donc :

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = \Delta \Rightarrow$$

$$\frac{F_1}{I_1} = \frac{F_2}{I_2} = \frac{F_3}{I_3} = \frac{F_4}{I_4}$$

Il est possible d'écrire avec $\Delta_1 = \Delta$ la relation suivante :

$$F_2 = \frac{I_2}{I_1} \cdot F_1, \quad F_3 = \frac{I_3}{I_1} \cdot F_1, \quad F_4 = \frac{I_4}{I_1} \cdot F_1$$

Donc l'équation 1 peut s'écrire comme suit :

$$F_1 + \frac{I_2}{I_1} \cdot F_1 + \frac{I_3}{I_1} \cdot F_1 + \frac{I_4}{I_1} \cdot F_1 = T$$

Finalement :

$$F_1 = \frac{I_1}{I_1 + I_2 + I_3 + I_4} \cdot T$$

Et d'une manière générale :

$$F_i = \frac{I_i}{\sum_{i=1}^n I_i} \cdot T$$

Remarque :

- ✓ S'il y a une différence de hauteur d'étage (béton –acier), la formule devient obsolète,
- ✓ Le calcul des efforts de translation ne prend pas en compte l'excentricité de T,
- ✓ En translation, seuls les voiles parallèles à la force reprennent la force T.

X-2 Détermination de la distribution des efforts de torsion:

2-1 Détermination du centre de torsion :

On appelle centre de torsion ou centre de rigidité, le centre de rigidité des murs- voiles sachant que : le centre de gravité s'écrit comme suit :

$$\alpha_g = \frac{\sum S_i \cdot d_i}{\sum S_i}$$

Le centre de torsion s'écrit :

$$\alpha_c = \frac{\sum I_i \cdot d_i}{\sum I_i}$$

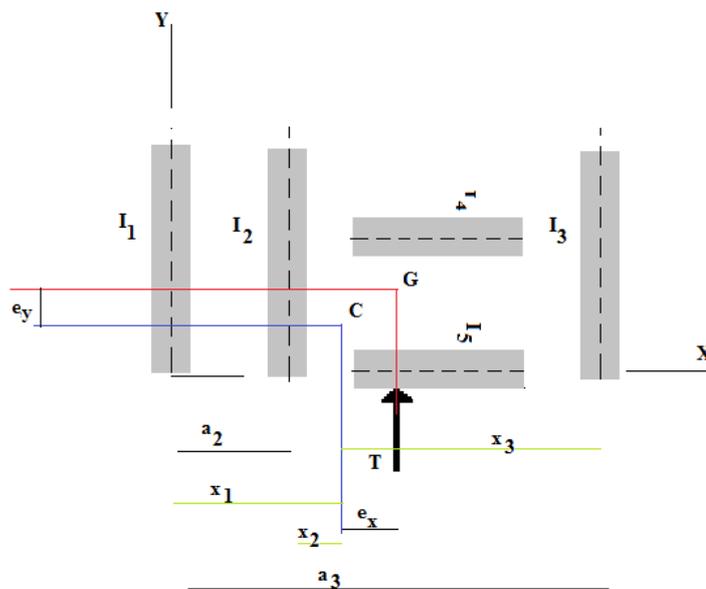


Fig.X.4 Exemple de disposition de mur voiles.

Sur la figure 4, G représenté le centre de gravité et C représente le centre de torsion.

$$\sum M_{/c} = 0$$

$$\begin{aligned} \sum M_{/c} &= I_1 \cdot x_1 + I_2 \cdot x_2 + I_3 \cdot x_3 \\ &= I_1 \cdot x_1 + I_2 \cdot (x_1 - a_2) + I_3 \cdot (x_1 - a_3) \\ &= x_1 (I_1 + I_2 + I_3) - I_2 \cdot a_2 - I_3 \cdot a_3 = 0 \end{aligned}$$

Donc : sachant que $a_1 = 0$, il est possible d'écrire :

$$x_1 = \frac{I_1 \cdot a_1 + I_2 \cdot a_2 + I_3 \cdot a_3}{I_1 + I_2 + I_3}$$

Et de manière générale:

$$x_i = \frac{\sum I_i \cdot a_i}{\sum I_i}$$

Et par analogie :

$$y_i = \frac{\sum I_i \cdot b_i}{\sum I_i}$$

2-2 Détermination des Efforts de torsion de chaque mur:

Suivant l'équation d'équilibre :

$$M_t = T \cdot e$$

$$= F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + F_3 \cdot x_3 + F_4 \cdot y_4 + F_5 \cdot y_5$$

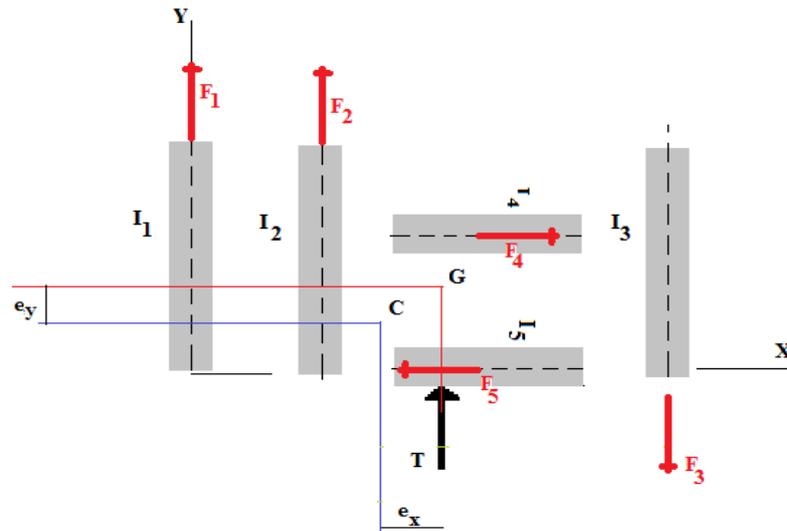


Fig.X.5 Représentation des réactions de chaque mur voile.

Suivant l'équation de la physique:

$$F_i = I_i \cdot \Delta_i \quad \text{avec } i=1, \dots, 5$$

Remarque:

Les déplacements des voiles sous l'effet du moment de torsion M_t ne sont pas les mêmes contrairement aux déplacements dus aux efforts de translation.

Les voiles ne subissent aucune rotation mais uniquement une translation en relation de sa réaction.

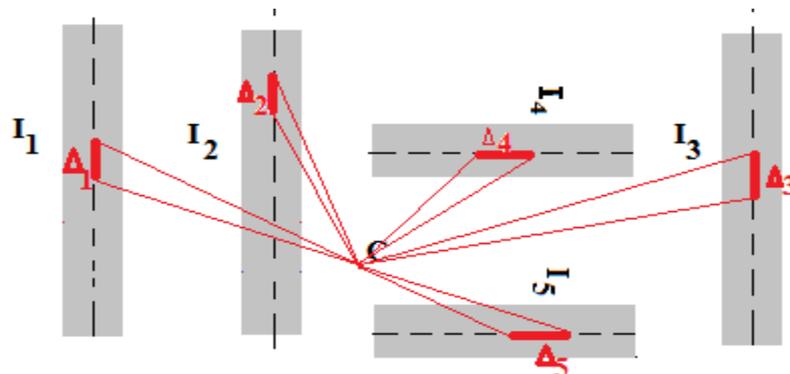


Fig.X.6 Représentation des déplacements de chaque mur.

Suivant Thales, l'équation de la géométrie :

$$\frac{x_1}{\Delta_1} = \frac{x_2}{\Delta_2} = \frac{x_3}{\Delta_3} = \frac{x_4}{\Delta_4} = \frac{x_5}{\Delta_5}$$

Sachant que :

$$\Delta_i = \frac{F_i}{I_i} \quad \text{avec } i = 1, \dots, 5$$

Donc : suivant la combinaison de l'équation de la physique et de Thales, il est possible d'écrire :

$$\Delta_2 = \frac{F_2}{I_2} = x_2 \cdot \frac{\Delta_1}{x_1}$$

Par analogie : sens longitudinal : $i=1,2$ et 3 (i visant les murs sens transversal)

$$\Delta_i = x_i \cdot \frac{\Delta_1}{x_1}$$

Et suivant le sens transversal : $j=4$ et 5 (i visant les murs sens longitudinal)

$$\Delta_j = y_j \cdot \frac{\Delta_1}{x_1}$$

Donc :

$$F_2 = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{I_2}{I_1} \cdot F_1 \quad ; \quad F_3 = \frac{x_3}{x_1} \cdot \frac{I_3}{I_1} \cdot F_1 \quad ; \quad F_4 = \frac{y_4}{x_1} \cdot \frac{I_4}{I_1} \cdot F_1 \quad ; \quad F_5 = \frac{y_5}{x_1} \cdot \frac{I_5}{I_1} \cdot F_1$$

En remplaçant le résultat des réactions obtenues dans l'équation d'équilibre, le résultat sera :

$$\begin{aligned} M_t = T \cdot e &= F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + F_3 \cdot x_3 + F_4 \cdot y_4 + F_5 \cdot y_5 \\ &= F_1 \cdot x_1 + \frac{x_2^2}{x_1} \cdot \frac{I_2}{I_1} \cdot F_1 + \frac{x_3^2}{x_1} \cdot \frac{I_3}{I_1} \cdot F_1 + \frac{y_4^2}{x_1} \cdot \frac{I_4}{I_1} \cdot F_1 + \frac{y_5^2}{x_1} \cdot \frac{I_5}{I_1} \cdot F_1 \\ &= \left(x_1 + \frac{x_2^2}{x_1} \cdot \frac{I_2}{I_1} + \frac{x_3^2}{x_1} \cdot \frac{I_3}{I_1} + \frac{y_4^2}{x_1} \cdot \frac{I_4}{I_1} + \frac{y_5^2}{x_1} \cdot \frac{I_5}{I_1} \right) \cdot F_1 \end{aligned}$$

Donc :

$$F_1 = \frac{M_t}{x_1 + \frac{x_2^2}{x_1} \cdot \frac{I_2}{I_1} + \frac{x_3^2}{x_1} \cdot \frac{I_3}{I_1} + \frac{y_4^2}{x_1} \cdot \frac{I_4}{I_1} + \frac{y_5^2}{x_1} \cdot \frac{I_5}{I_1}}$$

Finalement : Avec la variation de ($i=1,2$ et 3) et ($j=4$ et 5), l'équation sera :

$$F_i = M_t \cdot \frac{x_i \cdot I_i}{\sum I_i \cdot x_i^2 + \sum I_j \cdot y_j^2}$$

$$F_j = M_t \cdot \frac{y_j \cdot I_j}{\sum I_i \cdot x_i^2 + \sum I_j \cdot y_j^2}$$

Remarque :

Cette écriture n'est valable que si la hauteur d'étage est la même y compris le matériau utilisé, dans le cas contraire la rigidité sera k_i au lieu de I_i .

Chapitre XI

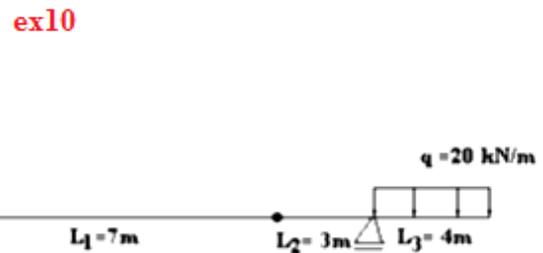
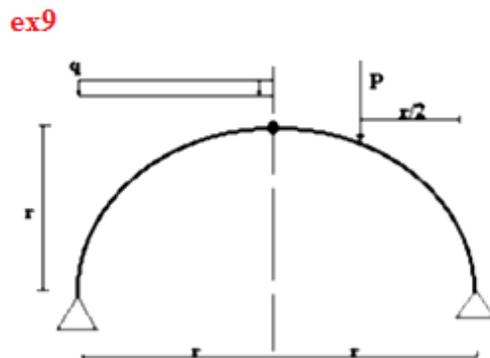
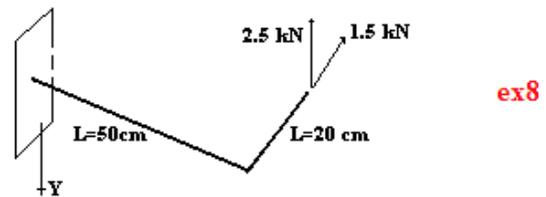
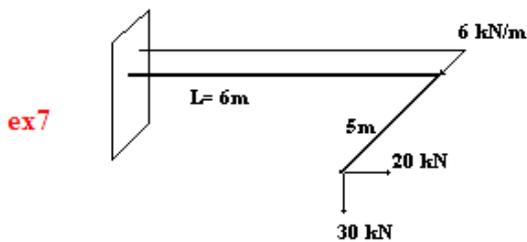
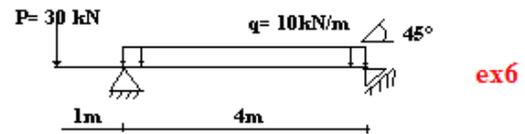
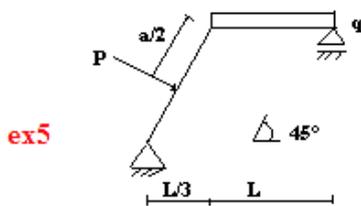
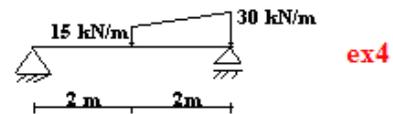
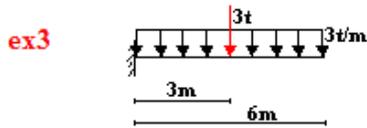
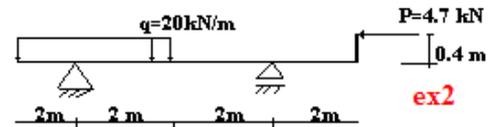
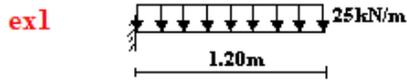
CHAPITRE XI:

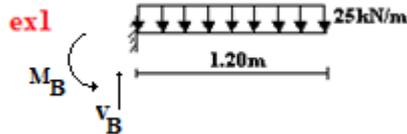
EXERCICES

1/ Exercices, calcul des réactions

Exercice n°1 :

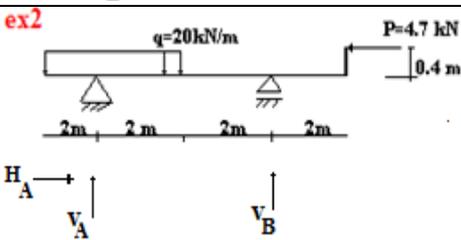
Calculer les réactions au niveau des appuis des systèmes représentés sur les figures suivantes :



Résultats :**Exercice1 :**

$$V_B = 30 \text{ kN},$$

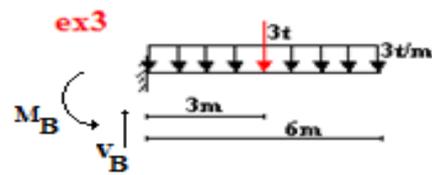
$$M_B = 18 \text{ kN.m}$$



$$V_A = 80,47 \text{ kN},$$

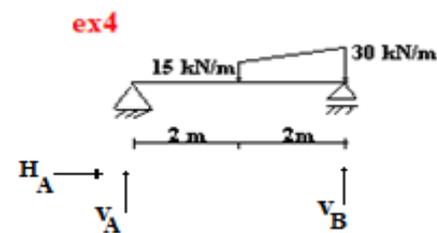
$$H_A = 4,7 \text{ kN},$$

$$V_B = -0,47 \text{ kN},$$



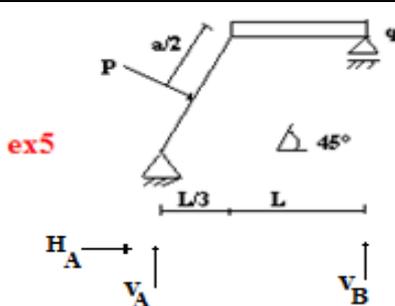
$$V_B = 21 \text{ t},$$

$$M_B = 63 \text{ t.m}$$



$$V_A = 10 \text{ kN},$$

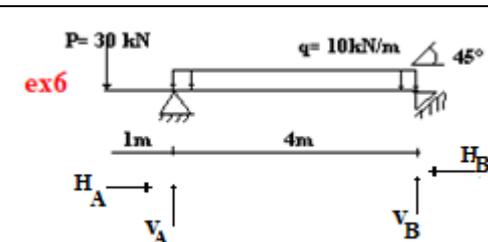
$$V_B = 35 \text{ kN},$$



$$V_A = -q \cdot l - P \left(l \cdot a \cdot \frac{3}{16} + \frac{5\sqrt{2}}{12} \right)$$

$$V_B = 2 \cdot q \cdot l + P \left(l \cdot a \cdot \frac{3}{16} + \frac{\sqrt{2}}{12} \right)$$

$$H_A = -P \cdot \sin(45^\circ)$$

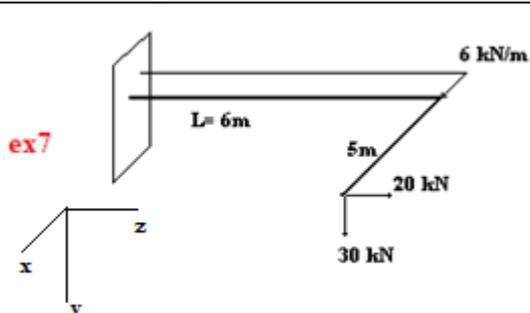


$$V_A = 57,5 \text{ kN},$$

$$H_A = 12,5 \text{ kN},$$

$$V_B = 17,68 \cdot \sin(\alpha) \text{ kN},$$

$$H_B = 17,68 \cdot \cos(\alpha) \text{ kN},$$



$$V_x = 36 \text{ kN},$$

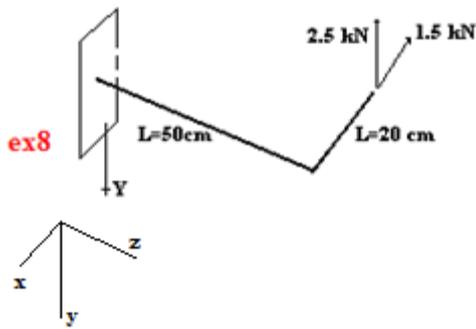
$$V_y = 30 \text{ kN},$$

$$V_z = 20 \text{ kN},$$

$$M_x = 180 \text{ kN.m}$$

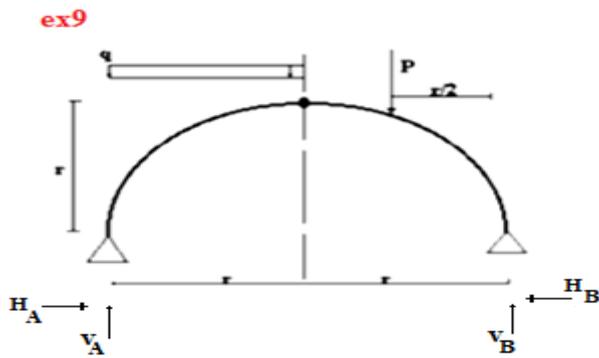
$$M_y = 8 \text{ kN.m}$$

$$M_z = 150 \text{ kN.m}$$

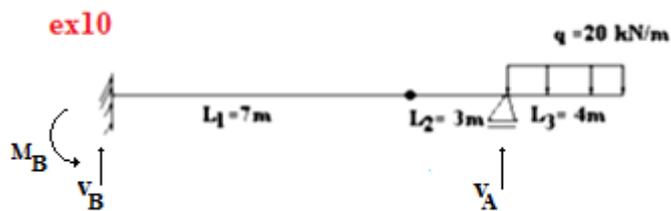


$$\begin{aligned} V_x &= 1,5\text{ kN}, \\ V_y &= 2,5\text{ kN}, \\ V_z &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x &= 1,25\text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_y &= 0,75\text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_z &= 0,5\text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V_A &= \frac{q \cdot r}{4} + \frac{3 \cdot P}{4} \\ V_B &= \frac{3 \cdot q \cdot r}{4} + \frac{P}{4} \\ H_A &= H_B \\ H_B &= \frac{q \cdot r}{4} + \frac{P}{4} \end{aligned}$$



$$V_A = 133,33\text{ kN},$$

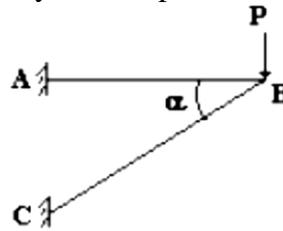
$$V_B = -53,33\text{ kN},$$

$$M_B = 373,33\text{ kN}\cdot\text{m}$$

2/ Exercices, traction et compression simples

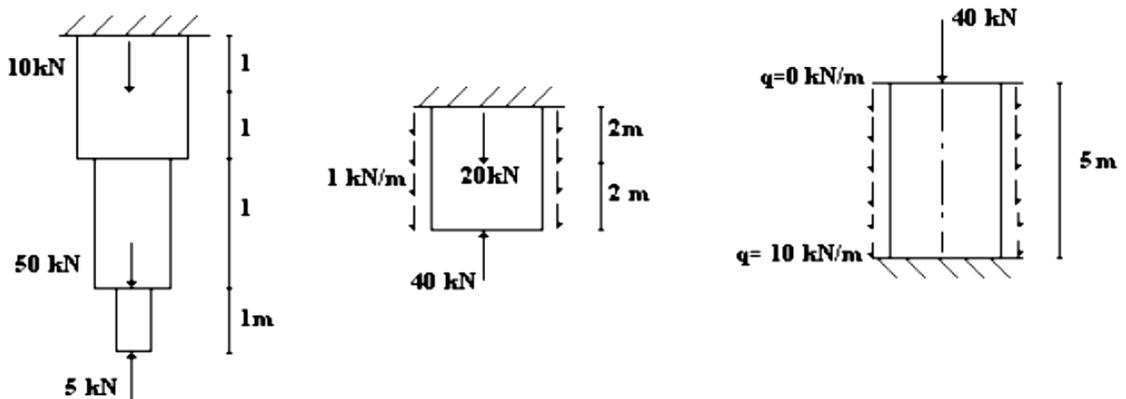
Exercice n°1 :

Déterminer les efforts internes du système représenté sur la figure :



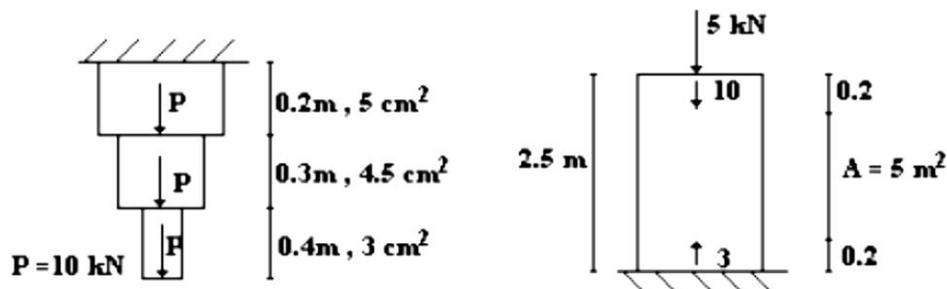
Exercice n°2 :

Tracer le diagramme des efforts normaux des systèmes représentés sur les figures suivantes:



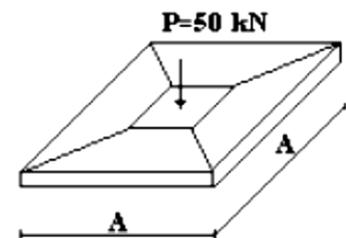
Exercice n°3 :

Tracer le diagramme des contraintes normales des systèmes indiqués sur les figures :



Exercice n°4 :

Déterminer les dimensions du système représenté sur la figure, la contrainte admissible du sol est de $\bar{\sigma}_{\text{sol}} = 2 \text{ kg/cm}^2$

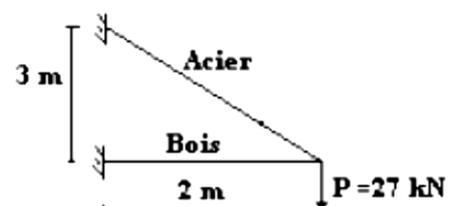


Exercice n°5 :

Déterminer les dimensions du système représenté sur la figure:

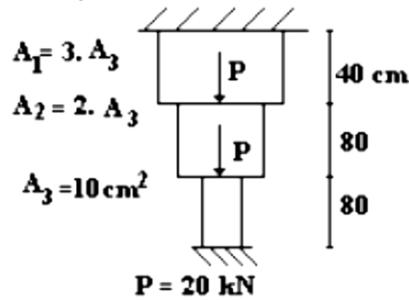
$$\bar{\sigma}_{\text{acier}} = 700 \text{ bars}$$

$$\bar{\sigma}_{\text{bois}} = 12 \text{ bars}$$

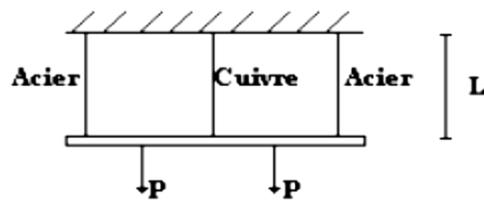


Exercice n°6 :

Calculer les efforts normaux du système suivant :

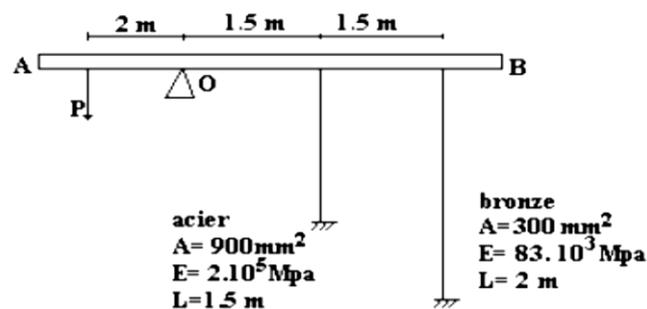
**Exercice n°7 :**

Déterminer les efforts normaux résultants dans le système suivant :

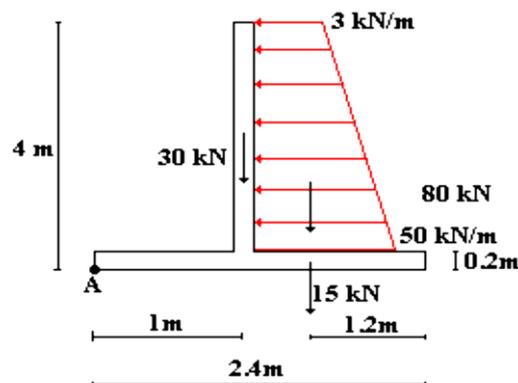
**Exercice n°8 :**

La barre AB est supposée totalement rigide et horizontale, avant l'application de la charge P, elle est articulée en «O» est fixée aux deux barreaux verticaux.

Quelle charge maximum P peut-on appliquer sachant que : $\bar{\sigma}_{\text{acier}} = 150 \text{ MPa}$; $\bar{\sigma}_{\text{bronze}} = 150 \text{ MPa}$.

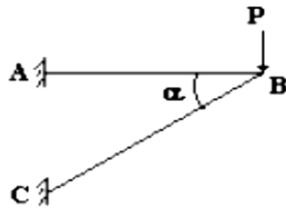
**Exercice n°9 :**

Etudier la stabilité au renversement du système indiqué sur la figure, par rapport au point A.



Résultats :

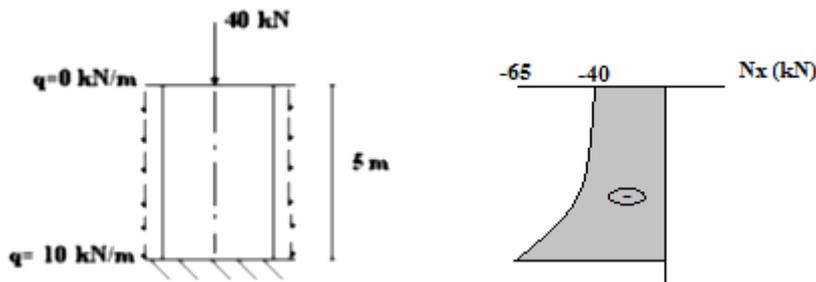
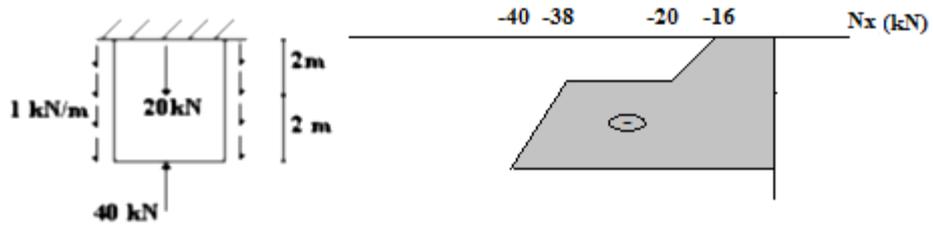
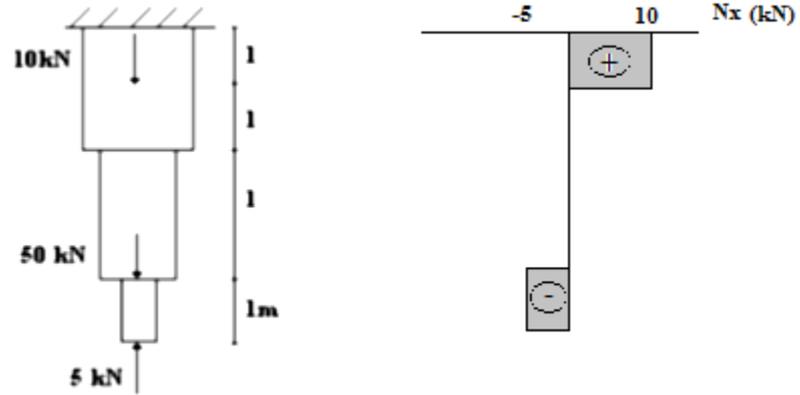
Exercice1 :



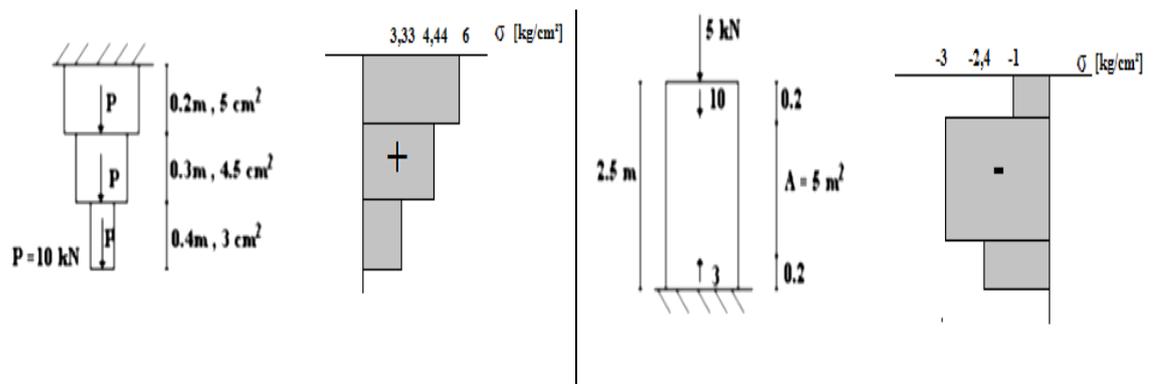
$$N_{BC} = -\frac{P}{\sin \alpha}$$

$$N_{BA} = P \cdot \cotg \alpha$$

Exercice2 :



Exercice 3 :



Exercice 4 :

Le résultat sera de $S \geq 2,5 \cdot 10^3 \text{ cm}^2$, et pour une semelle carrée $a \geq 50 \text{ cm}$

Exercice 5 :

Le résultat sera : $S_{\text{acier}} \geq 4,64 \text{ cm}^2$,

$$S_{\text{bois}} \geq 150 \text{ cm}^2,$$

Exercice 6 :

Avec les équations suivantes :

$$\sum F = 0 \quad \text{et} \quad \Delta l = 0$$

Nous permet d'avoir : $N_1 = -10 \text{ kN}$; $N_2 = 10 \text{ kN}$; $N_3 = 30 \text{ kN}$

Exercice 7:

$$\sum F = 0 \quad \text{et} \quad \Delta l_{\text{Acier}} = \Delta l_{\text{cuivre}} \Rightarrow \quad N_{\text{cu}} = \frac{2 \cdot P}{2 \cdot \frac{E_{\text{Ac}} \cdot S_{\text{Ac}}}{E_{\text{cu}} \cdot S_{\text{cu}}} + 1} \quad \text{et} \quad N_{\text{Ac}} = \frac{2 \cdot P}{2 \cdot \frac{E_{\text{Ac}} \cdot S_{\text{Ac}}}{E_{\text{cu}} \cdot S_{\text{cu}}} + 1} \cdot \frac{E_{\text{Ac}} \cdot S_{\text{Ac}}}{E_{\text{cu}} \cdot S_{\text{cu}}}$$

Exercice 8 : la barre est totalement rigide (indéformable)

$$N_A = 0,942 \cdot P$$

$$N_B = 0,195 \cdot P$$

$$P = \min(N_A, N_B)$$

Exercice 9 :

La question de stabilité est vérifiée que si $M_{\text{renversement}} \leq M_{\text{stabilité}}$;

Les calculs montrent une instabilité vue que :

$$M_{\text{renversement}} = 149 \text{ kN}$$

$$M_{\text{stabilité}} = 144 \text{ kN}$$

3/ Exercices, caractéristiques géométrique.

Exercice n°1 :

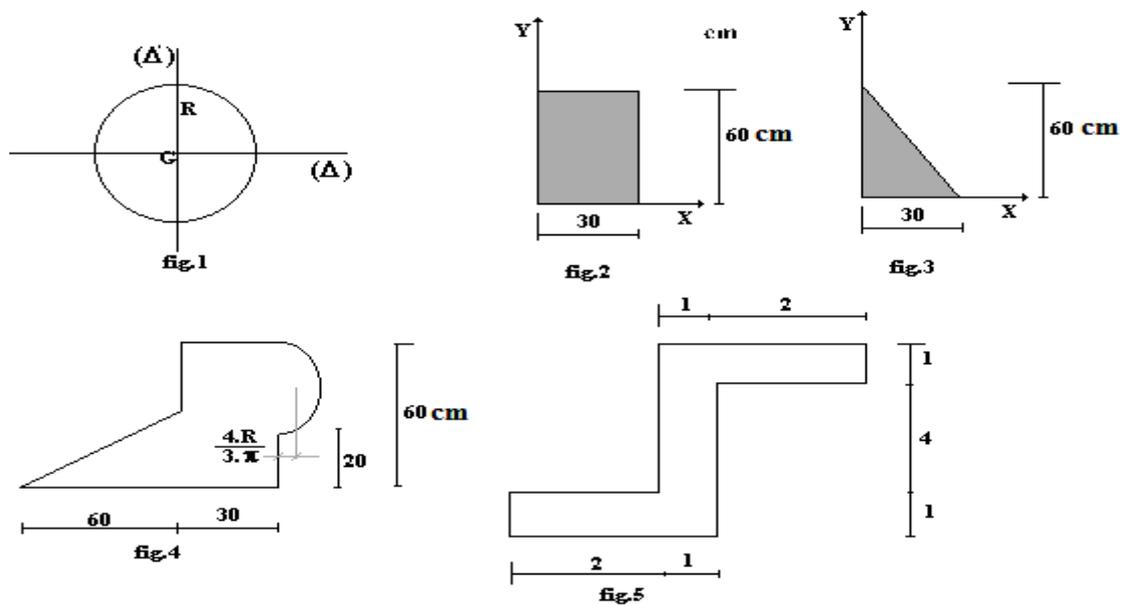
Calculer le moment d'inertie polaire d'une section circulaire de rayon R (voir fig.1) et le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ .

Exercice n°2 :

Déterminer le produit d'inertie par rapport à l'axe X des éléments indiqués sur les figures 2,3 ainsi que I_x pour la figure 3.

Exercice n°3 :

Calculer les moments d'inertie principaux et leurs directions des éléments indiqués sur les figures 4 et 5.



Résultats :**Exercice 1 :**

$$I_p = \frac{\pi \cdot R^4}{2}; I_{\Delta} = \frac{\pi \cdot R^4}{4}$$

Exercice 2 :**Fig 2 :**

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{3}; I_{xy} = \frac{b^2 \cdot h^2}{4}$$

Fig 3 :

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}; I_{xy} = \frac{b^2 \cdot h^2}{24}$$

Exercice 3 :**Fig 4 :** $X_G=68,6$ cm ; $Y_G= 26,48$ cm (par rapport à l'extrémité gauche),

$$I_x = 3363141,5 \text{ cm}^4; \quad I_{xG} = 102,58 \cdot 10^4 \text{ cm}^4; \quad I_{\max} = 2201,4 \cdot 10^4 \text{ cm}^4;$$

$$I_y = 17992426,8 \text{ cm}^4; \quad I_{yG} = 170 \cdot 10^4 \text{ cm}^4; \quad I_{\min} = 52,5 \cdot 10^4 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = 6930323,7 \text{ cm}^4; \quad I_{xyG} = 79,9 \cdot 10^4 \text{ cm}^4; \quad \alpha = 33,13^\circ$$

Fig 5 : Le centre de gravité total se situe au centre de l'âme,

$$I_{xG} = 43,33 \text{ cm}^4; \quad I_{\max} = 49,19 \text{ cm}^4;$$

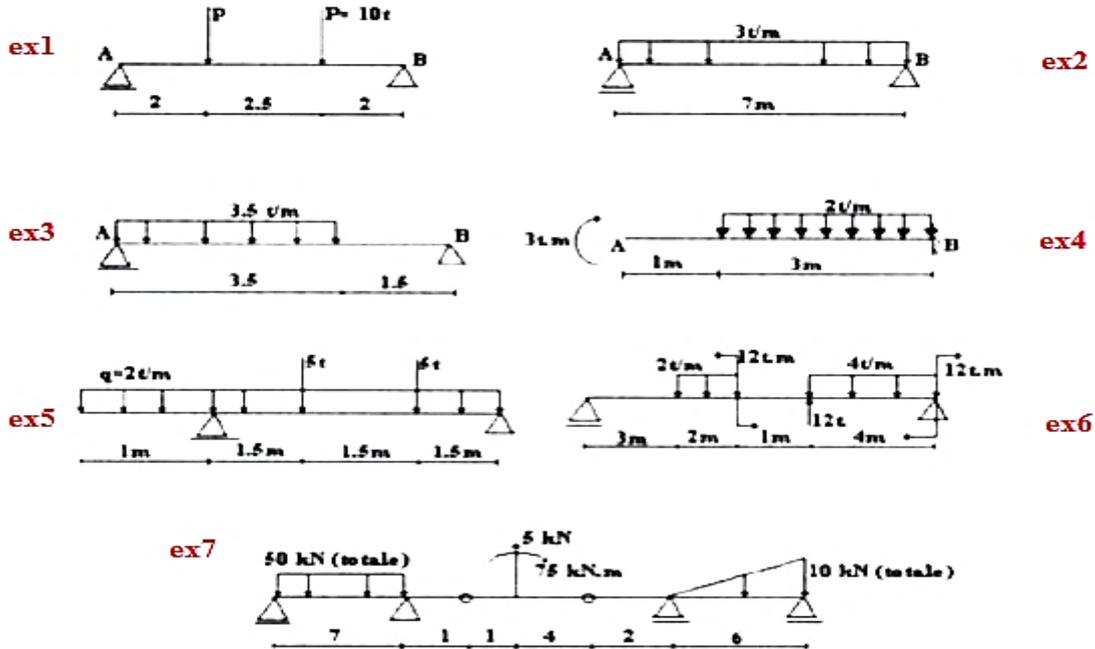
$$I_{yG} = 10,82 \text{ cm}^4; \quad I_{\min} = 4,96 \text{ cm}^4$$

$$I_{xyG} = 15 \text{ cm}^4; \quad \alpha = -21,35^\circ$$

4/ Exercices. Flexion simple.

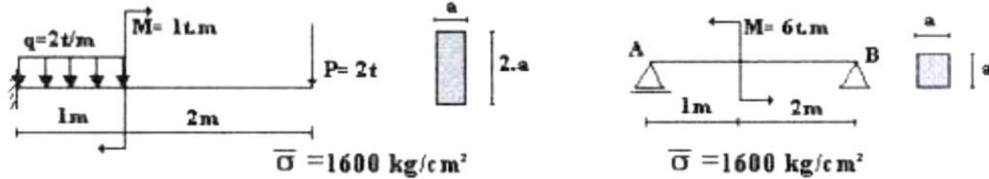
Exercice n°1 :

Tracer le diagramme des efforts tranchants et des moments fléchissant des poutres isostatiques suivantes :



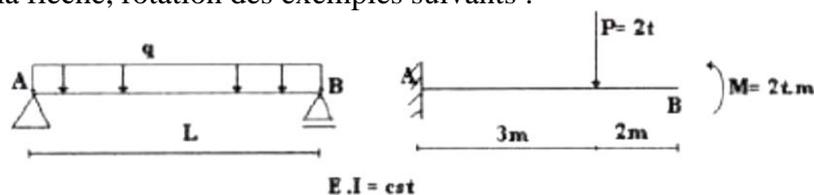
Exercice n°2 : Dimensionnement

Calculer les dimensions nécessaires des sections droites.

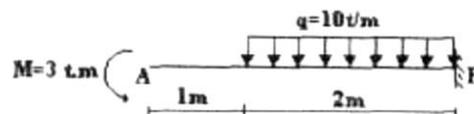


Exercice n°3 :

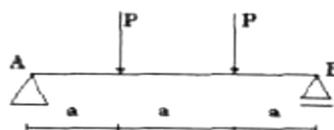
1. Calculer la flèche, rotation des exemples suivants :



2. Trouver $\theta(x)$ et $v(x)$, en utilisant la méthode des paramètres initiaux des poutres suivantes:



3. utiliser la méthode de Mohr pour résoudre les exercices suivant :



Résultats :

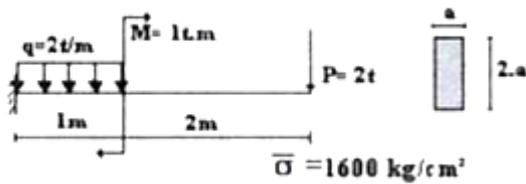
Exercice 1 :

<p>ex1</p> <p>$V_A = V_B = 10t$ $M_{max} = 20t.m$ $T_{max} = 10t$</p>	<p>ex2</p> <p>$V_A = V_B = 10,5t$ $M_{max} = 18,37t.m$ $T_{max} = 10,5t$</p>	<p>ex3</p> <p>$V_A = 7,96t$; $V_B = 4,29t$ $M_{max} = 9,04t.m$ à $x = 2,19m$ du point A $T_{max} = 7,96t$</p>
<p>ex4</p> <p>$V_B = T_{max} = 6t$ $M_{max} = 6t.m$ à l'encastrement</p>	<p>ex5</p> <p>$V_A = 11,72t$; $V_B = 9,28t$ $M_{max} = 12,05t.m$ à $x = 3,36m$ $T_{max} = 7,96t$</p>	<p>ex6</p> <p>$V_A = 0,8t$; $V_B = 7,2t$ $M_1 = 2,56t.m$ à $x = 3,4m$ $M_2 = 12t.m$; $M_3 = 15,2t.m$ $M_4 = 5,5t.m$ à $x = 8,2m$ $T_{max} = 8,8t$</p>

<p>ex7</p>	<p>$V_A = 27,22kN$; $V_B = 3,28kN$ $V_C = 22kN$; $V_D = 2kN$</p> <p>$M_1 = 53,74kN.m$ à $x = 3,88m$ $M_2 = 19kN.m$; $M_3 = 56kN.m$ $M_4 = 28kN.m$ $M_5 = 0,63kN.m$ à $x = 20,36m$</p> <p>$T_{max} = 27,22kN$</p>
-------------------	---

Exercice 2 :

Dimensionnement :

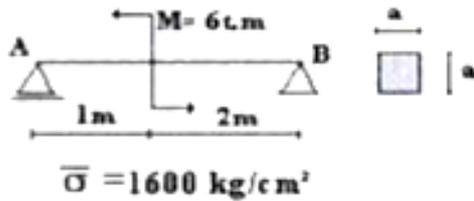


$$a_{\min} = 9,5 \text{ cm}$$

avec

$$V_B = T_{\max} = 4t$$

$$M_{\max} = 8t.m \text{ au niveau de l'encastrement}$$



$$a_{\min} = 11,5 \text{ cm}$$

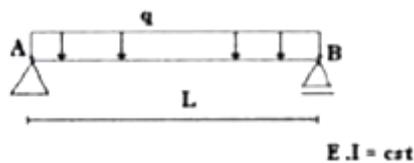
avec

$$V_A = -V_B = T_{\max} = 2t$$

$$M_{\max} = 4t.m, \text{ au niveau du moment de flexion concentré } (M = 6t.m)$$

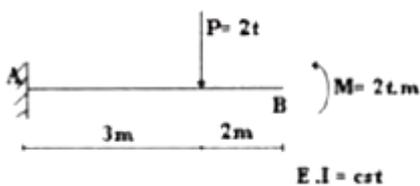
Exercice 3 :

1/



$$f(x) = \frac{q}{E.I} \cdot \left(\frac{x^4}{24} - \frac{l \cdot x^3}{12} - \frac{l^3 \cdot x}{24} \right)$$

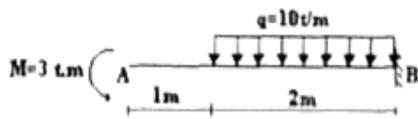
$$f_{\max} = f\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E.I}$$



$$f_1(x) = \frac{1}{E.I} \cdot \left(-\frac{x^3}{3} + 2 \cdot x^2 \right); x \in [0,3]$$

$$f_2(x) = \frac{1}{E.I} \cdot (-x^2 + 9x - 9); x \in [3,5]$$

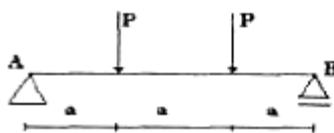
2/



$$f(x) = \frac{1}{E.I} \cdot \left(\frac{79}{6} - \frac{67 \cdot x}{3} + \frac{3}{2} x^2 + \frac{(x-1)_{\text{qd } x \geq 1}^4}{24} \right)$$

$$\theta(x) = \frac{1}{E.I} \cdot \left(-\frac{67}{3} + 3 \cdot x - \frac{(x-1)_{\text{qd } x \geq 1}^3}{6} \right)$$

3/



$$f_{\max} = f\left(\frac{3 \cdot a}{2}\right) = \frac{23}{24} \cdot \frac{P \cdot a^3}{E.I}$$

5/ Exercices, Flexion déviée, composée.

Exercice n°1 :

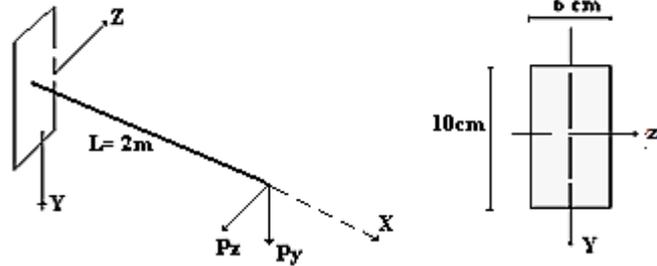
Calculer la charge maximale

P.

Données : poutre en bois :

 $\bar{\sigma}^+ = 100 \text{ kg/cm}^2$ (Traction) $\bar{\sigma}^- = 120 \text{ kg/cm}^2$

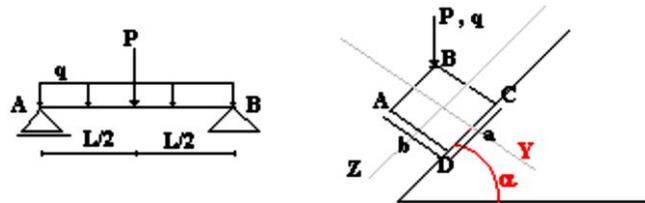
(Compression)

 $\alpha = 30^\circ$ par rapport à l'axe Y

Exercice n°2 :

Soit une poutre en bois, de longueur L, qui repose sur deux appuis. Elle supporte une charge uniformément répartie d'intensité q et une charge concentrée P au milieu de la poutre. La section de la poutre est rectangulaire et elle est disposée de telle sorte que la base fait un angle α avec l'horizontale. Déterminer :

1. La contrainte maximale.
2. Le déplacement maximal suivant Y et Z.
3. Le déplacement résultant.



Exercice n°3 :

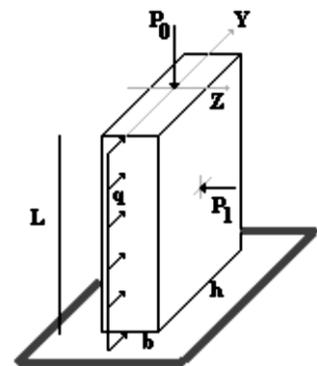
Le poteau est soumis aux efforts suivants :

 $P_0 = 24 \text{ t}$; $q = 200 \text{ kg/m}$, $P_1 = 400 \text{ kg}$

Dimensions du poteau :

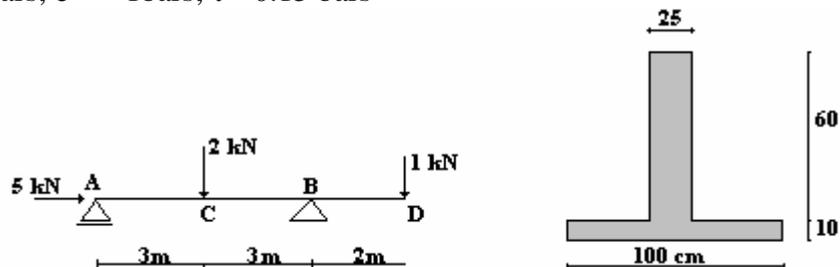
 $b = 12 \text{ cm}$, $h = 16 \text{ cm}$, $L = 2 \text{ m}$

1. Calculer σ_{\max} et σ_{\min} .
2. Déterminer l'équation de l'axe neutre.
3. Tracer l'axe neutre.



Exercice n°4 :

Vérifier la poutre ABCD « La poutre à une section en I ». On donne :

 $\bar{\sigma} = 0.6 \text{ bars}$; $\bar{\sigma}' = -1 \text{ bars}$; $\bar{\tau} = 0.15 \text{ bars}$ 

Résultats :**Exercice1:**

Sachant que :

+ Traction

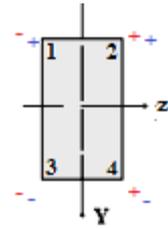
- compression

$$\sigma_{max}^{pt2} = -\frac{P \cdot \cos(\alpha) l}{\frac{b \cdot h^3}{12}} \left(-\frac{h}{2}\right) + \frac{P \cdot \sin(\alpha) l}{\frac{b^3 \cdot h}{12}} \left(\frac{b}{2}\right) = 3,4 P \leq \bar{\sigma}^+$$

$$\sigma_{max}^{pt3} = \left| -\frac{P \cdot \cos(\alpha) l}{\frac{b \cdot h^3}{12}} \left(\frac{h}{2}\right) + \frac{P \cdot \sin(\alpha) l}{\frac{b^3 \cdot h}{12}} \left(-\frac{b}{2}\right) \right| = |-3,4 P| \leq \bar{\sigma}^-$$

Finalement

$$P_{max} = \min\left(\frac{100}{3,4}, \frac{120}{3,4}\right) = 29,42 \text{ kg}$$

**Exercice 2 :**

$$\sigma_{max}^{pt2,3} = \frac{M_1}{\frac{a \cdot b^3}{12}} \left(\mp \frac{h}{2}\right) + \frac{M_2}{\frac{a^3 \cdot b}{12}} \left(\mp \frac{b}{2}\right)$$

Avec

$$M_1 = q \cdot \cos(\alpha) \frac{l^2}{8} + P \cdot \cos(\alpha) \frac{l}{4}$$

$$M_2 = q \cdot \sin(\alpha) \frac{l^2}{8} + P \cdot \sin(\alpha) \frac{l}{4}$$

Donc :

$$\sigma_{max}^{pt2,3} = \mp \frac{6 \cdot l}{a \cdot b} \left(\frac{q \cdot l}{8} + \frac{P \cdot l}{4}\right) \left(\frac{\cos(\alpha)}{b} + \frac{\sin(\alpha)}{a}\right)$$

La flèche max sera de:

$$f_{max,z} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_z \cdot l^4}{E \cdot I_y} + \frac{1}{48} \cdot \frac{P_z \cdot l^3}{E \cdot I_y} \quad \text{et} \quad f_{max,y} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_y \cdot l^4}{E \cdot I_z} + \frac{1}{48} \cdot \frac{P_y \cdot l^3}{E \cdot I_z}$$

$$f_{max} = \sqrt{f_{max,z}^2 + f_{max,y}^2}$$

Exercice 3 :

$$\sigma_{max}^{pt1} = 307,3 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{max}^{pt2} = -99 \text{ kg/cm}^2$$

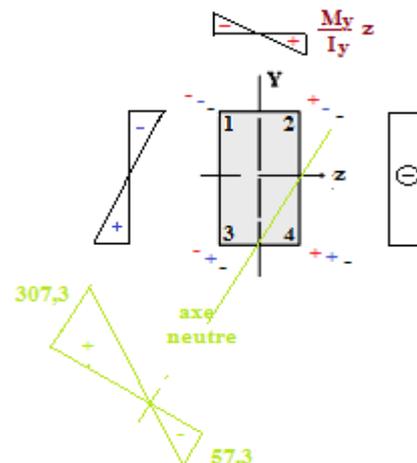
$$\sigma_{max}^{pt3} = -151 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{max}^{pt4} = 57,3 \text{ kg/cm}^2$$

Position de l'axe neutre,

$$\frac{N_x}{S} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = 0$$

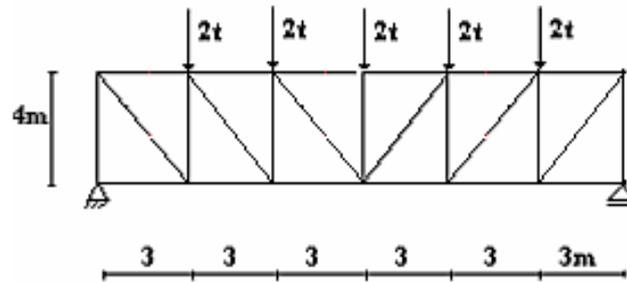
Tracer en fonction de z=0 et y=0



6/ Exercices, Treillis isostatiques

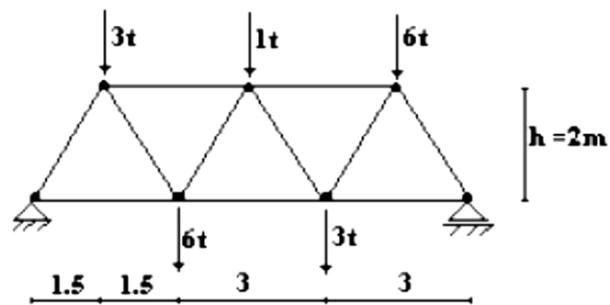
Exercice n°1 :

Calculer les efforts dans les barres en utilisant la méthode des sections.



Exercice n°2 :

Calculer les efforts dans les bars en utilisant la méthode des nœuds.

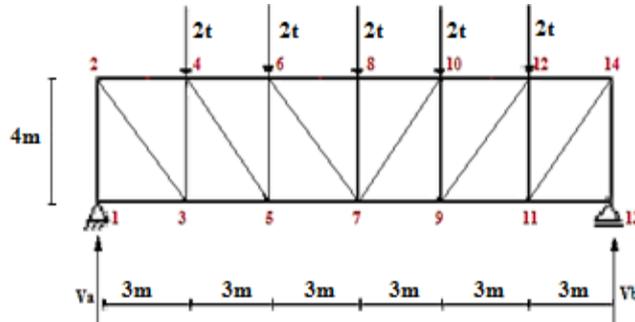


Résultats :**Exercice 1 :**

$b=2.n-3$ (système isostatique intérieurement et extérieurement).

Avec, $b=25$ barres et $n=14$ nœuds.

$V_a=V_b=5t$ (par symétrie)



En utilisant la méthode des sections :

$$N_{1,2} = 0 \text{ t}, N_{2,4} = 3,75 \text{ t}, N_{2,3} = 6,25 \text{ t}$$

$$N_{3,5} = 3,75 \text{ t}, N_{4,6} = -6 \text{ t}, N_{4,5} = 3,75 \text{ t}$$

$$N_{5,7} = 6 \text{ t}, N_{6,8} = 6,75 \text{ t}, N_{6,7} = 1,25 \text{ t}$$

$$N_{4,3} = 5 \text{ t}, N_{5,6} = -3 \text{ t}, N_{8,7} = -2 \text{ t}$$

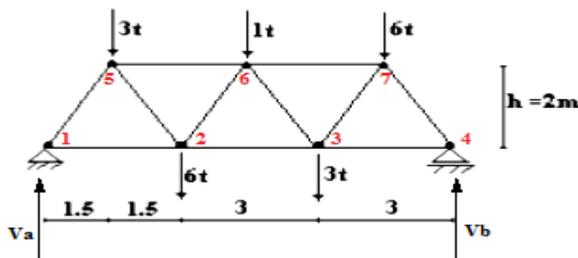
La symétrie de montage nous permet d'avoir les mêmes résultats pour les barres restantes

Exercice 2 :

$b=2.n-3$ (système isostatique intérieurement et extérieurement).

Avec, $b=11$ barres et $n=7$ nœuds.

$V_a=9t$, $V_b=10t$



En utilisant la méthode des nœuds :

$$N_{1,2} = 6,75 \text{ t}, N_{1,5} = -11,25 \text{ t}, N_{5,2} = 7,5 \text{ t}$$

$$N_{5,6} = -11,25 \text{ t}, N_{2,3} = 11,25 \text{ t}, N_{6,3} = -1,25 \text{ t}$$

$$N_{6,7} = 10,5 \text{ t}, N_{3,4} = 9 \text{ t}, N_{7,4} = -12,5 \text{ t}$$

7/ Stabilité des structures refends

Exercice 1 :

Calculer les efforts internes des refends sachant que les épaisseurs de chaque mur sont :

sont :

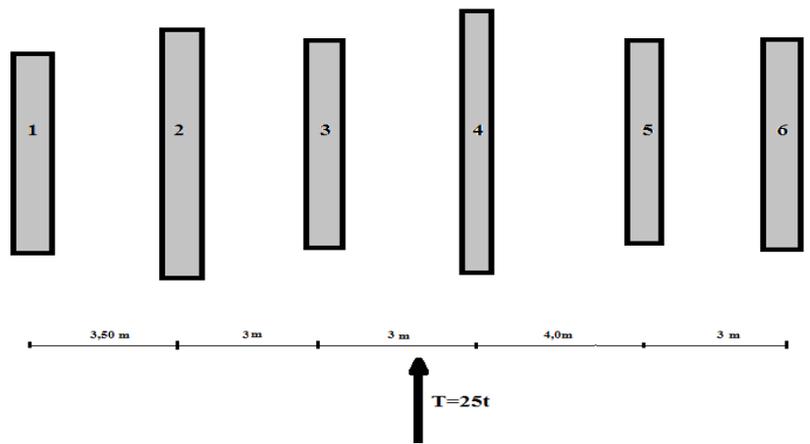
$$e_1=e_4=e_5=0,15 \text{ m}$$

$$e_2=e_3=e_6=0,2 \text{ m}$$

Et les longueurs sont :

$$l_1=l_3=l_6= 3,5 \text{ m}$$

$$l_2= 4,2 \text{ m} ; l_4= 4 \text{ m} ; l_5=3,8 \text{ m}$$

**Exercice 2 :**

Etudier le système suivant :

$$e_1=e_4=e_5=0,15 \text{ m}$$

$$e_2=e_3=e_6=0,2 \text{ m}$$

$$e_7=e_8=0,2 \text{ m}$$

$$e_9=e_{10}=0,25 \text{ m}$$

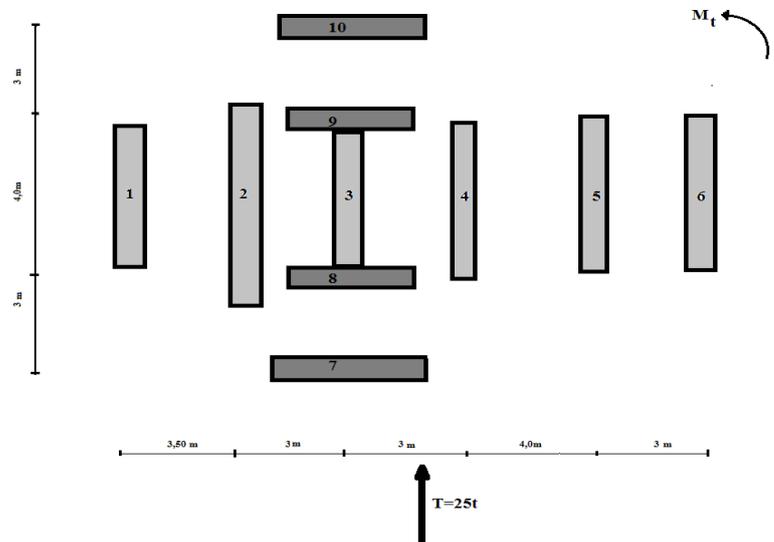
Et les longueurs sont :

$$l_1=l_3=l_6= 3,5 \text{ m}$$

$$l_2= 4,2 \text{ m} ; l_4= 4 \text{ m} ; l_5=3,6 \text{ m}$$

$$l_7=l_{10}= 4 \text{ m}$$

$$l_8=l_9= 3,8 \text{ m}$$



Résultats :**Exercice 1 :**

$$F_1=2,81 \text{ t} \quad F_2=6,58 \text{ t} \quad F_3=3,81 \text{ t} \quad F_4=4,27 \text{ t} \quad F_5=3,66 \text{ t} \quad F_6=3,81 \text{ t}$$

Exercice 2 :

Par rapport à l'origine o :

Le centre de gravité : $C_G(8,25, 5,00) \text{ m}$;

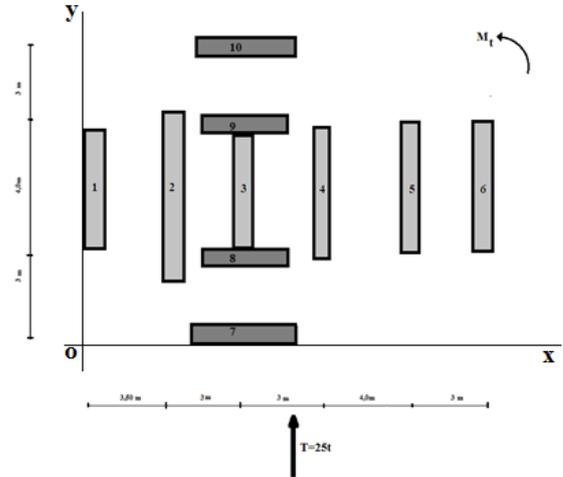
Le centre de torsion : $C_T(8,03, 4,48) \text{ m}$;

L'excentricité :

$$e_x = 0,22 \text{ m}$$

$$e_y = 0,52 \text{ m}$$

$$M_{t(\text{moment de torsion})} = T \cdot e_x = 5,5 \text{ t.m}$$



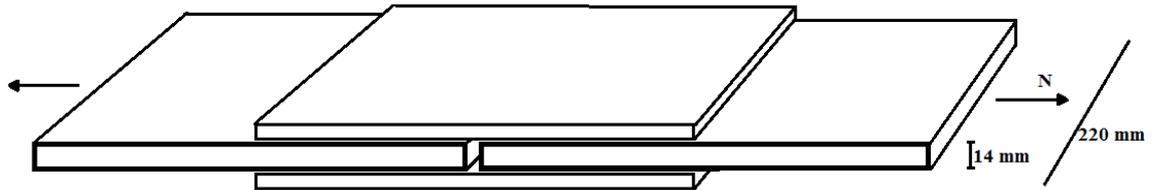
Et les forces seront :

$$F_i = M_t \cdot \frac{x_i \cdot I_i}{\sum I_i \cdot x_i^2 + \sum I_j \cdot y_j^2} ; F_j = M_t \cdot \frac{y_i \cdot I_j}{\sum I_i \cdot x_i^2 + \sum I_j \cdot y_j^2}$$

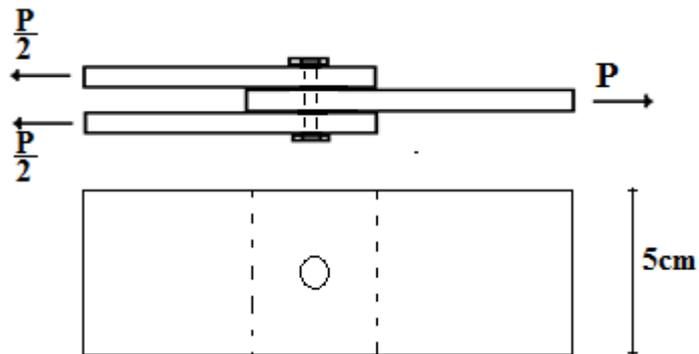
8/ Assemblages avec boulons

Exercice 1 :

Dimensionner l'assemblage suivant soumis à un effort de traction de 550 kN (Acier E24), les boulons utilisés sont ordinaires de classe 5.6

**Exercice 2 :**

Etudier le système suivant : (Acier E24)
 Epaisseur des plaques est de 2 cm, avec une largeur de 5 cm.
 $P=10t$



Résultat :**Exercice 1 :**

1/ $e_c=8$ mm épaisseur de couvre joint,

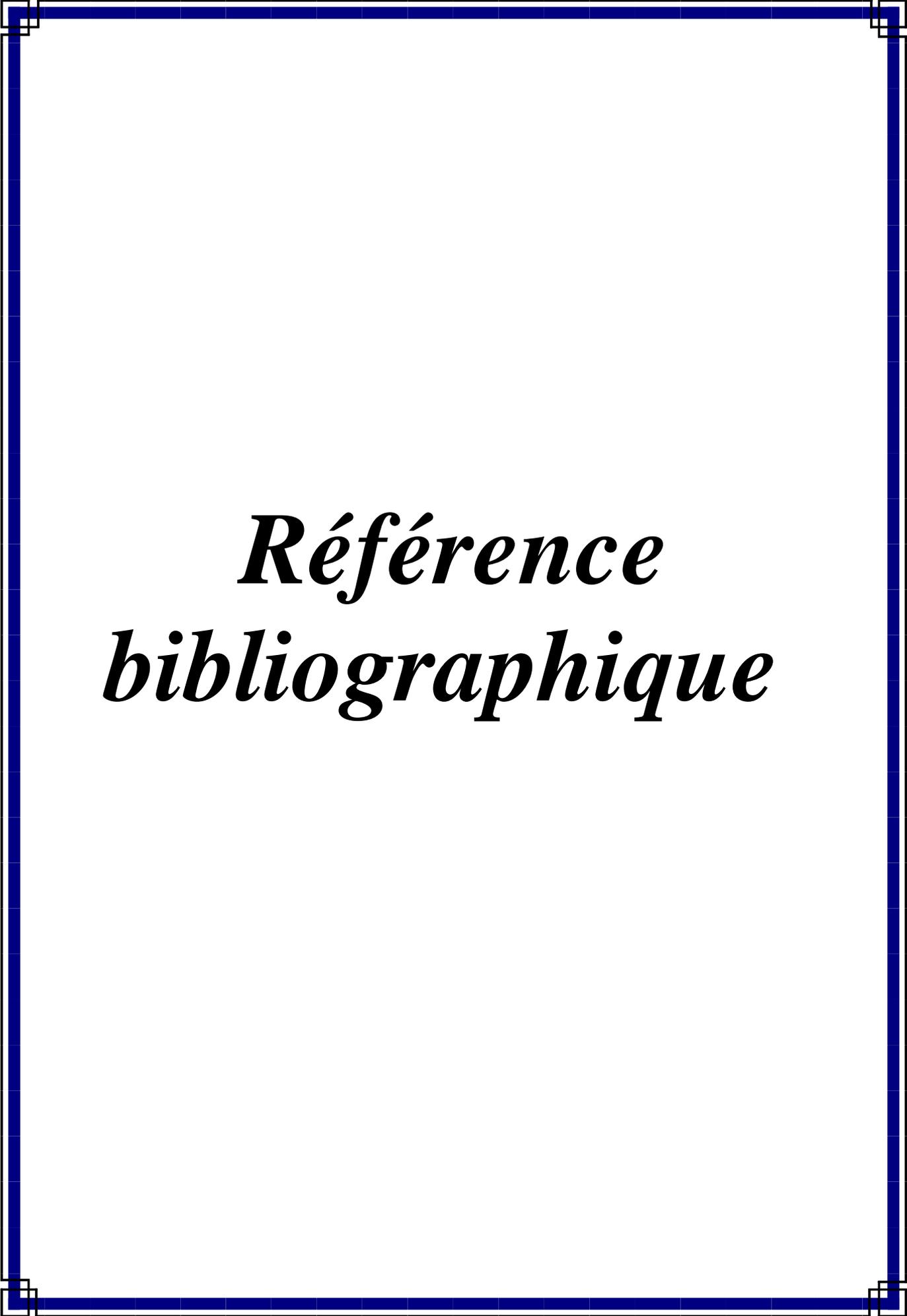
2/ diamètre du trou est de 16 mm avec diamètre du boulon de 14 mm.

3/ 15 boulons, à disposer en 3 rangés de 5 boulons de chaque côté de la plaque de couvre joint (nombre total de 30 boulons).

4/ vérification

Exercice 2 :

La classe du boulon est 10.9 ordinaire.



*Référence
bibliographique*

Référence bibliographique :

Alexandru D.C. Quelques chapitres de la résistance des matériaux. Ed. OPU, Alger, 267p.

Boucard P.A. Cours de Dimensionnement des Structures - Résistance des Matériaux. IUT Cachan, Paris, 2011, 89p.

Del Pedro M., Gmür T., Botsis J. Introduction à la mécanique des solides et structures. PPUR presses polytechniques et Universitaires Romandes, CH-1015 Lausanne, 2004-313p.

Fanchon J.L. Guide de mécanique: Sciences et technologies industrielles. Ed. Nathan, Paris, 1996, 480p.

Fanchon J.L. Guide de mécanique: Sciences et technologie industrielle, Statique, Cinématique, Dynamique, Résistance des matériaux, Elasticité, Mécanique de fluides. Editions Nathan, Paris, 1998, 450p.

Golay F. Résistance des matériaux – Polycopiés. ISITV, Toulon et Var, 2005, 87p.

Karnovski I.A., Lebed O.I. Formulas for structural dynamics: Tables, Graphs, and Solutions. McGraw-Hill, 2004, 491p.

Montagner R., COURS DE RESISTANCE DES MATERIAUX, 12eme Edition 1988, Editions Eyrolles.

Timoshenko S. Résistance des matériaux–Tome 1: Théorie élémentaire et problèmes. 3ème Ed. Dunod, Paris, 1968, 420p.

Timoshenko S. Résistance des matériaux–Tome 2: Théorie développée et problèmes, Dunod, Paris, 1968. 3ème Ed. Dunod, Paris, 1968, 464p.

Les unités :

Angle	Degré, °	θ, α
Contrainte normale	N/m ² , N/cm ² , kN/m ² , MPa, bars ...	σ
Contrainte tangentielle	N/m ² , N/cm ² , kN/m ² MPa, bars ...	τ
Déformation		ε
Déplacement	cm	δ, Δ
Effort normal	N	N
Effort tranchant	N	T
Elancement		λ
Flèche	cm	f
Forces	N, kN, t	F, N, P, R
Intensité de la charge répartie	N/m	q
Longueur, largeur	(m, cm)	L, l
Masse volumique	Kg/m ³	γ
Module de résistance	m ³ , cm ³	W
Module de Young	kN/m ²	E
Moment d'inertie /x	m ⁴ , cm ⁴	I _x
Moment fléchissant	N.m	M
Moment statique /x	m ³ , cm ³	M _{Sx}
Section droite	m ² , cm ²	S