ALGÈBRE
Cours et Exercices
Première Année LMD

Marir Saliha

Table des matières

Introduction

Ce polycopié reprend quelques notions mathématiques à la base de la partie Algèbre de l'unité d'Enseignement Maths1 de premières années LMD Sciences et techniques et Mathématiques et informatique. Il peut aussi être utilement utilisé par les étudiants d'autres paliers aussi bien en sciences et sciences et techniques que ceux de Biologie, Sciences économiques ou autre.
Les chapitres de ce texte se décomposent de la façon suivante :

- Le cours contient les notions à assimiler. Il convient d'en apprendre les définitions et les énoncés des résultats principaux. Les démonstrations données doivent être comprises ainsi que les exemples proposés tout au long du cours.
- La partie entrainement comprend des exercices qui ont été choisis soigneusement. Il est conseillé de s'exercer à résoudre par soi-même les exercices sans avoir une solution à côté . C'est grâce à ce travail personnel indispensable que l'on peut aller loin dans la compréhension et l'assimilation des notions mathématiques introduites. C'est la seule méthode connue à ce jour pour progresser en mathématiques. L'étudiant consciencieux travaillera la justification de chacune de ses réponses. Rappelons que trouver la bonne réponse ne suffit pas en science, il faut aussi la justifier !
- La partie Solutions des exercices proposés que l'étudiant pourra consulter en cas de difficulté.

Chapitre 1

Notions de Logique Mathématique

Sommaire

1.1 Préambule

Les mathématiques actuelles sont bâties de la façon suivante :
Axiome : Un axiome est un énoncé supposé vrai à priori et que l'on ne cherche pas à démontrer.

Exemple 1.1.1. • *Euclide a énoncé cinq axiomes qui devaient être la base de la géométrie euclidienne ; le cinquième axiome a pour énoncé :*
Par un point extérieur à une droite, il passe une et une seule droite parallèle à cette droite.

- *Les cinq axiomes de Péano, qui définissent l'ensemble des entiers naturels. Le cinquième axiome est :*
  si P est une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0 et que tout successeur de chaque élément de P appartient à P (le successeur de n est $n+1$) alors $P=\mathbb{N}$. Cet axiome est appelé « axiome d'induction ».

Définition : Une définition est un énoncé dans lequel on décrit les particularités d'un objet mathématique.
On doit avoir conscience que le mot "axiome" est parfois synonyme de "définition".
Démonstration : (ou preuve) c'est réaliser un processus qui permet de passer d'hypothèses supposées vraies à une conclusion et ce en utilisant des règles strictes de logique.
On décide enfin de qualifier de vraie toute affirmation obtenue en fin de démonstration et on l'appelle selon son importance,
Lemme : Un résultat d'une importance mineure.
Théorème : Un résultat d'une importance majeure.
Corollaire : Un corollaire à un théorème est conséquence à ce théorème.
Conjecture : Un résultat mathématique que l'on suppose vrai sans parvenir à le démontrer.

Exemple 1.1.2. *La conjecture de Fermat : si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, il n'existe pas d'entiers naturels x, y, z tels que*

$$x^n + y^n = z^n$$

Récemment, ce résultat a été démontré.

Proposition : Une proposition est un énoncé mathématique pouvant être vrai ou faux, on la note par les lettres P, Q, R,...etc.

Exemple 1.1.3. *L'énoncé « 24 est multiple de 4 » est une proposition vraie.*
L'énoncé « 19 est multiple de 3 » est une proposition fausse.

A toute proposition correspond une table de vérité

P
V
F

ou

P
1
0

Pour deux propositions P et Q non précisées, correspond 2^2 possibilités d'attribution de vérité

P	Q
1	1
1	0
0	1
0	0

D'une manière générale, à n propositions correspond 2^n possibilités d'attribution de vérité.

1.2 Connecteurs logiques

Si P est une proposition et Q est une autre proposition, nous allons définir de nouvelles propositions construites à partir de P et de Q.

- **Négation d'une proposition**
  La négation d'une proposition P est une proposition notée $\overline{P}$ et définie à partir de sa table de vérité

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

- **Conjonction « et »**
  La conjonction est le connecteur logique « et » qui à tout couple de propositions (P, Q) associe la proposition «P et Q », notée $P \wedge Q$ et définie ainsi : $P \wedge Q$ est vraie si P et Q sont toutes les deux vraies simultanément, fausse dans les autres cas.
  On résume ceci dans la table de vérité suivante

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

- **Disjonction « ou »**
La disjonction est le connecteur logique « ou » qui à tout couple de propositions (P, Q) associe la proposition «P ou Q », notée $P \vee Q$ et définie ainsi : $P \vee Q$ est fausse si P et Q sont toutes les deux fausses simultanément, vraie dans les autres cas.
On résume ceci dans la table de vérité suivante

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- **Implication « $\Rightarrow$»**
L'implication est le connecteur logique qui à tout couple de propositions (P, Q) associe la proposition «P implique Q », notée $P \Rightarrow Q$ et définie ainsi : $P \Rightarrow Q$ est fausse lorsque P est vraie et Q est fausse, vraie dans les autres cas.
On résume ceci dans la table de vérité suivante

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- **Equivalence « $\Leftrightarrow$ »**
L'équivalence est le connecteur logique qui à tout couple de propositions (P, Q) associe la proposition «P équivaut Q », notée $P \Leftrightarrow Q$ et définie ainsi : $P \Leftrightarrow Q$ est vraie lorsque P et Q ont la même valeur de vérité, fausse dans les autres cas.
On résume ceci dans la table de vérité suivante

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

1.3 Propriétés des connecteurs logiques

Considérons la proposition P. Cette proposition peut prendre la valeur de vérité vrai ou faux. Considérons la proposition composée

$$R = P \vee \overline{P}$$

Cette proposition est remarquable. En effet, R est toujours vraie et ce indépendamment de P. Vérifions-le :

P	$\overline{P}$	P$\vee\overline{P}$
1	0	1
0	1	1

(1.1)

La proposition R est alors qualifiée de tautologie.

Définition 1.3.1. *Une proposition qui est vraie quelles que soient les valeurs de vérité des propositions qui la composent est appelée une Tautologie.*

Propriétés 1.3.1. *Quelles que soient les valeurs de vérité des propositions P, Q et R, les propositions suivantes sont toujours vraies.*

- $\overline{P} \vee P$
- $\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$
- $P \wedge P \Leftrightarrow P$
- $P \vee P \Leftrightarrow P$
- $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$ *(Le connecteur $\wedge$ est commutatif)*
- $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ *(Le connecteur $\vee$ est commutatif)*

- $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$ *(Le connecteur $\wedge$ est associatif)*

- $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ *(Le connecteur $\vee$ est associatif)*

- $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ *(Le connecteur $\wedge$ est distributif sur $\vee$)*

- $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ *(Le connecteur $\vee$ est distributif sur $\wedge$)*

- $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$

- $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$

- $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ *(Transitivité de $\Rightarrow$)*

- $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)]$

- $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$ *(Lois de Morgan)*

- $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$ *(Lois de Morgan)*

- $[(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$ *(Transitivité de $\Leftrightarrow$)*

- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$

- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ *(contraposée)*

Remarque 1.3.1. *On peut démontrer ces propriétés en dressant la table de vérité.*

1.4 Quantificateurs mathématiques

a)- Forme propositionnelle

Définition 1.4.1. *Etant donné un ensemble E. On appelle forme propositionnelle à une variable définie sur E, toute expression mathématique contenant une variable x, telle que quand on remplace cette variable par un élément de E, on obtient une proposition. On la note par $P(x)$.*

Exemple 1.4.1. *L'énoncé suivant :*

P(n) : « n est un entier naturel multiple de 3»

est une forme propositionnelle sur $\mathbb{N}$ car il devient une proposition lorsqu'on donne une valeur à n. En effet,

- *P(30) : «30 est multiple de 3» est une proposition vraie.*

- *P(19) : «19 est multiple de 3» est une proposition fausse.*

Remarque 1.4.1. *On peut avoir une forme propositionnelle à deux variables notée $P(x, y), x \in E, y \in F$ où E et F sont deux ensembles.*

b)- Les Quantificateurs universels simples

A partir d'une forme propositionnelle P(x) définie sur un ensemble E, on construit de nouvelles propositions dites propositions quantifiées en utilisant les quantificateurs «quel que soit» et «il existe».

Définition 1.4.2. *Le quantificateur «quel que soit», noté $\forall$, permet de définir la proposition «$\forall x \in E, P(x)$» qui est vraie si pour tous les éléments x de E, la proposition $P(x)$ est vraie.*

Exemple 1.4.2.

- $\forall x \in [-3, 1], x^2 + 2x - 3 \leq 0$ *est une proposition vraie.*

- $\forall n \in \mathbb{N}, (n-3)\, n > 0$ *est une proposition fausse.*

Définition 1.4.3. *Le quantificateur « il existe au moins», noté $\exists$, permet de définir la proposition «$\exists x \in E, P(x)$» qui est vraie si on peut trouver au moins un élément $x \in E$ tel que la proposition $P(x)$ soit vraie.*
S'il existe un et un seul élément x, on pourra écrire

$$\exists! x \in E, P(x)$$

On dira dans ce cas qu'il existe un élément unique x vérifiant P(x).

Exemple 1.4.3.

- «$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 4$» *est une proposition vraie.*
- «$\exists x \in \mathbb{R}, e^x < 0$ » *est une proposition fausse.*
- «$\forall n \in \mathbb{N}, (n^2$ *pair* $\Rightarrow n$ *pair*» *est une proposition vraie.*

c)- Les Règles de négation

Soit $P(x)$ une forme propositionnelle sur un ensemble E.
La négation de $\forall x \in E, P(x)$ est $\exists x \in E, \overline{P(x)}$
La négation de $\exists x \in E, P(x)$ est $\forall x \in E, \overline{P(x)}$

Exemple 1.4.4.

- $\overline{\exists x \in \mathbb{R}, e^x \leq 0} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$

- $\overline{\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair})} \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}, (n^2 \text{ pair}) \wedge (n \text{ impair}))$

d)- Les Quantificateurs multiples

Définition 1.4.4. *Soit $P(x, y)$ une forme propositionnelle à deux variables avec $x \in E$ et $y \in F$.*

- *La proposition quantifiée :* $\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x, y)$ *est vraie lorsque tous les éléments x de E et tous les éléments y de F vérifient* $P(x, y)$.

- *La proposition quantifiée :* $\exists x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x,y)$ *est vraie lorsqu'il existe au moins un élément* x *de* E *et lorsqu'il existe au moins un élément* y *de* F *vérifiant* $P(x,y)$.

Exemple 1.4.5.
- *La proposition quantifiée :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ 1 + nx \geq 0$$

est vraie.
- *La proposition quantifiée :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ 1 + nx \geq 0$$

est fausse.
- *La proposition quantifiée :*

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ 2x - 5y = 1$$

est vraie.

e)- Règles d'utilisation

On peut combiner des quantificateurs de natures différentes. Par exemple, l'énoncé « tout nombre réel positif possède une racine carrée» s'écrit

$$\forall y \in \mathbb{R}^+,\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = x^2$$

mais attention, il faut respecter les règles suivantes :

- On peut permuter deux quantificateurs identiques
  $(\forall x \in E, \forall y \in F, P(x,y)) \Leftrightarrow (\forall y \in F, \forall x \in E, P(x,y))$
  $(\exists x \in E, \exists y \in F, P(x,y)) \Leftrightarrow (\exists y \in F, \exists x \in E, P(x,y))$

- Ne pas permuter deux quantificateurs différents.

$$\exists y \in F, \forall x \in E, P(x,y)$$

n'est pas équivalente à

$$\forall x \in E, \exists y \in F, P(x,y)$$

1.5 Exercices

Exercice 1.5.1. *Ecrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer. n est un entier naturel, x et y sont des nombres réels.*

(1) *n premier* $\Rightarrow$ *n=2 ou n impair*

(2) $(xy \neq 0) \Rightarrow (x \neq 0 \wedge y \neq 0)$

(3) $(x \neq y) \Rightarrow ((x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1))$

Exercice 1.5.2. *Ecrire les réponses aux questions suivantes, portant sur des entiers naturels, sous forme de propositions mathématiques écrites avec les symboles* $\forall, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ *et les prouver.*

(1) *Le produit de deux nombres pairs est-il pair ?*

(2) *Le produit de deux nombres impairs est-il impair ?*

(3) *Le produit d'un nombre impair par un nombre pair est-il pair ou impair ?*

(4) *Un nombre entier est-il pair si et seulement si son carré est pair ?*

Exercice 1.5.3. *Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse et donner leurs négations.*

(1) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y > 0$

(2) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y > 0$

(3) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$

(4) $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{*+}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{*+}, |x| < \alpha \Rightarrow x^2 < \epsilon$

Exercice 1.5.4. *Montrer que* $\sqrt{2}$ *n'est pas rationnel.*

Exercice 1.5.5. *Montrer que* $\sqrt{3}$ *n'est pas rationnel.*

Exercice 1.5.6.
Montrer que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *n'est pas rationnel.*

Corrigés

Corrigé 1.5.1.

(1) $(n \neq 2) \wedge (n \text{ pair}) \Rightarrow n \text{ non premier}$
On suppose que $(n \neq 2) \wedge (n \text{ pair})$ alors n est divisible par 2, par suite n n'est pas premier.

(2) $(x = 0) \vee (y = 0) \Rightarrow (xy = 0)$ *trivial*

(3) $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow x = y$
En effet

$$(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Leftrightarrow xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1$$

ce qui donne $x = y$

Corrigé 1.5.2.

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, (n \text{ pair}) \wedge (m \text{ pair}) \Rightarrow nm \text{ pair}$
On suppose que n et m sont deux entiers naturels pairs et on montre que leur produit l'est aussi.

$$n \text{ pair} \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}, n = 2k_1,$$
$$m \text{ pair} \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}, m = 2k_2,$$

on obtient alors,

$$nm = 2(\underbrace{2k_1k_2}_{K}) = 2K, K \in \mathbb{N},$$

par suite nm est pair.

(2) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, (n \text{ impair}) \wedge (m \text{ impair}) \Rightarrow nm \text{ impair}$
On suppose que n et m sont deux entiers naturels impairs et on montre que leur produit l'est aussi.

$$n \text{ impair} \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}, n = 2k_1 + 1,$$

$$m \text{ impair} \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}, m = 2k_2 + 1,$$

on obtient alors,

$$nm = 2(\underbrace{2k_1k_2 + k_1 + k_2}_{K}) + 1 = 2K + 1, K \in \mathbb{N},$$

par suite nm est impair.

(3) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, (n \text{ pair}) \wedge (m \text{ impair}) \Rightarrow nm \text{ pair}$
(même raisonnement que (1) et (2))

(4) $\forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ pair}) \Leftrightarrow n^2 \text{ pair}.$
On est amené à montrer deux implications,

- $(n \text{ pair}) \Rightarrow (n^2 \text{ pair})$ *est vraie (voir réponse(1) en prenant n=m pair).*

- $n^2 \text{ pair} \Rightarrow (n \text{ pair}) \underbrace{\Leftrightarrow}_{contraposée} (n \text{ impair}) \Rightarrow n^2 \text{ impair}$
Cette dernière implication est vraie(voir réponse (2), en prenant n=m impair).

Ainsi, l'équivalence est vraie.

Corrigé 1.5.3.

(1) *fausse. pour voir ceci, supposons qu'il existe un réel x vérifiant (1) pour tout réel y. En particulier pour* $y = -x - 1 \in \mathbb{R}$*, on obtient* $x + y = x - x - 1 = -1 > 0$ *ce qui est absurde.*
Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$

(2) *vraie. soit* $x \in \mathbb{R}$*. Alors, on doit trouver au moins un réel y (dans ce cas il peut dépendre de x) tel que* $x + y > 0$.
Il suffit de prendre $y = -x + 2$*, d'où*

$$(-x + 2) \in \mathbb{R} \text{ et } x + y = x - x + 2 = 2 > 0$$

Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0.$

(3) *vraie. Pour cela, il suffit de prendre par exemple $x = -1$. On a alors pout tout réel y, $y^2 \geq -1$.*
Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ y^2 \leq x$.

(4) *vraie. Soit $\epsilon > 0$. Il suffit de prendre $\alpha = \sqrt{\epsilon}$, on a alors*

$$\exists \alpha = \sqrt{\epsilon} \in \mathbb{R}^{+*} \ et\ \ |x| < \sqrt{\epsilon} \Rightarrow x^2 < \epsilon.$$

Négation : $\exists \epsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, (|x| < \alpha) \wedge (x^2 \geq \epsilon)$.

Corrigé 1.5.4.
Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel revient à montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Pour cela, nous allons procéder par un raisonnement par l'absurde. Supposons alors que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ est vraie. Il va alors exister deux entiers naturels n et m (m non nul) premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$. D'où $n^2 = 2m^2$, on déduit alors que n^2 pair ce qui implique que n est pair (d'après exercice 1.5.2, question (1)). Il va donc exister $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$. L'équation $n^2 = 2m^2$ devient alors $2p^2 = m^2$. Pour les mêmes raisons, m sera aussi pair. On a alors n et m pairs tous les deux ce qui est en contradiction avec le fait qu'ils sont premiers entre eux. On conclut alors que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Corrigé 1.5.5.
Commençons par démontrer que si p^2 est un multiple de 3 alors p l'est aussi.

Si p n'est pas multiple de 3 donc p s'écrirait :

$p = 3k + 1$ *ou* $p = 3k + 2$ *avec* $k \in \mathbb{N}$. *En élevant au carré, on obtient*

$$p^2 = (3k+1)^2 = 3(\underbrace{3k^2 + 2k}_{K}) + 1/K \in \mathbb{N}$$

et dans le deuxième cas

$$p^2 = (3k+2)^2 = 3(\underbrace{3k^2 + 4k + 1}_{K'}) + 1/K' \in \mathbb{N}$$

C'est contradictoire avec l'hypothèse.
Pour montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel, on raisonne par l'absurde.

Supposons que $\sqrt{3}$ *est rationnel d'où* $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$*(une fraction d'entiers supposée écrite sous forme irréductible avec* $q \neq 0$*). Ainsi en élevant au carré, il viendrait que :* $3 = \frac{p^2}{q^2}$ *d'où* $p^2 = 3q^2$*.* p^2 *serait multiple de 3 donc p aussi (d'après le résultat démontré). Ainsi p s'écrirait :*

$p = 3k, k \in \mathbb{N}$*. En injectant dans la relation* $p^2 = 3q^2$ *il vient que :*

$q^2 = 3k^2$*. Ainsi* q^2 *est multiple de 3 donc q serait multiple de 3 : c'est contradictoire avec l'hypothèse de départ, la fraction ne serait pas irréductible, puisqu'on peut diviser par 3. Le tour est joué :* $\sqrt{3}$ *est irrationnel.*

Corrigé 1.5.6.
Supposons que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ *est rationnel, donc* $\sqrt{2} + \sqrt{3} = p, p \in \mathbb{Q}^*$*. On a alors* $\sqrt{2} = p - \sqrt{3}$*, ce qui implique* $2 = p^2 + 3 - 2p\sqrt{3}$*. Ainsi on obtient* $\sqrt{3} = \frac{p^2+1}{2p} \in \mathbb{Q}$*. Or* $\sqrt{3}$ *est irrationnel (voir exercice précédent).*

Chapitre 2

Ensembles et Applications

Sommaire

2.1 Ensembles

Définition 2.1.1. *On entend par ensemble toute collection ou tout assemblage d'objets appelés éléments d'ensemble. On notera, en général, un élément par une lettre minuscule (l'élément x) et un ensemble par une lettre majuscule (l'ensemble E). On note*

$$x \in E$$

si x est un élément de E, et $x \notin E$ dans le cas contraire. Un ensemble peut être fini ou infini.
- Un ensemble constitué d'un nombre fini d'éléments distincts peut être défini par extension : par une énumération explicite de tous ses éléments qu'on met généralement entre accolades.
- Un ensemble constitué d'un nombre infini (ou même fini) peut être donné en compréhension, c'est-à-dire par une ou des propriétés définissant ses éléments.

Exemple 2.1.1. • *Ensembles donnés en extension :*
$\{0, 1, 3\}$, $\{T, \perp, \triangleright\}$, $\{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}$

- *Ensembles donnés en compréhension*
  $\{x \in \mathbb{R} / |x-1| < 2\} = \,]-1, 3[\,, \quad \{z \in \mathbb{C} / z^5 = 3\}$
- *Un ensemble formé d'un et un seul élément est appelé* ***singleton****.*
  Par exemple
  $$\{n \in \mathbb{N} / -0.1 < n < 0.1\} = \{0\}\,.$$
- *Un ensemble particulier est l'ensemble vide, noté* $\varnothing$*, qui est l'ensemble ne contenant aucun élément.*

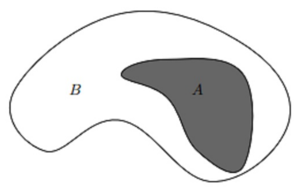
2.1.1 Inclusion

Définition 2.1.2. *A et B deux ensembles. Lorsque tout élément de A est aussi un élément de B, on dit que A est un sous-ensemble de B ou A est une partie de B. On dit aussi que A est inclus dans B, ce que l'on note par $A \subset B$ et on a formellement*

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Quand A n'est pas une partie de B, on note $A \not\subset B$ et on a formellement :

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x, (x \in A) \wedge (x \notin B).$$



$A \subset B$

Exemple 2.1.2.
$\mathbb{Z}$: ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{D}$: ensemble des nombres décimaux
$\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes
On a les inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Définition 2.1.3. *Deux ensembles A et B sont dits égaux si et seulement s'ils contiennent les mêmes éléments.*

$$(A = B) \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

ou encore

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

Définition 2.1.4. *Soit E un ensemble. L'ensemble de toutes les parties de E constitue un nouvel ensemble noté $\mathcal{P}(E)$. Il est parfois appelé* ***ensemble puissance****.*

Remarque 2.1.1.

- *Soit E un ensemble à n éléments. Alors, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est fini, et a 2^n éléments.*
- *Pour tout ensemble E,$\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide car E et $\varnothing$ appartiennent à $\mathcal{P}(E)$.*
- $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$
- $\{x\} \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow x \in E$

Exemple 2.1.3. *Si $E = \{-1, 0, 1\}$, on a*

$$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1, 0\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}, E\}$$

2.1.2 Opérations sur les ensembles

Considérons un ensemble E.

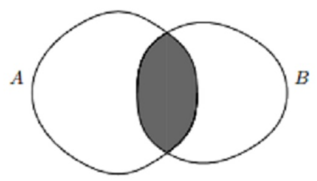
1)- Intersection

Définition 2.1.5. *Soient A et B deux parties de E. On appelle intersection des ensembles A et B l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. Celui-ci est noté $A \cap B$. Lorsque $A \cap B = \varnothing$ (c'est-à-dire lorsque A et B n'ont aucun élément commun), on dit que A et B sont disjoints. On écrit alors*

$$A \cap B = \{x \in E / (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

ou encore

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$$



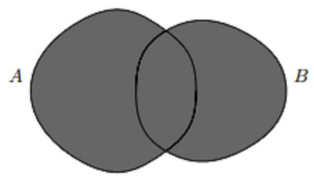
2)- Réunion

Définition 2.1.6. *Soient A et B deux parties de E. On appelle réunion des ensembles A et B l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B. Cet ensemble est noté $A \cup B$. Le « ou » n'est pas exclusif : x peut appartenir à A et à B en même temps.*

$$A \cup B = \{x \in E/(x \in A) \vee (x \in B)\}$$

ou encore

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$$



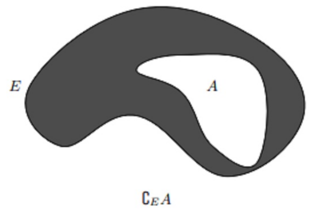
3)- Complémentaire

Définition 2.1.7. *Soit A un sous-ensemble de E. On appelle complémentaire de A dans E, et l'on note $\complement_E^A$, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.*

$$\complement_E^A = \{x \in E/x \notin A\}$$

ou encore

$$x \in \complement_E^A \Leftrightarrow x \notin A$$



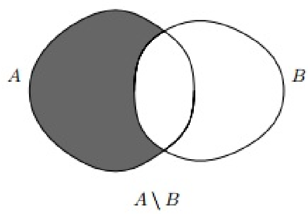
Exemple 2.1.4. *Soit l'ensemble* $A = \{2n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ *alors*

$$\complement_{\mathbb{N}}^{A} = \{2n+1 \ / \ n \in \mathbb{N}\}$$

4)- Différence

Définition 2.1.8. *Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle différence de A et de B dans cet ordre, et on note* $A \setminus B$*, l'ensemble des éléments de E appartenant à A mais pas à B.*

$$A \setminus B = \{x \in E/(x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$



Exemple 2.1.5. *Soit* $E = \mathbb{R}$, $A = [-3, 3]$, $B = [0, 1]$. *On obtient*

$$A \setminus B = [-3, 0[\cup]1, 3]$$

et

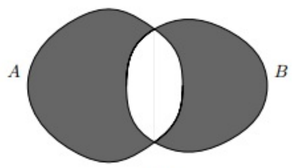
$$B \setminus A = \varnothing.$$

On voit bien que la différence des ensembles n'est pas commutative.

5)- Différence symétrique

Définition 2.1.9. *Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle différence symétrique de A et B, et on note $A \Delta B$, l'ensemble des éléments de E appartenant à A ou à B. le «ou» est exclusif c-à-d qu'un élément ne doit pas appartenir à A et à B simultanément. On a alors*

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



$A \Delta B$

Exemple 2.1.6. *Soient les ensembles suivants*
$E = \mathbb{N}$, $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 6\}$, *on a alors*

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{0, 2, 4, 5, 6\}$$

2.1.3 Propriétés des opérations sur les ensembles

Quels que soient A, B et C des sous-ensembles d'un même ensemble E, on a les propriétés suivantes.

- **Commutativité**
  $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$

- **Associativité**
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

- **Distributivité**
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  Les opérations $\cap$ et $\cup$ sont distributives l'une sur l'autre.

- **Idempotence**
  $A \cap A = A$ et $A \cup A = A$

- **Lois de Morgan**

  $\complement_E^{(A\cap B)} = \complement_E^A \cup \complement_E^B$ et $\complement_E^{(A\cup B)} = \complement_E^A \cap \complement_E^B$

  Remarque 2.1.2. *La démonstration se déduit directement des propriétés des lois de Morgan pour les connecteurs* $\wedge$ *et* $\vee$.

2.1.4 Partition

Définition 2.1.10. *Soient* E *un ensemble et* $A_1, A_2, ..., A_n$ *des sous-ensembles de* E. *On dit que ces sous-ensembles forment une partition de* E *si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *Chacun de ces ensembles est non vide :*
$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, A_i \neq \varnothing.$$
2. *Ils sont deux à deux disjoints :*
$$\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\},\ i \neq j,\ A_i \cap A_j = \varnothing.$$
3. *Leur union est égale à* E *:*
$$\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i = E.$$

Exemple 2.1.7. *Voici quelques exemples simples :*

- $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. *Alors les sous-ensembles* $\{0, 1, 2\}$, $\{3, 5, 7\}$, $\{4, 6\}$ *et* $\{8\}$ *constituent une partition de* E.
- *Soient* $E = \mathbb{N}$, A_1 *le sous-ensemble formé par les entiers pairs,* A_2 *le sous-ensemble formé par les entiers impairs. Alors, les sous-ensembles* A_1 *et* A_2 *forment une partition de* E.
- *Soient* $E = \mathbb{R}$, $A_1 =]-\infty, 1[$, $A_2 = [1, 2]$, $A_3 =]2, +\infty[$. *Alors, les sous-ensembles* A_1, A_2 *et* A_3 *forment une partition de* E.

2.1.5 Produit Cartésien

Définition 2.1.11. *On appelle le produit cartesien des ensembles A et B, l'ensemble des éléments (a, b), tels que $a \in A$ et $b \in B$ dans l'ordre de leurs écriture. On le note par $A \times B$.*

$$A \times B = \{(a, b)/(a \in A) \wedge (b \in B)\}$$

Le système ordonné (a, b) s'appelle un couple ; a est la 1ère ordonnée ou composante, b est la 2ième ordonnée ou composante du couple (a, b).

Définition 2.1.12. *On appelle le produit cartésien d'une famille d'ensembles $A_i, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des systèmes $(a_1, a_2, ..., a_n)$ de n éléments ordonnés $a_i \in A_i$. Ces sytèmes ordonnés sont appelés des triplets pour $n = 3$, des quadruplets pour $n = 4$ et des n-uplets pour n. On le note par $A_1 \times A_2 \times ...A_n$ ou en abréviation $\prod_{i=1}^{i=n} A_i$.*
Lorsque $A_i = A$, le produit $\prod_{i=1}^{i=n} A_i$ se note A^n.

Exemple 2.1.8. $A = \{1, 2\}$ *et* $B = \{*, T, \Delta\}$

$$A \times B = \{(1, *), (1, T), (1, \Delta), (2, *), (2, T), (2, \Delta)\}$$

2.1.6 Exercices sur les ensembles

Exercice 2.1.1. *Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Simplifier les ensembles suivants :*
$(\overline{A \cup B}) \cap (\overline{C \cup \overline{A}})$, $(\overline{A \cap B}) \cup (\overline{C \cap \overline{A}})$
où $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans E.

Exercice 2.1.2. *Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que*

1. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
3. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

4. $A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A \Longleftrightarrow A \cup B = B \Longleftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

Exercice 2.1.3. *Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E.*

1. *Que dire de A et B tels que* $A \cup B = A \cap B$ *?*

2. *Montrer que si* $A \cup B \subset A \cup C$ *et* $A \cap B \subset A \cap C$ *alors* $B \subset C$.

Corrigés

Corrigé 2.1.1.

$$\begin{array}{rcl} \overline{A \cup B} \cap \overline{C \cup \overline{A}} & = & (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap (\overline{C} \cap A) \ (\textit{Lois de Morgan}) \\ & = & (\overline{A} \cap A) \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \ (\cap \textit{ est associative}) \\ & = & \varnothing \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\ & = & \varnothing \\ \overline{A \cap B} \cup \overline{C \cap \overline{A}} & = & (\overline{A} \cup \overline{B}) \cup (\overline{C} \cup A) \ (\textit{Lois de Morgan}) \\ & = & (\overline{A} \cup A) \cup (\overline{B} \cup \overline{C}) \ (\cup \textit{ est associative}) \\ & = & E \cup (\overline{B} \cup \overline{C}) \\ & = & E \end{array}$$

Corrigé 2.1.2. 1. *Pour montrer l'égalité, on montre*

$$\forall x, x \in \overline{A \cap B} \Longleftrightarrow x \in (\overline{A} \cup \overline{B})$$

$$\begin{array}{rcl} x \in \overline{A \cap B} & \Longleftrightarrow & x \notin (A \cap B) \\ & \Longleftrightarrow & \overline{x \in (A \cap B)} \\ & \Longleftrightarrow & \overline{(x \in A) \wedge (x \in B)} \\ & \Longleftrightarrow & \overline{(x \in A)} \vee \overline{(x \in B)} \\ & \Longleftrightarrow & (x \notin A) \vee (x \notin B) \\ & \Longleftrightarrow & (x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B}) \\ & \Longleftrightarrow & x \in (\overline{A} \cup \overline{B}) \end{array}$$

d'où

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

2. *Même raisonnement que (1)*

3.

$$\begin{array}{rcl} x \in A\Delta B & \Leftrightarrow & x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ & \Leftrightarrow & (x \in A \setminus B) \vee (x \in B \setminus A) \\ & \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \\ & \Leftrightarrow & [(x \in A) \vee (x \in B \wedge x \notin A)] \wedge [(x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)] \\ & \Leftrightarrow & [(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A)] \\ & & \wedge[(x \notin B \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \notin A)] \\ & \Leftrightarrow & [x \in (A \cup B) \cap E] \wedge [x \in E \cap \overline{A \cap B}] \\ & \Leftrightarrow & x \in (A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B) \\ & \Leftrightarrow & x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B). \end{array}$$

D'où

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

4. En se basant sur la transitivité de «⇒», Il suffit de montrer que

$$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A} \Rightarrow A \subset B$$

(a) *On montre que* $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$ *?*
On suppose que $A \subset B$ *et on montre que* $A \cap B = A$. *Pour cela, on doit montrer les deux inclusions* $A \cap B \subset A$ *et* $A \subset A \cap B$

- $A \cap B \subset A$ *est évidente*

- *Soit* $x \in A$ *alors* $x \in B$ *car* $A \subset B$ *donc* $(x \in A) \wedge (x \in B)$
On obtient alors

$$x \in A \Rightarrow x \in (A \cap B)$$

ainsi $A \subset A \cap B$. *D'où*

$$A \cap B = A$$

(b) *On montre que* $A \cap B = A \Rightarrow A \cup B = B$ *? On suppose que* $A \cap B = A$ *et on montre que* $A \cup B = B$. *Pour cela, on doit montrer les deux inclusions* $A \cup B \subset B$ *et* $B \subset A \cup B$

- $B \subset A \cup B$ *est évidente.*
- *Soit* $x \in A \cup B$. *Deux cas se présentent.*
  Si $x \in B$, *on a alors* $A \cup B \subset B$
  Si $x \in A$ *alors* $x \in A \cap B$ *et donc* $x \in B$ *et par suite* $A \cup B \subset B$.

D'où $A \cup B = B$

(c) *On montre que* $A \cup B = B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.
On suppose que $A \cup B = B$ *et on montre que* $\overline{B} \subset \overline{A}$.

$$\begin{array}{rcl} x \in \overline{B} & \Leftrightarrow & x \notin B \\ & \Leftrightarrow & x \notin (A \cup B)\ (A \cup B = B) \\ & \Leftrightarrow & (x \notin A) \wedge (x \notin B)\ (Lois\ de\ Morgan) \\ & \Rightarrow & x \notin A \end{array}$$

d'où $\overline{B} \subset \overline{A}$

(d) *On termine par démontrer* $\overline{B} \subset \overline{A} \Rightarrow A \subset B$ *?*
On suppose que vraie $\overline{B} \subset \overline{A}$ *et on montre* $A \subset B$.

$$\begin{array}{rcl} \overline{B} \subset \overline{A} & \Leftrightarrow & \forall x, x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \\ & \Leftrightarrow & \forall x, x \notin \overline{A} \Rightarrow x \notin \overline{B}\ (contraposée) \\ & \Leftrightarrow & \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B \end{array}$$

on vient de montrer que $\overline{B} \subset \overline{A} \Leftrightarrow A \subset B$

Corrigé 2.1.3. *1.*

$$\begin{array}{rcl} x \in A & \Rightarrow & x \in A \cup B \\ & \Rightarrow & x \in A \cap B \\ & \Rightarrow & x \in B \end{array}$$

d'où $A \subset B$

$$\begin{array}{rcl} x \in B & \Rightarrow & x \in A \cup B \\ & \Rightarrow & x \in A \cap B \\ & \Rightarrow & x \in A \end{array}$$

d'où $B \subset A$
On conclut alors que si $A \cup B = A \cap B$ *alors* $A = B$.

2.

$$\begin{array}{rcl} x \in B & \Rightarrow & x \in A \cup B \\ & \Rightarrow & x \in A \cup C \end{array}$$

Deux cas se présentent.
Si $x \in C$ *alors on a* $B \subset C$.

Si $x \in A$ alors $x \in A \cap B$ par suite $x \in A \cap C$ et donc $x \in C$ alors là aussi on a $B \subset C$.

2.2 Applications

Définition 2.2.1. *On appelle une application d'un ensemble E dans un ensemble F toute correspondance f permettant d'associer à tout élément $x \in E$ un seul élément $y \in F$.*
E est dit ensemble de départ ; F ensemble d'arrivée. On note l'élément y de F associé à un élément x de E par $y = f(x)$.
$y = f(x)$ est appelé l'image de x et x est un antécédant de y. On écrit :

$$\begin{array}{rcccl} f & : & E & \longrightarrow & F \\ & & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

Formellement, une correspondance f entre deux ensembles non vides est une application si et seulement si :

$$\forall x_1,\ x_2 \in E,\ (x_1 = x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2))$$

Exemple 2.2.1. *L'application*

$$\begin{array}{rcccl} Id_E & : & E & \longrightarrow & E \\ & & x & \longmapsto & y = x \end{array}$$

est appelée application identité sur E.

Exemple 2.2.2. *Soient E et F deux ensembles non vides et a un élément de F, alors la correspondance f de E dans F définie par :*

$$\forall x \in E, f(x) = a$$

est une application dite application constante.

Exemple 2.2.3. *La correspondance*

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

n'est pas une application car l'élément 0 n'a pas d'image dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.2.2. *On dit que deux applications f et g sont égales si :*

1. *Elles ont un même ensemble de départ E et un même ensemble d'arrivée F.*
2. $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.

2.2.1 Composition d'applications

Définition 2.2.3. *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On appelle la composée des applications f et g, l'application notée $g \circ f$ définie de E dans G par*

$$\forall x \in E,\ g \circ f(x) = g(f(x))$$

Exemple 2.2.4. *Etant données les applications suivantes*
$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ *et* $\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ *On a alors*
$\begin{array}{cccc} g \circ f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & |x| \end{array}$ *et* $\begin{array}{cccc} f \circ g & : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & x & \longmapsto & x \end{array}$
Il est clair que $g \circ f \neq f \circ g$.

Proposition 2.2.1. *Soient E, F, G et H quatre ensembles. Pour toutes applications $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$, on a :*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Preuve. On remarque tout d'abord que les relations $(h \circ g) \circ f$ et $h \circ (g \circ f)$ ont le même ensemble de départ E et d'arrivée H. Comparons leurs valeurs. Soit $x \in E$, posons $f(x) = y \in F$, $g(y) = z \in G$ et $h(z) = t \in H$. Alors il vient :
$h \circ (g \circ f)(x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x))) = h(g(y)) = h(z) = t$
et
$(h \circ g) \circ f(x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(y) = h(g(y)) = h(z) = t$
Il en résulte l'égalité des composées $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. □

2.2.2 Image directe et Image réciproque

a)- Image directe

Définition 2.2.4. *Soit* $f : E \longrightarrow F$ *une application et* $A \subseteq E$. *On appelle image directe de* A *par f (ou, plus simplement, image de* A *par f), noté* $f(A)$, *le sous-ensemble de* F *contenant l'image des éléments de* A *par f :*

$$f(A) = \{f(x) \in F,\ x \in A\}$$

Formellement on a

$$\forall y \in F, (y \in f(A) \Longleftrightarrow \exists x \in A,\ y = f(x))$$

Exemple 2.2.5. *On considère l'application*

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & 2 - x \end{array}$$

$f(\left[0, \frac{1}{2}\right]) = \{f(x) \in \mathbb{R},\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\}$
On a

$$\begin{array}{rcl} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} & \Longrightarrow & -\frac{1}{2} \leq -x \leq 0 \\ & \Longrightarrow & \frac{3}{2} \leq 2 - x \leq 2 \end{array}$$

d'où

$$f(\left[0, \frac{1}{2}\right]) = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

b)- Image réciproque

Définition 2.2.5. *Soit* $f : E \longrightarrow F$ *une application et* $B \subseteq F$. *On appelle image réciproque de* B *par f, noté* $f^{-1}(B)$, *le sous-ensemble de E contenant les antécédents des éléments de B par f :*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}$$

Formellement on a

$$\forall x \in E, x \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B$$

Exemple 2.2.6. *On considère l'application*

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f(x) = (x-1)^2 \end{array}$$

- $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\} = \{1\}$
- $f^{-1}(]\,0, \frac{1}{2}\,[) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \in \,]\,0, \frac{1}{2}\,[\}$
  La résolution de l'inéquation $0 < (x-1)^2 < \frac{1}{2}$ *donne*

$$f^{-1}(]\,0, \frac{1}{2}\,[) = \,]\,\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, 1\,[\, \cup \,]\,1, \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\,[$$

Proposition 2.2.2. *Soient* $f : E \longrightarrow F$ *une application,* $A, B \subset E$ *et* $M, N \subset F$. *On a*

1. $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
4. $M \subset N \Longrightarrow f^{-1}(M) \subset f^{-1}(N)$
5. $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$
6. $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$

Preuve. 1. On suppose que $A \subset B$ et on montre que $f(A) \subset f(B)$.
Soit $y \in F$, alors

$$\begin{array}{rcl} y \in f(A) & \Longleftrightarrow & \exists x \in A,\ y = f(x) \\ & \Longrightarrow & \exists x \in B,\ y = f(x) \\ & \Longrightarrow & y \in f(B) \end{array}$$

d'où $f(A) \subset f(B)$.

2. Soit $y \in F$, alors

$$\begin{array}{rcl} y \in f(A \cup B) & \Longleftrightarrow & \exists x \in A \cup B,\ y = f(x) \\ & \Longleftrightarrow & \exists x, ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y = f(x)) \\ & \Longleftrightarrow & \exists x, \big[\ ((x \in A) \wedge (y = f(x))) \vee ((x \in B) \wedge (y = f(x)))\ \big] \\ & \Longleftrightarrow & \big[\ \exists x, (x \in A) \wedge (y = f(x))\ \big] \vee \big[\ \exists x, (x \in B) \wedge (y = f(x))\ \big] \\ & \Longleftrightarrow & (y \in f(A)) \vee (y \in f(B)) \\ & \Longleftrightarrow & y \in f(A) \cup f(B) \end{array}$$

d'où $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

3. Soit $y \in F$, alors

$$\begin{aligned} y \in f(A\cap B) &\iff \exists x \in A\cap B,\ y=f(x) \\ &\iff \exists x, ((x\in A)\wedge(x\in B))\wedge(y=f(x)) \\ &\iff \exists x, \left[\ ((x\in A)\wedge(y=f(x)))\wedge((x\in B)\wedge(y=f(x)))\ \right] \\ &\iff \left[\ \exists x,(x\in A)\wedge(y=f(x))\ \right]\wedge\left[\ \exists x,(x\in B)\wedge(y=f(x))\ \right] \\ &\implies (y\in f(A))\wedge(y\in f(B)) \\ &\iff y\in f(A)\cap f(B) \end{aligned}$$

d'où $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

Autre méthode : On a $A\cap B\subset A$ et $A\cap B\subset B$ donc par la propriété (1), on a immédiatement : $f(A\cap B)\subset f(A)$ et $f(A\cap B)\subset f(B)$

d'où

$$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$$

4. On suppose que $M\subset N$ et on montre que $f^{-1}(M)\subset f^{-1}(N)$.

Soit $x\in E$

$$\begin{aligned} x\in f^{-1}(M) &\iff f(x)\in M \\ &\implies f(x)\in N \\ &\iff x\in f^{-1}(N) \end{aligned}$$

d'où $f^{-1}(M)\subset f^{-1}(N)$

5. Soit $x\in E$

$$\begin{aligned} x\in f^{-1}(M\cup N) &\iff f(x)\in M\cup N \\ &\iff (f(x)\in M)\vee(f(x)\in N) \\ &\iff (x\in f^{-1}(M))\vee(x\in f^{-1}(N)) \\ &\iff x\in f^{-1}(M)\cup f^{-1}(N) \end{aligned}$$

d'où $f^{-1}(M\cup N)=f^{-1}(M)\cup f^{-1}(N)$

6. Soit $x\in E$

$$\begin{aligned} x\in f^{-1}(M\cap N) &\iff f(x)\in M\cap N \\ &\iff (f(x)\in M)\wedge(f(x)\in N) \\ &\iff (x\in f^{-1}(M))\wedge(x\in f^{-1}(N)) \\ &\iff x\in f^{-1}(M)\cap f^{-1}(N) \end{aligned}$$

d'où $f^{-1}(M\cap N)=f^{-1}(M)\cap f^{-1}(N)$

□

2.2.3 Injection, Surjection, Bijection

Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

a)- Injection :

Définition 2.2.6. *L'application f est dite injective (ou f est une injection) si et seulement si :*

$$\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

ou bien en prenant la contraposée de l'implication,

$$\forall x, x' \in E, x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x'),$$

c'est-à-dire que f est injective si et seulement si tout élément y de F a ***au plus*** *un antécédent.*

Exemple 2.2.7. *On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 1$$

f est-elle injective ?
Soient deux réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longleftrightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \\ &\Longleftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \\ &\Longleftrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

On vient de montrer que

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Ainsi f est injective.

b)- Surjection :

Définition 2.2.7. *L'application f est dite surjective (on dit encore que f est une surjection) si et seulement si :*

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x),$$

c'est-à-dire que f est surjective si et seulement si tout élément y de F a au moins un antécédent dans E.

Remarque 2.2.1. *L'application f est surjective si et seulement si l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution x de E pour tout élément y de F.*

Exemple 2.2.8. *On reprend l'exemple 2.2.7. f est-elle surjective ?*
Soit $y \in \mathbb{R}$, essayons de résoudre l'équation $y = f(x)$.

$$\begin{array}{rcl} y = f(x) & \Longleftrightarrow & y = 2x + 1 \\ & \Longleftrightarrow & y - 1 = 2x \\ & \Longleftrightarrow & x = \frac{y-1}{2} \end{array}$$

Il est clair que l'expression $\frac{y-1}{2}$ est définie pour tout réel y. Ainsi f est surjective.

c)- Bijection :

Définition 2.2.8. *L'application f est dite bijective (ou f est une bijection) si et seulement si elle est à la fois surjective et injective.*

Proposition 2.2.3. *L'application f est bijective si et seulement si tout élément y de F possède un unique antécédent x par f dans E :*

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x)$$

Preuve. Si f est bijective, alors f est surjective. Par conséquent, tout élément y appartenant à F admet au moins un antécédent x par f dans E. Supposons maintenant que y ait deux antécédents x_1 et x_2. On a alors $y = f(x_1) = f(x_2)$, d'où $x_1 = x_2$ puisque f est injective. On en déduit que y admet un seul antécédent.
Réciproquement, si tout y de F admet un unique antécédent x par f dans E, alors f est surjective de E dans F. Soient x_1, x_1 de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Posons $y = f(x_1) = f(x_2)$, alors x_1 et x_2 sont deux antécédents de y. Par unicité de l'antécédent, on a $x_1 = x_2$, ce qui prouve l'injectivité de f. L'application f est donc bijective de E dans F. $\square$

Lorsqu'une application est bijective, il est possible d'introduire la notion d'application réciproque.

Définition 2.2.9. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective de E dans F. On définit alors une application de F vers E en associant à tout élément y de F son seul antécédent. Cette application, appelée application réciproque de f et notée f^{-1}, vérifie donc :*

$$\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

ou encore

$$\begin{array}{rrcl} f : & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rrcl} f^{-1} : & F & \longrightarrow & E \\ & y & \longmapsto & x = f^{-1}(y) \end{array}$$

Exemple 2.2.9.

1. *Si E est un ensemble, Id_E est bijective et $Id_E^{-1} = Id_E$*
2. *L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = e^x$ est bijective et sa bijection réciproque est $f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f^{-1}(y) = ln(y)$.*
3. *En considérant l'application f de l'exemple 2.2.7. On avait montré précedement qu'elle est injective et surjective donc c'est une bijection. Son application réciproque est*

$$\begin{array}{rrcl} f^{-1} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2} \end{array}$$

Proposition 2.2.4. *Soientt E, F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.*

1. *L'application f est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$.*
2. *Si f est bijective alors l'application g est unique et elle aussi est bijective. L'application g s'appelle la bijection réciproque de f et est notée f^{-1} . De plus $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Preuve.

1. • (Nécessité $\Longrightarrow$) Supposons f bijective. Nous allons construire une application $g : F \longrightarrow E$. Comme f est surjective alors pour chaque $y \in F$, il existe un $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et on pose $g(y) = x$. On a $f(g(y)) = f(x) = y$, ceci pour tout $y \in F$ et donc $f \circ g = id_F$. On compose à droite avec f donc $f \circ g \circ f = id_F \circ f$. Alors pour tout $x \in E$ on a $f((g \circ f)(x)) = f(x)$ or f est injective et donc $g \circ f(x) = x$. Ainsi $g \circ f = id_E$. Ainsi : $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$.
   • (Suffisance $\Longleftarrow$) Supposons que g existe et montrons que f est bijective.
   - f est surjective : en effet soit $y \in F$ alors on note $x = g(y) \in E$; on a bien : $f(x) = f(g(y)) = f \circ g(y) = id_F(y) = y$, donc f est bien surjective.
   - f est injective : soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On compose par g (à gauche) alors $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ donc $id_E(x_1) = id_E(x_2)$ donc $x_1 = x_2$; f est bien injective.
2. • Si f est bijective alors g est aussi bijective car $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$ et on applique ce que l'on vient de démontrer avec g à la place de f . Ainsi $g^{-1} = f$.
   • Si f est bijective, g est unique : en effet soit $h : F \longrightarrow E$ une autre application telle que $h \circ f = id_E$ et $f \circ h = id_F$; en particulier $f \circ h = id_F = f \circ g$, donc pour tout $y \in F$, $f(h(y)) = f(g(y))$ or f est injective alors $h(y) = g(y)$, ceci pour tout $y \in F$; d'où $h = g$.

$\square$

Proposition 2.2.5. *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des applications bijectives. L'application $g \circ f$ est bijective et sa bijection réciproque est*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Preuve. D'après la proposition 2.2.4, il existe $u : F \longrightarrow E$ tel que $u \circ f = id_E$ et $f \circ u = id_F$. Il existe aussi $v : G \longrightarrow F$ tel que $v \circ g = id_F$ et $g \circ v = id_G$. On a alors $(g \circ f) \circ (u \circ v) = g \circ (f \circ u) \circ v = g \circ id_F \circ v = g \circ v = id_G$. Et $(u \circ v) \circ (g \circ f) = u \circ (v \circ g) \circ f = u \circ id_F \circ f = u \circ f = id_E$. Donc $g \circ f$ est bijective et son inverse est $u \circ v$. Comme u est la bijection réciproque de f et v celle de g alors : $u \circ v = f^{-1} \circ g^{-1}$. □

Proposition 2.2.6. *Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.*

1. *Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.*
2. *Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.*

Preuve.

1. On a $g \circ f : E \longrightarrow G$. Supposons que f et g sont injectives et montrons que $g \circ f$ est injective. Soient $x_1, x_2 \in E$
$$\begin{aligned} g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) &\Longrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\Longrightarrow f(x_1) = f(x_2) \text{ (g est injective)} \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \text{ (f est injective)} \end{aligned}$$
ce qui montre que $g \circ f$ est injective.
2. Supposons que f et g sont surjectives et montrons que $g \circ f$ est surjective.
Soit $z \in G$, puisque g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$, comme $y \in F$ et f est surjective alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc $z = g(f(x))$ et on déduit que :
$$\forall z \in G, \exists x \in E, z = g \circ f(x)$$
ce qui montre que $g \circ f$ est surjective.

□

Proposition 2.2.7. *Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.*

1. *Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.*
2. *Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.*

Preuve. 1. Supposons que $g \circ f$ est injective et montrons que f est injective. Soient $x_1, x_2 \in E$, alors

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \text{ (g est une application)} \\ &\Longrightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \ (g \circ f \text{ est injective}) \end{aligned}$$

ce qui montre que f est injective.

2. Supposons que $g \circ f$ est surjective et montrons que g est surjective. Soit $z \in G$, alors il existe $x \in E$ tel que $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$. Ainsi il existe $y = f(x) \in F$ tel que $z = g(y)$.
   Donc
   $$\forall z \in G, \exists y \in F, z = g(y)$$
   Ceci montre que g est surjective.

$\square$

2.2.4 Exercices

Exercice 2.2.1.

1. *Soit l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ et $A = [-1, 4]$. Déterminer*

   (a) *L'image directe de A par f.*

   (b) *L'image réciproque de A par f.*

2. *Quelle est l'image directe des ensembles $\mathbb{R}$, $[0, 2\pi]$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et l'image réciproque des ensembles $[0, 1]$, $[3, 4]$, $[1, 2]$ par l'application $x \longmapsto \sin(x)$?*

Exercice 2.2.2. *Soit l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 1$. Considérons les ensembles $A = [-3, 2]$, $B = [0, 4]$*

- *Comparer les ensembles $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$*

- *Quelle condition doit vérifier f pour que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$*

Exercice 2.2.3. *Soient E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et l'application $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour toutes parties disjointes de E, on ait*

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B)$$

1. *Montrer que $f(\varnothing) = 0$*
2. *Montrer que pour toutes parties A, B de E, on a*

$$f(A \cup B) + f(A \cap B) = f(A) + f(B)$$

Exercice 2.2.4.

1. *Soit l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x < 0 \\ 1 + x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

   (a) *Déterminer les ensembles suivants $f(\mathbb{R})$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{-1\})$, $f^{-1}([1, 2])$*

   (b) *f est-elle injective ? f est-elle surjective ?*

2. *Soit l'application $g : \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ telle que*

$$g(x) = \frac{9}{2x - 1}$$

   Montrer que g est une bijection. Déterminer son application réciproque. Déterminer $g^{-1}([-5, 2])$

Exercice 2.2.5. *Etudier l'injectivité et la surjectivité de l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par*

$$f(x, y) = (x + y, xy)$$

Corrigés

Corrigé 2.2.1.

1. **(a)** *On a :*

$$f(A) = f([-1,4]) = \{f(x) \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 4\}$$

or

$$[-1,4] = [-1,0] \cup [0,4]$$

alors

$$f([-1,4]) = f([-1,0]) \cup f([0,4])$$

Il est clair que

$$-1 \leq x \leq 0 \Longrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$$

et

$$0 \leq x \leq 4 \Longrightarrow 0 \leq x^2 \leq 16$$

Ainsi

$$f([-1,4]) = [0,1] \cup [0,16] = [0,16]$$

(b) *On a*

$$f^{-1}([-1,4]) = f^{-1}([-1,0]) \cup f^{-1}([0,4])$$

or

$$f^{-1}([-1,0]) = \{x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 0\} = \{0\}$$

et

$$f^{-1}([0,4]) = \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq 4\}$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x) \leq 4 &\iff 0 \leq x^2 \leq 4 \\ &\iff 0 \leq |x| \leq 2 \\ &\iff -2 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

Ainsi $f^{-1}([0,4]) = [-2,2]$
D'où $f^{-1}([-1,4]) = \{0\} \cup [-2,2] = [-2,2]$

2. *On pose* $g(x) = \sin(x)$

- $g(\mathbb{R}) = \{\sin(x), x \in \mathbb{R}\} = [-1,1]$
- $g([0,2\pi]) = \{\sin(x), x \in [0,2\pi]\} = [-1,1]$

- $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left\{\sin(x), x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\} = [0, 1]$
- $g^{-1}([0,1]) = \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq \sin(x) \leq 1\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi, 2k\pi + \pi]$
- $g^{-1}([3,4]) = \{x \in \mathbb{R}, 3 \leq \sin(x) \leq 4\} = \varnothing$
- $g^{-1}([1,2]) = \{x \in \mathbb{R}, 1 \leq \sin(x) \leq 2\} = \{x \in \mathbb{R}, \sin(x) = 1\} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Corrigé 2.2.2. - *D'un côté, on a*

$$A \cap B = [-3, 2] \cap [0, 4] = [0, 2]$$

alors

$$f(A \cap B) = f([0, 2]) = \{x^2 + 1, 0 \leq x \leq 2\} = [1, 5]$$

d'un autre côté, on a

$$f(A) = f([-3, 2]) = f([-3, 0]) \cup f([0, 2]) = [1, 10] \cup [1, 5] = [1, 10]$$

et

$$f(B) = f([0, 4]) = [1, 17]$$

Il est clair que

$$f(A) \cap f(B) \not\subseteq f(A \cap B)$$

- *A quelle condition on a $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$?*

$$\begin{aligned} y \in f(A) \cap f(B) &\iff y \in f(A) \wedge y \in f(B) \\ &\implies (\exists x_1 \in A, y = f(x_1)) \wedge (\exists x_2 \in B, y = f(x_2)) \end{aligned}$$

Si f est injective, alors $x_1 = x_2$ et par suite on a

$$\exists x \in A \cap B,\ y = f(x)$$

d'où $y \in f(A \cap B)$.

Corrigé 2.2.3. *1. On a $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$ alors par définition de f*

$$f(\varnothing) = f(\varnothing \cup \varnothing) = f(\varnothing) + f(\varnothing)$$

d'où $f(\varnothing) = 0$

2. *On a* $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ *et* $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$
alors
$f(A \cup B) = f(A \cup (B \setminus A)) = f(A) + f(B \setminus A)$
et
$f(B) = f(A \cap B) + f(B \setminus A)$
Il s'ensuit alors
$f(A \cup B) + f(A \cap B) = f(A) + f(B \setminus A) + f(B) - f(B \setminus A) = f(A) + f(B)$

Corrigé 2.2.4. *1.* **(a)**

- $f(\mathbb{R}) = \{f(x), x \in \mathbb{R}\}$
comme $\mathbb{R} = \mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}^+$ *alors* $f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}_-^*) \cup f(\mathbb{R}^+)$
- $f(\mathbb{R}_-^*) = \{1\}$
- $f(\mathbb{R}^+) = \{x + 1,\ x \geq 0\} = [\,1, +\infty\,[$
ce qui donne $f(\mathbb{R}) = [\,1, +\infty\,[$
- $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\}$
Il suffit alors de résoudre l'équation $f(x) = 0$.
- *Sur* $\mathbb{R}_-^*$, $f(x) = 0$ *n'admet pas de solution .*
- *Sur* $\mathbb{R}^+$, $f(x) = 0 \Longrightarrow x = -1 \notin \mathbb{R}^+$
d'où
$$\nexists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$$
On déduit alors
$$f^{-1}(\{0\}) = \varnothing$$
- $f^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1\}$
- $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, f(x) = 1$
- *Pour* $x \in \mathbb{R}^+, x + 1 = 1 \Longrightarrow x = 0$
on obtient alors
$$f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R}_-^* \cup \{0\} = \mathbb{R}^-$$
- $f^{-1}(\{-1\}) = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = -1\}$
- $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ f(x) = 1 \neq -1$
- *Pour* $x \in \mathbb{R}^+,\ x + 1 = -1 \Longrightarrow x = -2 \notin \mathbb{R}^+$
d'où
$$\nexists x \in \mathbb{R},\ f(x) = -1$$

On déduit alors

$$f^{-1}(\{-1\}) = \varnothing$$

- $f^{-1}([1,2]) = f^{-1}(\{1\}) \cup f^{-1}(]\,1,2\,])$
  - $f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R}^-$ *(déjà calculé)*
  - $f^{-1}(]\,1,2\,]) = \{x \in \mathbb{R}, 1 < f(x) \leq 2\}$

  Il est clair qu'il n'existe pas de réels négatif ayant une image positive. Pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$1 < x + 1 \leq 2 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$$

Ainsi

$$f^{-1}(]\,1,2\,]) =]\,0,1\,]$$

d'où

$$f^{-1}([1,2]) = \mathbb{R}^- \cup]\,0,1\,] =]-\infty,1\,]$$

(b) *- f n'est pas injective car $f(-4) = f(-3) = 1$*
- f n'est pas surjective car par exemple 0 et -1 n'ont pas d'antécédents. En général, tous les éléments de l'intervalle $]-\infty,1\,[$ n'ont pas d'antécédents par l'application f.

2. g est bijective si et seulement si g est injective et surjective.

- *Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$*

$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_1) &\Longrightarrow \tfrac{9}{2x_1-1} = \tfrac{9}{2x_1-1} \\ &\Longrightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

  Ainsi on a montré que g est injective.

- *Soit $y \in \mathbb{R}^*$, cherchons un $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ tel que $y = g(x)$?*

$$\begin{aligned} y = g(x) &\Longrightarrow y = \tfrac{9}{2x-1} \\ &\Longrightarrow y(2x-1) = 9 \quad \text{comme } y \neq 0 \text{ alors } \tfrac{9+y}{2y} \text{ est} \\ &\Longrightarrow x = \tfrac{9+y}{2y} \end{aligned}$$

  bien défini. On doit montrer que $\frac{9+y}{2y} \neq \frac{1}{2}$? On raisonne *par l'absurde, c-à-d on suppose que* $\frac{9+y}{2y} = \frac{1}{2}$, *alors* $9 = 0$ *ce qui est impossible. On déduit alors*

$$\forall y \in \mathbb{R}^*,\ \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\},\ y = g(x),$$

ce qui montre que g *est surjective. Ainsi, on vient de montrer que* g *est bijective.*

- *Son application réciproque est*

$$\begin{array}{rcccl} g^{-1} & : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \\ & & x & \longmapsto & g^{-1}(x) = \frac{9+x}{2x} = \frac{9}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \end{array}$$

- $g^{-1}([-5,2]) = g^{-1}([-5,0\,[) \cup g^{-1}(]\,0,2])$

\- $-5 \leq x < 0 \Longrightarrow \frac{9}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \leq \frac{-2}{5}$
\- $0 < x \leq 2 \Longrightarrow \frac{11}{4} \leq \frac{9}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}$
Ainsi

$$g^{-1}([-5,2]) = \,]-\infty, \frac{-2}{5}\,] \cup [\,\frac{11}{4}, +\infty\,[$$

Corrigé 2.2.5. • f *n'est pas injective car* $\exists (1,4),(4,1) \in \mathbb{R}^2$ *tels que*

$$f(1,4) = f(4,1) = (5,4) \text{ et } (1,4) \neq (4,1)$$

- *Pour que f soit surjective, il faut que*

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (a,b)$$

$$f(x,y) = (a,b) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & a \\ xy & = & b \end{array} \right.$$

or x *et* y *sont solutions de l'équation* $x^2 - ax + b = 0$ *si et seulement si* $a^2 - 4b \geq 0$
Pour $(a,b) = (2,3)$, *on a* $a^2 - 4b = -8 < 0$ *alors le système* $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ xy & = & 3 \end{array} \right.$ *n'admet pas de solutions dans* $\mathbb{R}^2$. *Ce qui montre que f n'est pas surjective.*

Chapitre 3

Relations Binaires

Sommaire

3.1 Généralités

Définition 3.1.1. *Etant donné deux ensembles E et F. Une relation de E vers F est toute assertion reliant un élément de E à un élément de F pouvant être vérifiée ou non. On note une relation par* $\mathcal{R}$.
L'ensemble E s'appelle l'ensemble de départ de $\mathcal{R}$, *F l'ensemble d'arrivée de* $\mathcal{R}$.
Pour tout élément $x \in E$ *et tout élément* $y \in F$ *vérifiant* $\mathcal{R}$, *on dit que x de E est en relation par* $\mathcal{R}$ *avec y, ce que l'on note* $x\mathcal{R}y$, *sinon on écrit* $x \not\mathcal{R} y$.
Si E=F, la relation $\mathcal{R}$ *est dite relation binaire dans E.*

Exemples 3.1.1. *Voici quelques exemples simples de relations binaires :*

- *On considère les ensembles* $E = \{1, 3, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 17\}$ $F = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ *et la relation* $\mathcal{R}$ *définie de E dans F*

par « ... est le double de ... »
- l'élément 4 de E est le double de l'élément 2 de F alors $4\mathcal{R}2$.
- l'élément 11 de E n'est pas le double de l'élément 5 de F alors $11 \not\mathcal{R} 5$.

- $\mathcal{P}(E)$ *l'ensemble de toutes les parties d'un ensemble E. On définit la relation* $\mathcal{R}$ *dans* $\mathcal{P}(E)$ *par :*

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ A\mathcal{R}B \Longleftrightarrow A \subset B$$

$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \varnothing \subset A,$ *alors* $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \varnothing \mathcal{R} A$

- *Soit* $\mathcal{P}$ *le plan. On définit la relation* $\mathcal{R}$ *dans* $\mathcal{P}$ *par :*
Pour toutes droites $(D), (\Delta)$, $(D)\mathcal{R}(\Delta) \Longleftrightarrow (D)//(\Delta)$

3.1.1 Propriétés des relations binaires dans un ensemble

Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation définie dans E.

1. **Réflexivité** : $\mathcal{R}$ est dite rexive si

$$\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$$

2. **Symétrie** : $\mathcal{R}$ est dite symétrique si

$$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$$

3. **Transitivité** : $\mathcal{R}$ est dite transitive si

$$\forall x, y, z \in E,\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z$$

4. **Antisymétrie** : $\mathcal{R}$ est dite antisymétrique si

$$\forall x, y \in E,\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \Longrightarrow x = y$$

Exemples 3.1.2.

- *L'égalité dans un ensemble quelconque est réflexive, symétrique et transitive.*

- *L'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$ est réflexive, non symétrique, antisymétrique et transitive.*
- *Dans $\mathbb{R}$, la relation « ...$\leq$... » est réflexive, non symétrique, antisymétrique et transitive.*
- *Dans le plan $\mathcal{P}$, la relation « ... est parallèle... » est réflexive, symétrique, non antisymétrique et transitive.*

3.2 Relation d'équivalence

Définition 3.2.1. *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire dans un ensemble E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.*

Exemples 3.2.1. *On montre facilement que les relations suivantes sont des relations d'équivalence.*

- *La relation d'égalité dans un ensemble quelconque est une relation d'équivalence.*
- *Dans le plan $\mathcal{P}$, la relation « ... est parallèle... » est une relation d'équivalence.*

Étant donnée une relation d'équivalence, on identifie les éléments qui sont en relation en introduisant les classes d'équivalence.

Définition 3.2.2. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans un ensemble E. Pour chaque x de E, on appelle classe d'équivalence de x le sous-ensemble de E défini par :*

$$\dot{x} = \{y \in E,\ x\mathcal{R}y\}$$

Si $y \in \dot{x}$, on dit que y est un représentant de $\dot{x}$. L'ensemble des classes d'équivalence se nomme ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$ et se note $E_{/\mathcal{R}}$

Proposition 3.2.1. *Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence. On a les propriétés suivantes :*

1. $\forall x, y \in E,\ \dot{x} = \dot{y} \Longleftrightarrow x\mathcal{R}y$

2. $\forall x, y \in E,\ \dot{x} = \dot{y} \vee \dot{x} \cap \dot{y} = \varnothing$

3. *Les classes d'équivalence forment une partition de E :*

$$E = \bigcup_{x \in E} \dot{x}$$

Exemple 3.2.1. *Dans* $\mathbb{R}$*, on définit la relation* $\mathcal{R}$ *par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1$$

Montrer que $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence et déterminer l'ensemble* $\mathbb{R}_{/\mathcal{R}}$ *.*

1. $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence*

   a)- $\mathcal{R}$ *est réflexive car d'après la réflexivité de l'égalité, on a*

   $$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = x^2 - 1$$

   donc

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}x$$

   ce qui montre que $\mathcal{R}$ *est une relation réflexive.*

   b)- $\mathcal{R}$ *est symétrique car d'après la symétrie de l'égalité, on a*

   $$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y &\Longleftrightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1 \\ &\Longleftrightarrow y^2 - 1 = x^2 - 1 \\ &\Longleftrightarrow y\mathcal{R}x \end{aligned}$$

   donc

   $$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow y\mathcal{R}x$$

   ce qui montre que $\mathcal{R}$ *est une relation symétrique.*

   c)- $\mathcal{R}$ *est transitive car on a*

   $$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) &\Longrightarrow (x^2 - 1 = y^2 - 1) \wedge (y^2 - 1 = z^2 - 1) \\ &\Longrightarrow x^2 - 1 = z^2 - 1 \text{ car l'égalité est transitive} \\ &\Longrightarrow x\mathcal{R}z \end{aligned}$$

donc

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Longrightarrow (x\mathcal{R}z)$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est une relation transitive.
De a), b) et c), on déduit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. *Déterminons l'ensemble quotient $\mathbb{R}_{/\mathcal{R}}$.*
   Soit $x \in \mathbb{R}$, cherchons $y \in \mathbb{R}$ tel que $y\mathcal{R}x$?

$$\begin{array}{rcl} y\mathcal{R}x & \Longleftrightarrow & y^2 - 1 = x^2 - 1 \\ & \Longleftrightarrow & (y - x)(y + x) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & (y = x) \vee (y = -x) \end{array}$$

   Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \dot{x} = \{x, -x\}$, par suite

$$\mathbb{R}_{/\mathcal{R}} = \{\{x, -x\}, x \in \mathbb{R}\}$$

3.3 Relation d'ordre

Définition 3.3.1. *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire dans un ensemble E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si $\mathcal{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive.*

Une relation d'ordre est souvent notée $\leq$ ou encore $\preceq$. Le couple $(E, \leq)$, où E est un ensemble et $\leq$ une relation d'ordre, est appelé ensemble ordonné. La relation $x \leq y \wedge x \neq y$ est notée $x < y$.

Définition 3.3.2. *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. La relation $\leq$ est dite relation d'ordre total si deux éléments quelconques de E sont comparables :*

$$\forall x, y \in E,\ (x \leq y \vee y \leq x)$$

Dans le cas contraire, l'ordre est dit partiel.

Exemples 3.3.1. *Voici quelques exemples de relations d'ordre.*

- *La relation « ...$\leq$... »usuelle sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre total.*

- *Si E est un ensemble ayant au moins deux éléments, l'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre partiel.*
- *Dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par*

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, (x,y)\mathcal{R}(x',y') \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leq x' \\ \wedge \\ y \leq y' \end{cases}$$

Il est facile de montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. l'ordre n'est pas total.
En effet, pour $(x,y)=(1,2)$ et $(x',y')=(3,1)$, on a

$$1 \leq 3 \wedge 2 \not\leq 1$$

donc

$$(1,2) \not\mathcal{R}(3,1)$$

On a aussi

$$3 \not\leq 1 \wedge 1 \leq 2$$

donc

$$(3,1) \not\mathcal{R}(1,2)$$

ce qui montre que l'ordre n'est pas total mais partiel.

3.4 Exercices

Exercice 3.4.1. *On définit dans $\mathbb{R}^*$, la relation binaire $\mathcal{R}$ par*

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x.y > 0$$

1. *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*
2. *Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{R}^*_{/\mathcal{R}}$.*

Exercice 3.4.2. *Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie dans $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^4 - x^2 = y^4 - y^2$$

1. *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

2. *Déterminer la classe d'équivalence de 0, en déduire celle de 1.*
3. *Déterminer la classe d'équivalence d'un élément quelconque* $a \in \mathbb{R}$

Exercice 3.4.3. *On munit* $\mathbb{R}^2$ *de la relation notée* $\prec$ *définie par :*

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \prec (x',y') \Longleftrightarrow (x - x' \geq 0 \wedge y = y')$$

Montrer que $\prec$ *est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?*

Exercice 3.4.4. $\mathcal{R}$ *une relation binaire définie dans* $\mathbb{N}^*$ *par*

$$\forall a,b \in \mathbb{N}^*,\ a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}^*,\ a = b^p$$

1. *Montrer que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'ordre dans* $\mathbb{N}^*$.
2. *L'ordre est-il total ou partiel ?*
3. *Déterminer* $a \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $(2\mathcal{R}a) \wedge (3\mathcal{R}a)$.

Corrigés

Corrigé 3.4.1.

1. *$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

a)- $\mathcal{R}$ *est réflexive car*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^2 > 0,$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x\mathcal{R}x,$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ *est réflexive.*

b)- $\mathcal{R}$ *est symétrique car on a*

$$\begin{aligned}\forall x,y \in \mathbb{R}^*,\ x\mathcal{R}y &\Longleftrightarrow x.y > 0\\ &\Longleftrightarrow y.x > 0 \ (\textit{le produit est commutatif dans } \mathbb{R})\\ &\Longleftrightarrow y\mathcal{R}x,\end{aligned}$$

donc

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^*,\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow y\mathcal{R}x,$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ *est symétrique.*

c)- *$\mathcal{R}$ est transitive car on a*

$$\begin{aligned}\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*,\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) &\iff \begin{cases} x.y > 0 \\ \wedge \\ y.z > 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow x.y^2.z > 0 \\ &\Longrightarrow x.z > 0\ (y^2 > 0) \\ &\Longrightarrow x\mathcal{R}z,\end{aligned}$$

donc

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*,\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z,$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est transitive.

De a), b) et c), on déduit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. *L'ensemble $\mathbb{R}^*_{/\mathcal{R}}$*
Soit $a \in \mathbb{R}^*$,
$$\dot{a} = \{x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}a\},$$
or
$$x\mathcal{R}a \iff x.a > 0.$$
Deux cas se présentent :
Si $a > 0$ alors $x > 0$, par suite $\dot{a} = \mathbb{R}^*_+$
Si $a < 0$ alors $x < 0$, par suite $\dot{a} = \mathbb{R}^*_-$
On déduit alors
$$\mathbb{R}_{/\mathcal{R}} = \left\{\mathbb{R}^{*+}, \mathbb{R}^{*-}\right\}$$

Corrigé 3.4.2.

1. *$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

a)- *$\mathcal{R}$ est réflexive car par la réflexivité de l'égalité on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^4 - x^2 = x^4 - x^2,$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}x,$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est réflexive.

b)- *$\mathcal{R}$ est symétrique car par la symétrie de l'égalité on a*

$$\begin{array}{rcl}\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y & \Longleftrightarrow & x^4 - x^2 = y^4 - y^2 \\ & \Longleftrightarrow & y^4 - y^2 = x^4 - x^2 \\ & \Longleftrightarrow & y\mathcal{R}x,\end{array}$$

donc

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow y\mathcal{R}x,$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est symétrique.

c)- *$\mathcal{R}$ est transitive car par la transitivité de l'égalité on a*

$$\begin{array}{rcl}\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} x^4 - x^2 = y^4 - y^2 \\ y^4 - y^2 = z^4 - z^2 \end{array}\right. \\ & \Longrightarrow & x^4 - x^2 = z^4 - z^2 \\ & \Longrightarrow & x\mathcal{R}z,\end{array}$$

donc

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z,$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est transitive.

De a), b) et c), on déduit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2.

$$\dot{0} = \{x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}0\}$$

On a alors

$$\begin{array}{rcl}x\mathcal{R}0 & \Longleftrightarrow & x^4 - x^2 = 0 \\ & \Longleftrightarrow & x^2(x^2 - 1) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1\end{array}$$

ce qui donne

$$\dot{0} = \{0, 1, -1\}$$

Comme $1 \in \dot{0}$ alors $1\mathcal{R}0$, par suite $\dot{0} = \dot{1}$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$,

$$\dot{a} = \{x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}a\}$$

$$x\mathcal{R}a \Longleftrightarrow x^4 - x^2 = a^4 - a^2 \qquad \text{(E)}$$

En posant $y = x^2$*, on doit alors résoudre l'équation*

$$y^2 - y - (a^4 - a^2) = 0 \tag{E'}$$

avec $y \geq 0$*. Le calcul du discriminant donne*

$$\Delta = 4a^4 - 4a^2 + 1 = (2a^2 - 1)^2 \geq 0.$$

Deux cas se présentent,
- Si $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$*, on a* $\Delta = 0$*, on obtient* $y = \frac{1}{2}$ *et par suite* $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$*.*
D'où

$$\dot{a} = \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

- Si $a \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$*, on a* $\Delta > 0$*. L'équation* (E') *admet deux solutions distinctes*

$$y_1 = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2},\ y_2 = \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2}$$

Pour $|a| > \frac{1}{\sqrt{2}}$*,* $|2a^2 - 1| = 2a^2 - 1$*. On obtient alors,*

$$y_1 = \frac{1+|2a^2-1|}{2} = a^2 \geq 0,\ y_2 = \frac{1-|2a^2-1|}{2} = 1 - a^2$$

Si $a \in\ ]-\infty, -1\,[\ \cup\ ]\,1, +\infty\,[\ , y_2 < 0$*. Ainsi les solutions de* (E) *sont* $x = \pm a$*. D'où*

$$\dot{a} = \{a, -a\}\,.$$

Si $a \in \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\,[\ \cup\ ]\,\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\,\right], y_2 \geq 0$*. Ainsi les solutions de* (E) *sont*

$$x = \pm a,\ x = \pm\sqrt{1-a^2},$$

d'où

$$\dot{a} = \left\{a, -a, -\sqrt{1-a^2}, +\sqrt{1-a^2}\right\}.$$

Pour $|a| < \frac{1}{\sqrt{2}}$*,* $|2a^2 - 1| = -2a^2 + 1$*. On obtient alors*

$$y_1 = \frac{1+|2a^2-1|}{2} = 1 - a^2 \geq 0,\ y_2 = a^2 \geq 0$$

Ainsi les solutions de (E) *sont*

$$x = \pm\sqrt{1-a^2},\ x = \pm a,$$

d'où

$$\dot{a} = \left\{a, -a, -\sqrt{1-a^2}, +\sqrt{1-a^2}\right\}.$$

Voici une méthode plus simple pour résoudre l'équation (E).
L'équation (E') *peut s'écrire*

$$(y^2 - a^2)(y^2 + a^2 - 1) = 0.$$

Les solutions sont $y_1 = a^2$ *et* $y_2 = 1 - a^2$. *Les solutions de* (E) *s'obtiennent en résolvant les deux équations* $x^2 = y_1$ *et* $x^2 = y_2$.
Pour $x^2 = a^2$, *on obtient* $x = \pm a$.
Pour $x^2 = 1 - a^2$, *deux cas se présentent :*
Si $a \in \,]-\infty, -1\,[\, \cup \,]\,1, +\infty\,]$, $1 - a^2 < 0$.
Les solutions de (E) *sont alors* $x = \pm a$. *Ainsi,*

$$\dot{a} = \{+a, -a\}.$$

Si $a \in [-1, 1]$, $1 - a^2 \geq 0$. *Les solutions de* (E) *sont alors*

$$x = \pm a, x = \pm\sqrt{1-a^2}.$$

Ainsi,

$$\dot{a} = \left\{+a, -a, +\sqrt{1-a^2}, -\sqrt{1-a^2}\right\}.$$

Corrigé 3.4.3.

$$\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \prec (x',y') \Longleftrightarrow (x - x' \geq)0 \wedge (y = y')$$

1. *La relation* $\prec$ *est une relation d'ordre.*

a)- *La relation* $\prec$ *est réflexive car on a*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x - x \geq 0 \wedge y = y)$$

donc

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \prec (x,y)$$

ce qui montre que $\prec$ *est réflexive.*

b)- *La relation* $\prec$ *est antisymètrique car on a*
$\forall (x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}((x,y)\prec(x',y'))\wedge((x',y')\prec(x,y)) &\iff \left\{\begin{array}{l} x-x'\geq 0\wedge y=y' \\ x'-x\geq 0\wedge y'=y\end{array}\right. \\ &\Longrightarrow x-x'=0\wedge y=y' \\ &\Longrightarrow (x,y)=(x',y')\end{aligned}$$

donc

$$\forall (x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2,\ ((x,y)\prec(x',y'))\wedge((x',y')\prec(x,y))\Longrightarrow (x,y)=(x',y')$$

ce qui montre que $\prec$ *est antisymètrique.*

c)- *La relation* $\prec$ *est transitive car on a*
$\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'')\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}((x,y)\prec(x',y'))\wedge((x',y')\prec(x'',y'')) &\iff \left\{\begin{array}{l} x-x'\geq 0\wedge y=y' \\ x'-x''\geq 0\wedge y'=y''\end{array}\right. \\ &\Longrightarrow x-x''\geq 0\wedge y=y'' \\ &\Longrightarrow (x,y)\prec(x'',y'')\end{aligned}$$

donc

$$\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'')\in\mathbb{R}^2,\ ((x,y)\prec(x',y'))\wedge((x',y')\prec(x'',y''))\Longrightarrow (x,y)\prec(x$$

ce qui montre que $\prec$ *est transitive.*
De a), b) et c), on déduit que $\prec$ *est une relation d'ordre.*

2. *La relation* $\prec$ *est une relation d'ordre partiel dans* $\mathbb{R}^2$ *car pour*
   $(x,y)=(5,4)$ *et* $(x',y')=(3,2)$ *on a*
   $5-3\geq 0\wedge 4\neq 2$ *alors* $(5,4)\not\prec(3,2)$
   on a aussi $3-5\ngeq 0\wedge 2\neq 4$ *alors*$(3,2)\not\prec(5,4)$.
   ce qui montre que l'ordre n'est pas total mais partiel.

Corrigé 3.4.4.

$$\forall a,b\in\mathbb{N}^*,\ a\mathcal{R}b\Longleftrightarrow \exists p\in\mathbb{N}^*,\ a=b^p$$

1. *La relation* $\mathcal{R}$ *est une relation d'ordre.*

a)- *La relation $\mathcal{R}$ est réflexive car on a*

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \; a = a^1$$

donc

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \; a\mathcal{R}a$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est réflexive.

b)- *La relation $\mathcal{R}$ est antisymétrique car on a $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$*

$$\begin{aligned}
(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}a) &\iff \begin{cases} \exists p \in \mathbb{N}^*, \; a = b^p \\ \exists q \in \mathbb{N}^*, \; b = a^q \end{cases} \\
&\Longrightarrow a = a^{pq} \\
&\Longrightarrow \ln a = pq \ln a \\
&\Longrightarrow \ln a(1 - pq) = 0
\end{aligned}$$

si $a = 1$ alors $b = a^q = 1 = a$
si $a \neq 1$ alors $\ln a \neq 0$ puis $pq = 1$. Or $p, q \in \mathbb{N}^*$ donc $p = q = 1$ par suite $a = b$. donc

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^*, \; (a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}a) \Longrightarrow a = b$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est antisymètrique.

c)- *La relation $\mathcal{R}$ est transitive car on a*
$\forall a, b, c \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) &\iff \begin{cases} \exists p \in \mathbb{N}^*, \; a = b^p \\ \exists q \in \mathbb{N}^*, \; b = c^q \end{cases} \\
&\Longrightarrow a = c^{pq}, pq \in \mathbb{N}^* \\
&\Longrightarrow a\mathcal{R}c
\end{aligned}$$

donc

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}^*, \; (a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \Longrightarrow a\mathcal{R}c$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est transitive.
De a), b) et c), on déduit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

2. *La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel dans $\mathbb{N}^*$ car pour $a = 2$ et $b = 3$*
$\nexists p \in \mathbb{N}^*, 2 = 3^p$ *alors* $2 \not\mathcal{R} 3$
et $\nexists q \in \mathbb{N}^*, 3 = 2^q$ *alors* $3 \not\mathcal{R} 2$ *ce qui montre que l'ordre n'est pas total mais partiel.*

3. *Déterminer $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $(2\mathcal{R}a) \wedge (3\mathcal{R}a)$.*

$$(2\mathcal{R}a) \wedge (3\mathcal{R}a) \iff \begin{cases} \exists p \in \mathbb{N}^*,\ 2 = a^p \\ \exists q \in \mathbb{N}^*,\ 3 = a^q \end{cases}$$

donc a divise 2 et 3. Or 2 et 3 sont premiers entre eux, ainsi a=1. On obtient alors 2=1=3 ce qui est absurde.
On déduit

$$\nexists a \in \mathbb{N}^*, (2\mathcal{R}a) \wedge (3\mathcal{R}a)$$

Bibliographie

1. E. Azoulay, J. Avignant, G. Auliac, Problèmes corrigés de Mathématiques, DEUG MIAS/SM, Ediscience (Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2002.

2. C. Baba-Hamed, K. Benhabib, AlgèbreI Rappels de Cours et Exercices avec Solutions, Office des publications universitaires, Alger, 1988.

3. A. Denmat, F. Héaulme, Algèbre générale, série : TD, Dunod 2000.

4. J-P. Escofier, Toute l'Algèbre du 1^{er} cycle, Dunod 2002.

5. A. Kostrikin, Introduction à l'Algèbre, Editons mir, Moscou, 1986.

6. M. Zitouni, Algèbre cours de $1^{\text{ière}}$ Année des Universités, Office des publications universitaires, Alger, 1986.