

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE D'ORAN
MOHAMED BOUDIAF



Thèse

Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat L.M.D

Filière :
Automatique

Option :
Automatisation et contrôle des systèmes industriels

Par : Mr. LITIM Mustapha

Contribution à la Modélisation et à la
Commande des Robots Parallèles

Soutenu le 27/04/2015 devant le jury composé de :

Président	Mr. M. BOUHAMIDA	Professeur, U.S.T.O-MB
Directeur de thèse	Mr. A. OMARI	Professeur, U.S.T.O-MB
Examinatrice	Mme. R. GHOUL HADIBY	Professeur, U.S.T.O-MB
Examineur	Mr. A. MOKHTARI	Professeur, U.S.T.O-MB
Examineur	Mr. A. MANSOURI	Professeur, ENP d'Oran
Examineur	Mr. M.F. KHELFI	Professeur, Université d'Oran

2014/2015

*Je dédie ce mémoire à tous qui me sont chers, mes parents, mon frère Yassine, mes sœurs,
mes grands-parents, ma grande famille et tous mes amis depuis l'enfance. . . .*

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu de m'avoir donné la force et la volonté pour accomplir ce travail de thèse, Dieu merci.

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements les plus sincères à Mon directeur de thèse Monsieur OMARI Abdelhafid Professeur à L'Université des Sciences et de La Technologie Mohamed Boudiaf U.S.T.O-M.B pour avoir dirigé cette thèse et m'avoir permis de la réaliser dans les meilleures conditions. Qu'il trouve ici l'expression de mon respect et ma profonde reconnaissance.

Je tiens également à remercier les membres de mon comité de thèse pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et pour les remarques constructives qu'ils ont fait sur mon projet de thèse. J'adresse mes remerciements aux membres du jury d'avoir accepté de juger ce travail.

Je tiens à exprimer mes remerciements à Monsieur BOUHAMIDA Mohammed, Professeur à L'Université des Sciences et de La Technologie Mohamed Boudiaf U.S.T.O-M.B, pour avoir accepté de participer à ce jury d'en assumer la tâche de président. Qu'il trouve ici l'expression de mon respect et ma profonde reconnaissance.

Mes remerciements vont également à Madame R. GHOUL HADIBY, Professeur à L'Université des Sciences et de La Technologie Mohamed Boudiaf U.S.T.O-M.B. Qui elle trouve ici l'expression de mon respect et ma profonde reconnaissance.

Mes remerciements vont également à Monsieur MOKHTARI Abdellah, Professeur à L'Université des Sciences et de La Technologie Mohamed Boudiaf U.S.T.O-M.B pour avoir accepté de juger ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de mon respect et ma profonde reconnaissance.

Mes remerciements vont également à Monsieur MANSOURI Abdellah, Professeur à L'École National Polytechnique d'Oran E.N.P.O pour avoir accepté de juger ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de mon respect et ma profonde reconnaissance.

Mes remerciements vont également à Monsieur KHELFI Mohammed Fayçal, Professeur à l'Université d'Oran pour avoir accepté de juger ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de mon respect et ma profonde reconnaissance.

Je tiens tout particulièrement à exprimer mes remerciements à Monsieur Antoine DE-QUIDT, Maître de Conférence à L'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, pour m'avoir accueilli au sein de son équipe de recherche, durant tous mes périodes des stages effectués au France au sein du Laboratoire d'Automatique, de Mécanique, d'Informatique Industrielles et Humaines (LAMIH). La confiance que vous m'avez accordée et les moyens que vous avez mis à ma disposition m'ont permis de mener à bien ce projet de recherche, je vous en suis très reconnaissant. C'était vraiment très agréable de travailler avec vous.

Mes plus vifs remerciements vont évidemment à Monsieur Laurent VERMEIREN, Maître de Conférence HdR , Monsieur Dr. ALLOUCHE Benyamine et Monsieur Dr. Quoc Viet DANG, à L'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis avec qui je prends toujours autant de plaisir à travailler. Vos conseils toujours avisés et votre détermination m'ont permis d'avancer à pas surs dans l'accomplissement de ce travail. Très sincèrement, je suis très honoré de travailler avec vous. Merci pour tout.

Sur une note plus personnelle, je tien à exprimer mes profonds remerciement à mes parents, qui ont fait de moi l'homme que je suis aujourd'hui. Merci pour toutes les opportunités que vous avez rendues possibles grâce à vos soutiens et vos encouragements.

Je remercie très chaleureusement les anciens et nouveaux doctorants du laboratoire que j'ai côtoyés durant ces années et avec qui j'ai partagé des moments mémorables, Mohamed El Amine LARBI, Youssouf MEDDAHI, KARFA Djoudi, SAYAH Abdelkader, Ibrahim QISHTA , Sadek NEKROUF et à tous mes amis.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
TABLE DES MATIÈRES	vi
LISTE DES TABLEAUX	x
LISTE DES FIGURES	xi
LISTE DES ANNEXES	xv
I REVUE DE LITTÉRATURE	6
CHAPITRE 1 Etat de l’art sur les Robots Parallèles	7
1.1 Généralités à propos des robots parallèles	7
1.2 Définition	11
1.2.1 Actionneurs (articulation actives)	11
1.2.2 Articulations passives et nomenclature des robots parallèles	12
1.2.3 Comparaison entre robot sériel et parallèle	12
1.3 Architectures	13
1.3.1 Robots pleinement parallèles	13
1.3.2 Robots plans	13
1.3.3 Robots spatiaux	14
1.3.4 Robots à trois degrés de liberté	14
1.3.5 Robots à Cinq degrés de libertés	16
1.3.6 Robots à six degrés de libertés	16
1.4 Modélisation et commande des robots parallèles en littérature	18
1.4.1 Etat de l’art sur la modélisation	18
1.4.2 Etat de l’art sur la commande	19
1.5 Conclusion	20

II MODÉLISATION DES ROBOTS PARALLÈLES 21

CHAPITRE 2	Modélisation Géométrique, cinématique et Dynamique des Robots Parallèles	22
2.1	Introduction	22
2.1.1	Comment modéliser un robot à architecture parallèle?	22
2.1.2	Description	22
2.1.3	Modèle Géométrique Inverse MGI	23
2.1.4	Modèle Cinématique	24
2.1.5	Modèle Dynamique	24
2.2	Modélisation du robot parallèle plan Biglide	27
2.2.1	Description du robot parallèle plan Biglide	27
2.2.2	Modèle géométrique inverse du robot plan Biglide	28
2.2.3	Modèle géométrique direct du robot plan Biglide MGD	29
2.2.4	Modèle cinématique du robot Biglide	29
2.2.5	Modèle dynamique inverse du robot parallèle plan Biglide MDI	30
2.3	Simulation du modèle dynamique en boucle ouverte du Robot Biglide	32
2.4	Le Manipulateur de Gough-Stewart	35
2.4.1	Utilisations	36
2.4.2	Configurations	36
2.4.3	Définition et notation utilisée	39
2.4.4	Modèle Géométrique Inverse MGI	41
2.4.5	Simulation de modèle géométrique inverse	42
2.4.6	Modèle Géométrique Direct MGD	49
2.4.7	Modèle Cinématique Inverse (<i>MCI</i>)	49
2.4.8	Étude des configurations singulières	52
2.4.9	Résultats de simulation (Exemple de configuration singulière)	53
2.4.10	Modèle dynamique de la plate-forme de Gough-Stewart	56
2.5	Conclusion	59

III COMMANDE PAR MODE GLISSANT APPLIQUÉE AUX ROBOTS PARALLÈLES 60

CHAPITRE 3	Commande par Mode Glissant appliquée aux robots parallèles	61
3.1	Commande par Mode de Glissement pour les Systèmes Mono Variable	61

3.1.1	Introduction	61
3.1.2	Rappels sur la commande par mode glissant pour les systèmes mono variables	61
3.1.3	Problème de réticence (Chattering problem).	65
3.1.4	Adoucissement de la commutation	65
3.1.5	La fonction com_{\arctg}	67
3.2	Commande par Mode Glissant des Systèmes Multi Variables	68
3.2.1	Introduction	68
3.2.2	Commande par mode glissant appliquée aux systèmes multi variables	68
3.3	Application de la commande par mode glissant aux robots parallèles	71
3.3.1	Conception de la loi de commande par mode glissant (Robot Plan Biglide)	71
3.4	Étude de la stabilité de Lyapunov du Robot Biglide	74
3.4.1	Simulation de la commande par mode glissant du robot Biglide	75
3.4.2	Simulation	75
3.4.3	Discussion des résultats obtenus	76
3.5	Application de la commande par mode glissant sur la plat-forme de Gough-Stewart	85
3.5.1	Conception de la loi de commande	85
3.5.2	Résultats de simulation	87
3.5.3	Discussion des résultats obtenus	95
3.6	Conclusion	95

IV LA COMMANDE BACKSTEPPING

97

CHAPITRE 4	Commande backstepping appliquée aux Robots parallèles	98
4.1	Introduction	98
4.1.1	Idée Générale de la commande backstepping	98
4.1.2	Conception de la loi de commande	99
4.2	Application de la commande backstepping au robot parallèle Biglide	102
4.2.1	Résultats de simulation de la commande backstepping	104
4.2.2	Résultats et Discussion	114
4.3	Application de la commande backstepping au manipulateur parallèle de Gough-Stewart	114
4.3.1	Simulation	117
4.3.2	Résultats et Discussion	117

4.3.3	Étude comparative entre la commande par mode glissant et la commande backstepping	123
4.4	Conclusion	124
V	CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVE	125
4.5	Conclusion Générale et Perspective	126
4.6	Améliorations futures	127
VI	BIBLIOGRAPHIE	128
	RÉFÉRENCES	129
VII	ANNEXES	137
	ANNEXES	138
A.1	Modélisation géométrique inverse de manipulateur parallèle de Gough-Stewart de type TSSM	138
B.1	Modélisation dynamique de robot parallèle plan Biglide	142
B.2	Interpolation polynomiale de degré cinq	144
C.1	Théorie de Lyapunov	146
C.2	Définition (Stabilité au sens de Lyapunov)	146
C.2.1	Définition	147

LISTE DES TABLEAUX

Tableau B.1	Les paramètres du modèle dynamique de robot parallèle Biglide	143
Tableau B.2	les paramètres de la trajectoire	145

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	La première application : le cinéma dynamique [65]	8
Figure 1.2	La machine à peindre de Pollard à 5 degrés de liberté [69]	8
Figure 1.3	La plateforme de Gough-Stewart pour le test de pneumatiques [25]	8
Figure 1.4	La plateforme de Gough-Stewart pour la simulation de vol aérien [81]	9
Figure 1.5	La plateforme de Gough-Stewart pour la simulation de vol aérien vue par Cappel [1]	9
Figure 1.6	Simulateur de vol de Stewart	10
Figure 1.7	Première machine-outil, salon de Chicago : la Variax (Gidding, Lewis)	10
Figure 1.8	Médecine (surgiscope, Suède)	10
Figure 1.9	Différents architectures des robots [59]	11
Figure 1.10	Différents articulations mécanique utilisées pour la construction des robots parallèles	12
Figure 1.11	Exemples de robots plans à $3ddl$ le 3-RPR et le 3-RRR	14
Figure 1.12	FlexPicker ABB (Version industrielle du robot Delta)	15
Figure 1.13	« l'œil agile », Laboratoire de robotique de l'Université de LAVAL	15
Figure 1.14	Le Quattro (Adept, USA)	16
Figure 1.15	Le robot Par4	16
Figure 1.16	Robot Penta-WH, Institute of Mechatronics and virtual Engineering- IMVE de la Lappeenranta University of Technology Finland	17
Figure 1.17	Platform de stewart	17
Figure 1.18	Platform de stewart type (6-3)	17
Figure 2.1	Robot parallèle plan à $2ddl$	22
Figure 2.2	la représentation du robot parallèle Plan Biglide	28
Figure 2.3	Espace de travail et Trajectoires : ($T1$) Trajectoire en bas, ($T2$) Tra- jectoire en Haut, ($T3$) Trajectoire a Gauche, ($T4$) Trajectoire a droite.	29
Figure 2.4	Réponse en boucle ouverte pour une trajectoire en Haut avec x-position	33
Figure 2.5	Réponse en boucle ouverte pour une trajectoire en Haut avec y-position	33
Figure 2.6	Réponse en boucle ouverte pour une trajectoire en bas avec x-position	34
Figure 2.7	Réponse en boucle ouverte pour une trajectoire en bas avec y-position	34
Figure 2.8	Modélisation géométrique de la plate-forme de Gough-Stewart	35
Figure 2.9	(a) Machine-outil basée sur une plate-forme de Gough (Ingersoll, USA) [15]	36
Figure 2.10	(b) Simulateur de vol (CAE, Canada) [15]	36

Figure 2.11	Modélisation SSM (vue du dessus) [79]	37
Figure 2.12	Modélisation TSSM (vue du dessus) [79]	38
Figure 2.13	Modélisation MSSM (vue du dessus) [79]	39
Figure 2.14	Représentation géométrique du robot (position nominale).	40
Figure 2.15	Translation sur l'axe Z	43
Figure 2.16	Variation de lacet sur l'axe Z	44
Figure 2.17	Variation de roulis sur l'axe Z	45
Figure 2.18	Variation de tangage selon l'axe Z	46
Figure 2.19	Translation sur l'axe X	47
Figure 2.20	Translation sur l'axe Y	48
Figure 2.21	Variation de lacet sur l'axe Z	54
Figure 2.22	Translation sur l'axe X (situation singulière)	56
Figure 3.1	Schématisation du mode de glissement dans le plan de phase	62
Figure 3.2	Phénomène de réticence dans un plan bidimensionnel	66
Figure 3.3	Fonction saturation $sat(S(t))$	67
Figure 3.4	Fonction com_{\sin}	67
Figure 3.5	Fonction smooth ($S(t)$)	67
Figure 3.6	Fonction $arctg(S(t))$	67
Figure 3.7	La structure de régulateur de position à mode glissant appliqué au robot parallèle Biglide	75
Figure 3.8	Schémas de réponse pour une trajectoire en haute avec $\Delta m = 0kg$	77
Figure 3.9	Schémas de réponse pour une trajectoire en bas avec $\Delta m = 0kg$	78
Figure 3.10	Schémas de réponse pour une trajectoire en haut avec $\Delta m = 0.816kg$	79
Figure 3.11	Schémas de réponse pour une trajectoire en bas avec $\Delta m = 0.816kg$	80
Figure 3.12	Réponse de vitesse pour une trajectoire en haut sur l'axe x , $\Delta m = 0kg$	81
Figure 3.13	Réponse de vitesse pour une trajectoire en haut sur l'axe y , $\Delta m = 0kg$	81
Figure 3.14	Réponse de vitesse pour une trajectoire en bas sur l'axe x , $\Delta m = 0kg$	81
Figure 3.15	Réponse de vitesse pour une trajectoire en bas sur l'axe y , $\Delta m = 0kg$	81
Figure 3.16	Réponse de vitesse pour une trajectoire en haut sur l'axe x , $\Delta m = 0.816kg$	82
Figure 3.17	Réponse de vitesse pour une trajectoire en haut sur l'axe y , $\Delta m = 0.816kg$	82
Figure 3.18	Réponse de vitesse pour une trajectoire en bas sur l'axe x , $\Delta m = 0.816kg$	82
Figure 3.19	Réponse de vitesse pour une trajectoire en bas sur l'axe y , $\Delta m = 0.816kg$	82
Figure 3.20	(a)-(c) Critères de performance (erreur de position et signal d'entrée de la commande) calculée pour tous les déplacements ($T1$ et $T4$) sur axes x et y , $\Delta m = 0kg$	83

Figure 3.21	(b)-(d) Critères de performance (erreur de position et le signal d'entrée de la commande) calculée pour tous les déplacements ($T1$ et $T4$) sur axes x et y , $\Delta m = 0.816kg$	84
Figure 3.22	Schéma bloc de la commande par mode glissant appliquée au manipulateur de Gough-Stewart	88
Figure 3.23	Position initial de la plat-forme de Gough-Stewart	88
Figure 3.24	Réponse avec une translation de la plat-forme mobile selon l'axe Z	89
Figure 3.25	Réponse avec une translation de la plat-forme mobile selon l'axe X	89
Figure 3.26	Réponse avec une translation de la plat-forme mobile selon l'axe Y	90
Figure 3.27	Erreur de position de la plat-forme mobile selon l'axe Z	90
Figure 3.28	Erreur de position de la plat-forme mobile selon l'axe X	91
Figure 3.29	Erreur de position de la plat-forme mobile selon l'axe Y	91
Figure 3.30	Position des actionneurs avec une translation selon l'axe Z	92
Figure 3.31	Position des actionneurs avec une translation selon l'axe X	92
Figure 3.32	Position des actionneurs avec une translation selon l'axe Y	93
Figure 3.33	Réponse avec une translation de la plat-forme mobile selon l'axe Z avec perturbation	93
Figure 3.34	Réponse avec une translation de la plat-forme mobile selon l'axe X avec perturbation	94
Figure 3.35	Réponse avec une translation de la plat-forme mobile selon l'axe Y avec perturbation	94
Figure 4.1	Schéma illustratif de la commande backstepping	99
Figure 4.2	Schéma bloc de la commande backstepping appliquée au robot parallèle Biglide	105
Figure 4.3	Réponse pour une trajectoire en haut avec $\Delta m = 0kg$	106
Figure 4.4	Réponse pour une trajectoire en bas avec $\Delta m = 0kg$	107
Figure 4.5	Réponse pour une trajectoire en haut avec $\Delta m = 0.816kg$	108
Figure 4.6	Réponse pour une trajectoire en bas avec $\Delta m = 0.816kg$	109
Figure 4.7	Réponse de vitesse pour une trajectoire en haut sur l'axe x , $\Delta m = 0kg$	110
Figure 4.8	Réponse de vitesse pour une trajectoire en haut sur l'axe y , $\Delta m = 0kg$	110
Figure 4.9	Réponse de vitesse pour une trajectoire en bas sur l'axe x , $\Delta m = 0kg$	110
Figure 4.10	Réponse de vitesse pour une trajectoire en bas sur l'axe y , $\Delta m = 0kg$	110
Figure 4.11	Réponse de vitesse pour une trajectoire en haut sur l'axe x , $\Delta m = 0.816kg$	111
Figure 4.12	Réponse de vitesse pour une trajectoire en haut sur l'axe y , $\Delta m = 0.816kg$	111
Figure 4.13	Réponse de vitesse pour une trajectoire en bas sur l'axe x , $\Delta m = 0.816kg$	111

Figure 4.14	Réponse de vitesse pour une trajectoire en bas sur l'axe y , $\Delta m = 0.816kg$	111
Figure 4.15	(a)-(c) Critères de performance (erreur de position et signal d'entrée de la commande) calculée pour tous les déplacements ($T1$ et $T4$) sur axes x et y , $\Delta m = 0kg$.	112
Figure 4.16	(b)-(d) Critères de performance (erreur de position et signal d'entrée de la commande) calculés pour tous les déplacements ($T1$ et $T4$) sur axes x et y , $\Delta m = 0.816kg$.	113
Figure 4.17	Schéma bloc de la commande backstepping appliquée au manipulateur de Gough-Stewart.	118
Figure 4.18	Réponse avec une translation de la plat-forme mobile selon l'axe Z	119
Figure 4.19	Réponse avec une translation de la plat-forme mobile selon l'axe X	119
Figure 4.20	Réponse avec une translation de la plat-forme mobile selon l'axe Y	120
Figure 4.21	Erreur de position de la plat-forme mobile selon l'axe Z	120
Figure 4.22	Erreur de position de la plat-forme mobile selon l'axe X	121
Figure 4.23	Erreur de position de la plat-forme mobile selon l'axe Y	121
Figure 4.24	Réponse du contrôleur backstepping, une translation de l'effecteur selon l'axe Z avec perturbation	122
Figure 4.25	Réponse du contrôleur par mode glissant, une translation de l'effecteur selon l'axe Z avec perturbation	122
Figure 4.26	Réponse du contrôleur backstepping, une translation de l'effecteur selon l'axe Y avec perturbation	122
Figure 4.27	Réponse du contrôleur par mode glissant, une translation de l'effecteur selon l'axe Y avec perturbation	122
Figure 4.28	Réponse du contrôleur backstepping, une translation de l'effecteur selon l'axe X avec perturbation	123
Figure 4.29	Réponse du contrôleur par mode glissant, une translation de l'effecteur selon l'axe X avec perturbation	123
Figure A.1	Plate-forme de Gough-Stewart de type TSSM [27]	138
Figure A.2	Dimension physique de la base et de la plate-forme mobile[27]	139

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	Modèle géométrique inverse de manipulateur de Gough-Stewart de type TSSM	138
Annexe B	Modèle dynamique de robot Biglide	142
Annexe C	Étude de la stabilité	146

INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les systèmes mécaniques articulés permettant le déplacement d'un solide (que l'on appellera l'organe terminal) par rapport à une base fixe jouent un rôle très important dans multiples applications. Un solide dans l'espace peut effectuer différents type de déplacement, des translations et des rotations que l'on appelle ses degrés de liberté. Pour un solide dans l'espace le nombre totale de degrés de liberté ne peut excéder 6 (3 translations selon des axes perpendiculaires entre eux et 3 rotations autour de ces axes). On repère la position et l'orientation de l'organe terminal (ce que l'on qualifera de posture) par ses coordonnées généralisées qui sont généralement les coordonnées d'un point particulier de l'organe terminal et des angles qui définissent son orientation. Dès que l'on peut commander plusieurs degrés de liberté de l'organe terminal par l'intermédiaire d'un système mécanique celui-ci peut être qualifié de robot.

On a assisté ces dernières années à un fort développement dans le monde industriel de l'utilisation des robots, principalement en raison de leur flexibilité. Toutefois l'architecture mécanique des robots les plus couramment utilisés s'avère peu appropriée pour certaines tâches. C'est pourquoi depuis quelques années d'autres types d'architecture ont été étudiés et commencent à trouver leur place dans le monde industriel. C'est en particulier le cas des manipulateurs parallèles que nous allons étudier dans ce manuscrit de thèse.

L'arrivée des manipulateurs à structure parallèle dans l'industrie permettent d'apporter un gain en terme de vitesse et donc de cadence de production par rapport aux manipulateurs sériels classiques. Ainsi, les robots parallèles commencent à s'imposer sur les chaînes d'assemblage et de conditionnement. De plus, leurs performances exceptionnelles en terme de vitesse les a donc naturellement amenés à intéresser le secteur industriel de la production manufacturière pour des opérations d'usinage. Cependant, l'usinage requiert une grande précision dont la pratique montre qu'il ne s'avère pas être le fort des machines outils à structure parallèle, contrairement à la théorie. Ces pertes de précision ne semblent pas être totalement intrinsèques à la structure mécanique mais plutôt à l'ensemble formé par la modélisation, l'identification, la génération de trajectoire et enfin la commande. C'est dans cette optique d'amélioration de la robustesse et de la précision par la commande non linéaire que s'inscrit alors cette thèse. Ainsi, nous nous intéressons à de nouvelles voies d'explorations en partant du constat suivant : la commande des robots parallèles est généralement la copie conforme de celle des robots sériels. En effet, bon nombre de travaux effectuent la commande et la mo-

INTRODUCTION GÉNÉRALE

délimitation dans l'espace articulaire. Toutefois, si la tâche, qui est généralement définie dans l'espace Cartésien, peut être réalisée correctement en commandant les articulations d'un robot sériel, ce n'est pas le cas d'un robot parallèle. En effet, l'espace articulaire d'un robot parallèle n'est généralement pas une image unique de l'espace de la tâche puisque certaines articulations dites passives ne peuvent être commandées. En toute rigueur, la commande d'un robot parallèle doit donc être effectuée dans l'espace de la tâche.

La commande non linéaire a connu une expansion ainsi qu'une diversification importante depuis les années 50, dû entre autres à la multiplication des procédés industriels et des applications robotiques. L'étude du contrôle non linéaire est d'un grand intérêt, puisque la majorité des systèmes réels sont essentiellement non linéaires. Les méthodes linéaires conventionnelles sont satisfaisantes mais pour des plages de fonctionnement restreintes. Dès que le système sort de ce domaine de fonctionnement, le contrôleur linéaire n'est plus valable et ne garantit plus la stabilité du système. D'où l'intérêt d'étudier plus profondément les méthodes non linéaires de commande. L'une des méthodes de commande non linéaires les plus connues est la commande par linéarisation exacte (connue également sous le nom de « feedback linearization ») au sens entrée-état ou bien au sens entrée-sortie [77]. Cette commande consiste à linéariser le système par compensation et à appliquer au nouveau système linéarisé une commande linéaire classique, par exemple une commande par retour d'état. Cependant, pour pouvoir appliquer cette méthode, le système doit vérifier des critères mathématiques précis. Un cas particulier de la linéarisation exacte appliquée sur les bras manipulateurs est la loi partitionnée, plus connue sous le nom de « Computed Torque » [39]. Cependant, aussi intéressante qu'elle puisse paraître, la commande par linéarisation exacte, n'est pas une commande robuste, et elle est, de ce fait, sensible aux variations paramétriques. Il est toutefois possible de la stabiliser de manière robuste, en ajoutant un processus adaptatif au contrôleur non linéaire [3].

Une autre méthode non linéaire utilisée récemment sur les systèmes non linéaires est la commande « Backstepping ». cette commande a été introduite au début des années 90, par plusieurs chercheurs, on citera entre autres : P. Kokotovic, H. Khalil, Kanellakopoulos [42],[43], [21]. Pour assurer la convergence du système vers le point d'équilibre, cette méthode se base sur la construction progressive de fonctions de Lyapunov formées à partir des erreurs de poursuite [96]. Une méthode de commande non linéaire qui est également très répandue dans la littérature est la commande par mode glissant. C'est une commande qui est reconnue pour sa grande robustesse vis à vis des incertitudes paramétriques et des perturbations externes au système, d'autant plus qu'elle est simple à appliquer. C'est la raison pour laquelle

INTRODUCTION GÉNÉRALE

nous avons choisi d'étudier plus profondément la commande par mode glissant. Cette méthode se base sur la conception de contrôleurs à structure variable pour amener le système à suivre une dynamique bien définie [5], [54].

Ces travaux de thèse s'attachent donc à étudier une synthèse des lois de commande appliquée sur les robots parallèles dans l'espace opérationnelle. Nous nous intéressons plus particulièrement à l'étude des deux dernières lois de commande non linéaire citées précédemment. La commande par mode glissant et la commande backstepping. La définition d'un modèle adapté aux spécificités de la structure mécanique et à la commande utilisée est alors nécessaire. Une fois les schémas de commande et les modèles définis dans un espace adapté aux manipulateurs à structure parallèle, les variables commandées doivent être obtenues.

Ce manuscrit de thèse est structuré en quatre chapitres de la manière suivante .

Chapitre 1

Dans le premier chapitre, nous faisons un survol des travaux effectués sur la modélisation et la commande des robots parallèles dans la littérature.

Chapitre 2

Ce chapitre, est dédiée à la modélisation dynamique des robots manipulateurs présentant des architectures parallèles.

La première étude est réalisée sur un robot parallèle plan à 2 degrés de liberté (travaux effectué au sein de laboratoire d'Automatique, de Mécanique, d'Informatique Industrielles et Humaine LAMIH/CNRS).

La deuxième étude est réalisée sur la plateforme parallèle de Gough-Stewart, qui représente à notre connaissance, un des robots parallèles les plus étudié dans la littérature.

Chapitre 3

Le troisième chapitre concerne la commande à structure variable où l'approche non linéaire par mode glissant est traitée. On introduit quelques aspects méthodologiques nécessaires pour la compréhension des systèmes à structures variables. Cette technique sera appliquée pour commander et contrôler la trajectoire de deux manipulateurs parallèles, le robot parallèle Plan Biglide (Maquette de LAMIH) et la plate-forme de Gough-Stewart.

Chapitre 4

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le chapitre quatre, quant à lui est consacré à la conception de la deuxième loi de commande non linéaire basée sur la technique du backstepping appliqué sur le robot parallèle Biglide pour la commande des mouvements selon les axes X, Y. et sur le manipulateur de Gough-Stewart. Une étude de la robustesse est effectuée vis-à-vis des variations paramétriques telle que la variation de la masse de l'organe terminal.

Ce manuscrit s'achève par un ensemble de commentaires et de remarques générales sur les résultats obtenus et quelques discussions sur les perspectives à mener.

Première partie

REVUE DE LITTÉRATURE

CHAPITRE 1

Etat de l'art sur les Robots Parallèles

1.1 Généralités à propos des robots parallèles

Les robots se définissent comme des mécanismes destinés à prendre et déplacer des objets, avec comme caractéristiques fondamentales leur fonctionnalité, leur polyvalence et leur facilité de reprogrammation. La première intuition de l'homme a été de reproduire la morphologie du bras humain, en utilisant des robots de type série. Les robots sériels sont à la base de la plupart des manipulateurs. Ils se composent d'une succession d'éléments reliés entre eux par des articulations à un ou plusieurs degrés de liberté. La nécessité pour la production industrielle d'être toujours plus rapide, plus précise, oblige à utiliser des robots toujours plus performants. Les exigences de précision et de rapidité de certaines tâches industrielles sont de plus en plus difficiles à atteindre quand on travaille avec des charges lourdes et à des vitesses importantes. Dans ce cas les robots de type série ne sont pas capables de soulever des charges lourdes sans augmenter leur propre masse. Ce qui implique une imprécision dans les tâches. Les robots de type parallèle ont ainsi été créés pour remplir ces nouvelles tâches. Les mécanismes à structure parallèle sont connus depuis très longtemps, Léonard de Vinci en ayant déjà proposé au XVIème siècle. De même, les premiers travaux scientifiques sur les mécanismes parallèles sont proposés en 1645 par Wren puis en 1813 par Cauchy [56] et enfin en 1890 par Maxwell [85]. Cependant, il ne s'agissait que d'études mathématiques sur les structures mécaniques en boucle fermée. Un robot de type parallèle est composé de chaînes cinématiques fermées et indépendantes. Elles lient une base mobile, plate-forme mobile ou un organe terminal à une base fixe. Son architecture mécanique lui permet d'avoir des performances dynamiques remarquables qui ont permis son utilisation dans des applications diverses comme, par exemple, les simulateurs de vols, l'appui des outils dans la chirurgie, l'appui des lunettes pour des télescopes, le fraisage dans l'industrie. Les premières architectures expérimentales ne datent que du milieu du 20ème siècle pour le cinéma dynamique [65] Figure 1.1, la peinture [70], [69] Figure 1.2, le test de pneumatiques [25] Figure 1.3 et la simulation de vol aérien [81], [1] (Figure 1.4 et Figure 1.5). L'autre événement majeur de la robotique parallèle est l'invention du premier robot parallèle léger, le robot Delta, par le professeur Clavel dans les années 80 Figure 1.12. Ce robot, qui est à ce jour le robot parallèle le plus vendu dans le monde, marque l'arrivée des robots parallèles rapides destinés, entre autres, à des tâches de conditionnement. Le robot Par4, est un parfait exemple de l'engoue-

CHAPITRE 1

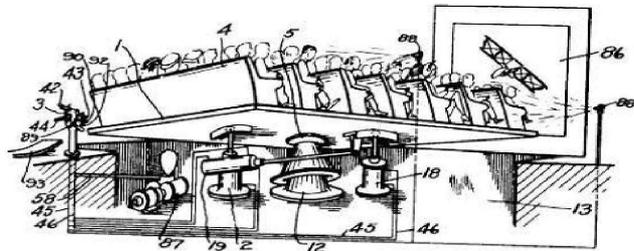


Figure 1.1 La première application : le cinéma dynamique [65]

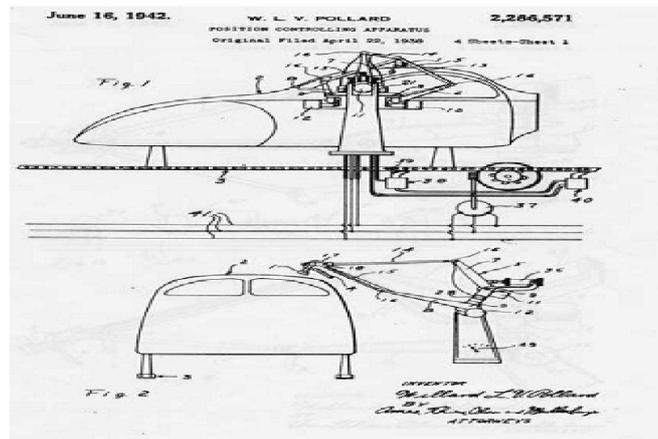


Figure 1.2 La machine à peindre de Pollard à 5 degrés de liberté [69]

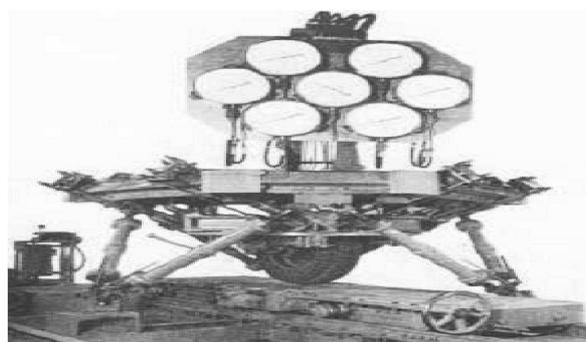


Figure 1.3 La plateforme de Gough-Stewart pour le test de pneumatiques [25]

CHAPITRE 1

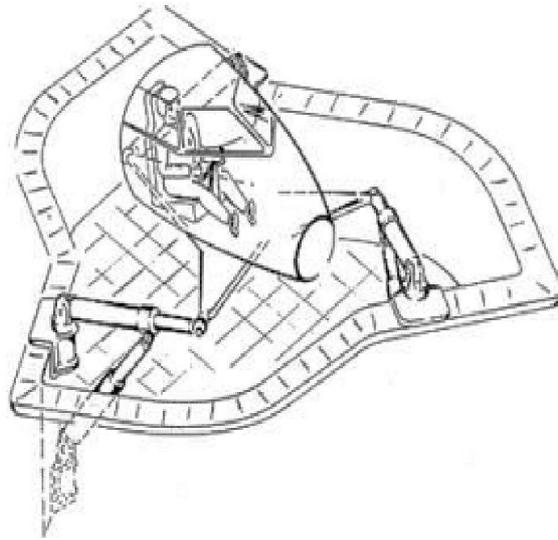


Figure 1.4 La plateforme de Gough-Stewart pour la simulation de vol aérien [81]

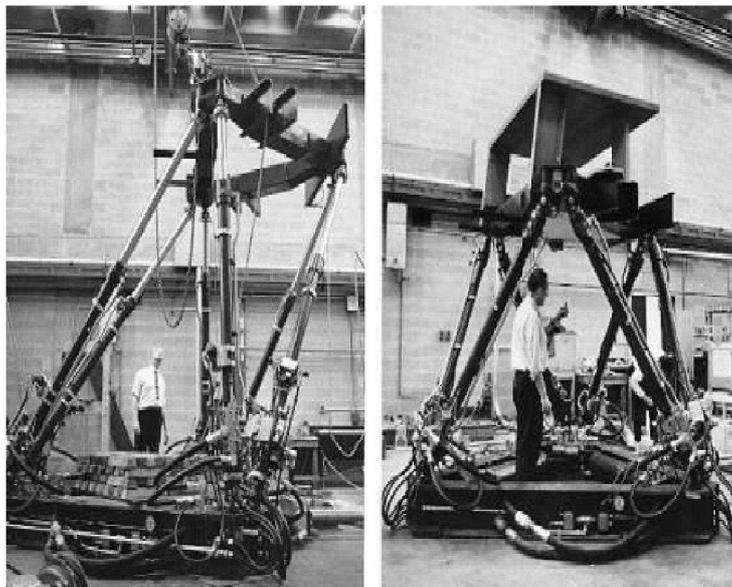


Figure 1.5 La plateforme de Gough-Stewart pour la simulation de vol aérien vue par Cappel [1]

ment de l'industrie pour les robots parallèles rapides. En effet, une version commerciale du robot Par4, le robot Quattro développé par Adept, a récemment vu le jour et est actuellement le robot le plus rapide du marché (240 cycles par minute). Il existe un grand nombre de cinématiques différentes des robots parallèles et leurs applications possibles sont nombreuses :

CHAPITRE 1

simulateur de vol Figure 1.6, machine-outil Figure 1.7, robot médical Figure 1.8, etc.

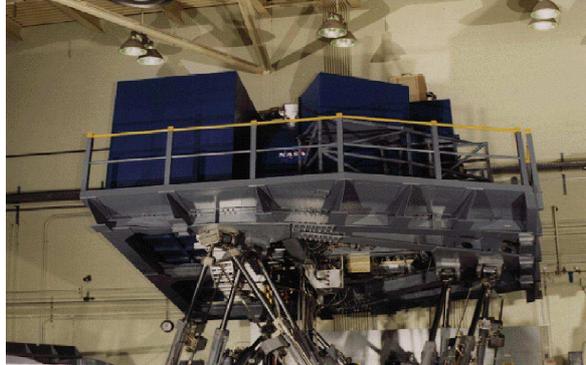


Figure 1.6 Simulateur de vol de Stewart



Figure 1.7 Première machine-outil, salon de Chicago : la Variac (Gidding, Lewis)



Figure 1.8 Médecine (surgiscope, Suède)

CHAPITRE 1

1.2 Définition

Un manipulateur parallèle généralisé est un mécanisme en chaîne cinématique fermée dont l'organe terminal est relié à la base par plusieurs chaînes cinématiques indépendantes [59]. Ces chaînes cinématiques sont composées d'articulations actives (actionneurs rotoides ou linéaires), et d'articulations passives (prismatique, révolution, sphérique, etc.). Cette définition générale d'un manipulateur parallèle permet de le distinguer d'un manipulateur sériel qui est composé d'une seule chaîne cinématique entre la base et l'organe terminal. L'association de ces deux types de structures permet de construire des structures dites hybrides Figure 1.9. La

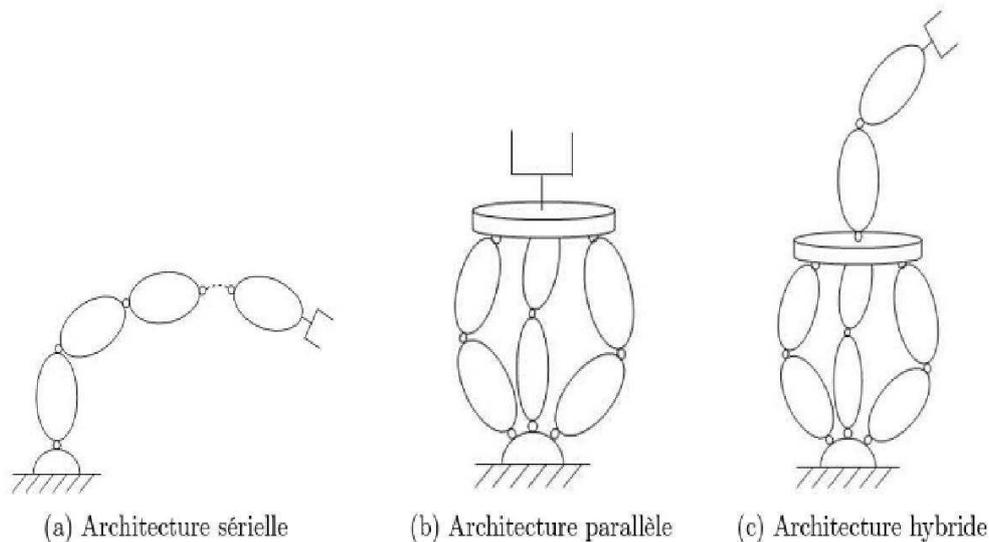


Figure 1.9 Différents architectures des robots [59]

pose de l'organe terminal désigne sa situation (position et orientation) dans l'espace. Elle est décrite par les coordonnées généralisées : (x, y, z) pour la position ; (α, β, γ) pour l'orientation. Ces angles peuvent être définis de plusieurs façons différentes suivant la convention utilisée : angles d'Euler, angles de Bryant (également appelés angles de Roulis Tangage-Lacet).

1.2.1 Actionneurs (articulation actives)

Les actionneurs ont pour rôle d'assurer le mouvement des éléments du robot suivant les ordres donnés par le système de contrôle. Les actionneurs utilisés en robotique peuvent employer l'énergie électrique, pneumatique ou hydraulique.

CHAPITRE 1

1.2.2 Articulations passives et nomenclature des robots parallèles

On construit la nomenclature conventionnelle des différentes architectures parallèles à partir de la première lettre du nom de la liaison Figure 1.10. Par exemple 6-UPS est robot parallèle avec 6 chaînes cinématiques formées chacune d'une articulation universelle (U), prismatique (P) et sphérique (S).

Nom de l'articulation	Symbole	liaison	Nombre de d.d.lf	figure
Prismatique	P	Glissière	1 Translation	
Révolution	R	Pivot	1 Rotation	
Sphérique	S	Rotule	3 Rotation	
Universel	U	Cardan	2 Rotation	

Figure 1.10 Différents articulations mécanique utilisées pour la construction des robots parallèles

1.2.3 Comparaison entre robot sériel et parallèle

Il est généralement admis qu'un robot parallèle est plus rapide, plus précis qu'un robot sériel [56]. En effet, le mouvement de l'effecteur est généré par le déplacement simultané de plusieurs actionneurs en parallèle, l'actionnement étant effectué jambe par jambe. Les

CHAPITRE 1

capacités d'accélération résultante de l'effecteur sont alors plus élevées pour un robot parallèle par rapport à un robot sériel [56], [84]. De même, un effort appliqué sur la plate-forme est soutenu par plusieurs chaînes cinématiques en boucle fermée, ce qui génère une plus grande rigidité par rapport à un robot sériel constitué d'une mise en série d'éléments élastiques [56]. Ainsi, des structures de machines parallèles plus légères que des robots sériels pour un même niveau de rigidité sont proposées, ce qui permet des sollicitations en terme de vitesse encore plus importantes [13] et [56]. En ce qui concerne la précision de réalisation de la tâche, les erreurs de montage et de commande des moteurs ne s'ajoutent pas, contrairement au cas des robots sériels [56]. La précision doit donc normalement être plus importante. A tous ces avantages s'opposent quelques inconvénients propres aux mécanismes à structure parallèle. L'inconvénient principal est le faible espace de travail par rapport à l'encombrement global de la structure [56]. En effet, contrairement aux robots sériels où la liberté de mouvement de chaque actionneur permet des courses importantes, les contraintes de fermeture de boucle restreignent la course des actionneurs et donc l'espace de travail atteignable. Cet espace de travail est encore diminué par la présence possible de singularités rendant le comportement délicat à prédire et donc la commande à réaliser [68]. Un autre inconvénient majeur provient de la complexité de la structure mécanique. En effet, la contrainte de fermeture des boucles et le nombre important de liaisons passives rendent la modélisation, et donc la commande, plus ardue que dans le cas d'un robot sériel [56].

1.3 Architectures

1.3.1 Robots pleinement parallèles

Un robot est dit pleinement parallèle quand le nombre de degrés de liberté de la plate-forme mobile (Organe terminal) est identique au nombre de chaînes cinématique indépendantes du robot. On rencontre ce type de robot dans le plan et dans l'espace.

1.3.2 Robots plans

Les robots pleinement parallèles plans présentent, en général, deux translations et une orientation de son organe terminale. Ils possèdent trois chaînes cinématiques indépendantes qui peuvent être constituées des articulations de type prismatique et rotoïde. On montre dans la Figure 1.11, deux exemples de robots plans à trois degrés de libertés (*ddl*) ayant trois chaînes identiques.

CHAPITRE 1

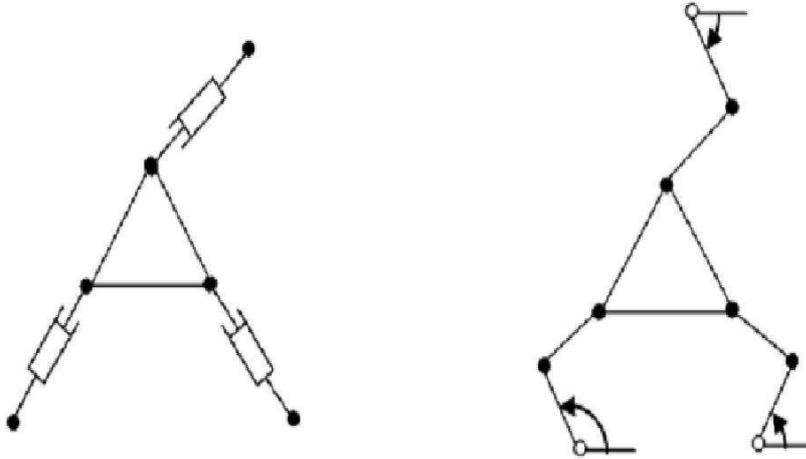


Figure 1.11 Exemples de robots plans à $3ddl$ le 3-RPR et le 3-RRR

1.3.3 Robots spatiaux

Il existe des robots à trois, quatre, cinq et six ddl dans l'espace.

1.3.4 Robots à trois degrés de liberté

Les robots parallèles à trois degrés de liberté se décomposent principalement en robots translateurs et en robots pour la rotation.

1.3.4.1 Robots translateurs

Ce sont des robots ayant trois ddl de translation. Ils présentent un intérêt important pour les opérations de transfert. Les trois translations sont suffisantes. Un mouvement de rotation selon l'axe z est souvent rajouté à l'organe terminal. Le robot delta Figure 1.12. a été proposé par [13]. Ce robot utilise des actionneurs rotatifs. Il est basé sur une propriété intéressante des parallélogrammes pour ne garder que des translations de la plate-forme mobile.

La principale application du robot Delta dans l'industrie est la prise et dépose. Plusieurs fabricants proposent une version industrielle du robot Delta pour cette application ABB, Demarex, SIG.

CHAPITRE 1



Figure 1.12 FlexPicker ABB (Version industrielle du robot Delta)

1.3.4.2 Robots pour rotation

Les manipulateurs par orientation permettent les trois rotations autour d'un point (3 – RRR). Un des robots de ce type est « l'œil agile » développé au laboratoire de robotique de l'université de LAVAL Par Gosselin et son équipe Figure 1.13.

Le robot Par4 a été développé au Laboratoire d'Informatique, de Robotique et de Microélec-



Figure 1.13 « l'œil agile », Laboratoire de robotique de l'Université de LAVAL

CHAPITRE 1

tronique de Montpellier (LIRMM) par [62], à partir des travaux de Pierrot, [12] et [44] sur les robots rapides à nacelle articulée en collaboration avec le centre de recherche Basque Fatronik. Le robot Par4 fait partie de la famille des manipulateurs à quatre degrés de liberté : trois translations et une rotation. Ce robot est actuellement commercialisé par la société Adept sous le nom de Quattro Figure 1.14.



Figure 1.14 Le Quattro (Adept, USA)



Figure 1.15 Le robot Par4

1.3.5 Robots à Cinq degrés de libertés

Un robot à cinq degrés de liberté créé par [95] est un robot parallèle penta-WH Figure 1.16, composé de 5 vérins hydrauliques. Ce robot utilisé comme dispositif de transport pour la soudure.

1.3.6 Robots à six degrés de libertés

Il existe plusieurs type de robots pleinement parallèles à six degrés de liberté ; ils peuvent être de type UPS comme les plates-formes de type Gough-Stewart Figure 1.17, Cette structure est très utilisée dans les simulateurs de vols et dans les cinémas dynamiques. Les avantages de cette structure sont les bonnes propriétés dynamiques. Stewart, en 1965, a présenté un simulateur de vol, avec une plate-forme triangulaire ; la connexion entre la base et la plate-forme utilise trois mécanismes composés de deux vérins chacun Figure 1.18.

CHAPITRE 1



Figure 1.16 Robot Penta-WH, Institute of Mechatronics and virtual Engineering-IMVE de la Lappeenranta University of Technology Finland

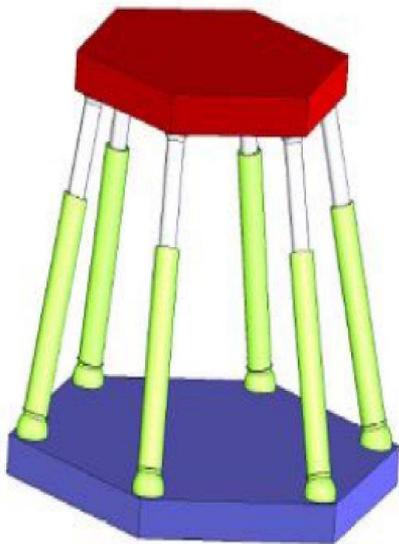


Figure 1.17 Platform de stewart

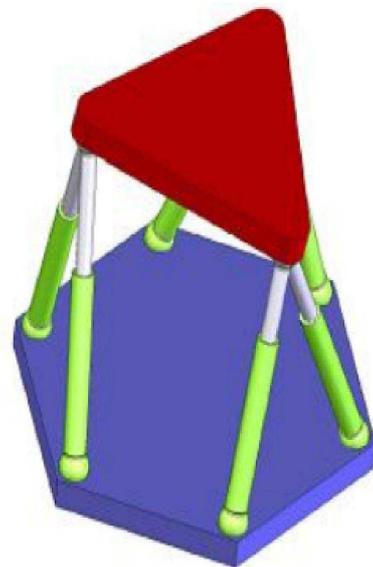


Figure 1.18 Platform de stewart type (6-3)

CHAPITRE 1

1.4 Modélisation et commande des robots parallèles en littérature

1.4.1 Etat de l'art sur la modélisation

Les robots parallèles sont des systèmes multi-corps complexes, qui sont parmi ceux les plus difficiles à modéliser, à cause de leur architecture parallèle qui comporte plusieurs boucles fermées. Suite à l'augmentation constante des performances attendues par ce type de machines, la conception de leur commande doit prendre en compte les forces d'interactions dynamiques. D'où l'intérêt d'avoir un modèle dynamique efficace pour la commande.

Un des manipulateurs parallèle le plus populaire à 6 *ddl* est la Plate-forme Stewart (SP) proposé par Stewart en 1965 comme un simulateur de vol (Stewart, 1965). Il se compose d'une plate-forme mobile (l'organe terminal), d'une base (base fixe), et six pieds extensibles reliant la base à la partie supérieure. Le mécanisme de Gough-stewart [83], [28], [55], [99], [33], [37] et [57] est le type qui représente à notre connaissance, un des robots parallèle les plus étudié dans la littérature.

La plupart des travaux de recherche concentrés sur la modélisation cinématique directe des manipulateurs parallèles dans [57].

La cinématique d'un robot à structure parallèle à 3 degrés de liberté de type UPU a été présenté dans [86]. Les auteurs dans [82] et [11] ont développé la cinématique d'un manipulateur parallèle à 3 degrés de liberté en translation pure.

Pour la conception et le contrôle des manipulateurs parallèles de type Gough-Stewart, le modèle dynamique précis est essentiel. La modélisation dynamique des manipulateurs parallèles est assez compliquée en raison de leur structure en boucle fermée.

Afin d'obtenir le modèle dynamique des robots parallèles, beaucoup de méthodes calculent le modèle dynamique de la structure arborescente et utilisent les multiplicateurs de Lagrange afin d'obtenir le modèle dynamique complet du robot [63], [52]. Le principe des travaux virtuels a été utilisé [14], [87]. L'autre grande méthode est celle de Newton-Euler qui isole dynamiquement chaque corps du système. Cette méthode est très utilisée en robotique car elle peut être mise sous la forme d'un algorithme récursif très pratique dans un contexte de commande.

La formulation de Newton-Euler a aussi été utilisée.

Les auteurs dans [72] ont donné une forme matricielle pour les robots parallèles de type Stewart, cependant leur modèle n'est pas complet. Ils négligent notamment la masse des pistons et la rotation autour de l'axe principal de chaque chaîne.

Les auteurs dans [59] propose une méthodologie pour le calcul de la dynamique d'un manipulateur de type SSM. La méthode est une adaptation de l'algorithme développé [72].

CHAPITRE 1

Le modèle dynamique inverse du robot Stewart dans lequel toutes les masses et inerties sont prises en compte a été proposé dans [24], le problème direct n'a pas été traité.

Cette méthode a été appliquée à plusieurs robots parallèles de type planaires et spatiaux [17], [19].

L'influence de l'inertie des chaînes cinématiques dans le modèle dynamique a été étudiée dans [31].

Une méthode pour le calcul de la dynamique inverse et directe des manipulateurs parallèles a été développée dans [38]. Cette approche est ensuite appliquée sur plusieurs types de robots manipulateurs parallèles [38], [35].

Le schéma récursif de Newton-Euler a un système tripode, pour calculer les forces articulaires a été appliqué [8].

1.4.2 Etat de l'art sur la commande

Traditionnellement, la conception d'une loi de commande dynamique pour commander les manipulateurs parallèles comprend généralement le PD augmentée (APD) et la commande en couple calculé [61],[22],[94]. Toutefois, la stabilité du système en boucle fermée pour des mouvements à grande vitesse ne peut pas être garantie comme souligné dans [22], ces procédés n'ont pas de garantie de stabilité et de performance.

La commande en couple calculé est très sensible aux erreurs de modélisation. Or, la complexité d'un robot parallèle impose souvent de faire des hypothèses simplificatrices pour établir le modèle dynamique. Ainsi, les erreurs de modélisation sont souvent inévitables. De ce fait, la commande en couple calculé est rarement présente sous sa forme simple mais plutôt secondée par des techniques de commande robuste [66].

Une première approche utilise des techniques prédictives pour commander les robots parallèles. Vivas [93] utilise par exemple le "General Predictive Control" pour effectuer la commande du robot H4. La commande en couple calculé articulaire utilise alors un modèle dynamique simplifié du robot H4. En effet, seule l'inertie de la plate-forme et des actionneurs sont prises en compte dans le modèle.

L'autre grande approche est la commande adaptative [45]. Plutôt que de modifier la consigne de couple par rapport à une prédiction de comportement, il est possible de déterminer une loi d'adaptation modifiant les paramètres du modèle dynamique [36]. Ainsi, Liu utilise ce type de stratégie pour un robot de type 3-RRR avec redondance d'actionnement [48]. La loi d'adaptation des paramètres dynamiques minimise l'énergie de l'erreur de position et de vitesse et l'erreur d'estimation des paramètres dynamiques.

Dans la littérature, d'autres approches plus théoriques sont également présentées basées sur des méthodes de type Lyapunov [7],[98], [40], passivité [7], commande par observateur [7],[10],

CHAPITRE 1

[88], commande par modes glissants [64], logique floue [71], [78], structure variable [97].

Ces approches sont principalement utilisées sur des commandes articulaires, mais certains travaux utilisent également une commande dans l'espace Cartésien. Ainsi, Lee [46] utilise une commande en couple calculé Cartésienne avec modèle dynamique inverse Cartésien simplifié.

Enfin, il faut également noter une approche très particulière utilisant un modèle dynamique inverse Cartésien tout en effectuant une commande dans l'espace articulaire [30], [2]. En effet, Honegger [30] et Abdellatif [2] modélisent la dynamique du robot dans l'espace Cartésien en fonction des variables de l'effecteur pour des raisons de simplification des calculs mais ne peuvent se résoudre à commander le robot dans l'espace Cartésien en raison de la présence du MGD numérique dans la boucle de retour. Ils utilisent donc un modèle dynamique pour effectuer une anticipation non linéaire à partir des seules données Cartésiennes facilement accessible que sont les consignes.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un bref aperçu sur quelques robots parallèles existant en littérature. Ensuite, nous avons cité un ensemble de travaux portant sur la modélisation et la commande des manipulateurs parallèles.

Dans le chapitre suivant, nous traiterons le problème de la modélisation dynamique, par le formalisme de Lagrange de deux robots parallèles, un manipulateur parallèle à deux degrés de libertés (le Robot parallèle Biglide) et la plate-forme de Gough-Stewart à six degrés de libertés. Le chapitre suivant fera l'objet de la modélisation des deux types de robots parallèles étudiés.

Deuxième partie

MODÉLISATION DES ROBOTS PARALLÈLES

CHAPITRE 2

Modélisation Géométrique, cinématique et Dynamique des Robots Parallèles

2.1 Introduction

Les manipulateurs considérés dans cette partie de modélisation sont deux robots parallèles planaires, la plate-forme de Gough-Stewart à six degrés de liberté et un manipulateur parallèle plan à deux degrés de liberté (Biglide Maquette de laboratoire LAMIH) (voir Figure 2.2). Des applications potentielles de ce robot comprennent l'usinage des surfaces planes.

2.1.1 Comment modéliser un robot à architecture parallèle ?

2.1.2 Description

Soit un manipulateur à architecture parallèle est composée de deux articulations motorisées (actives) et deux articulations passives (voir Figure 2.1). Les articulations passives sont accouplées au robot de façon à créer des contraintes de telle sorte que le robot reste dans son plan de travail.

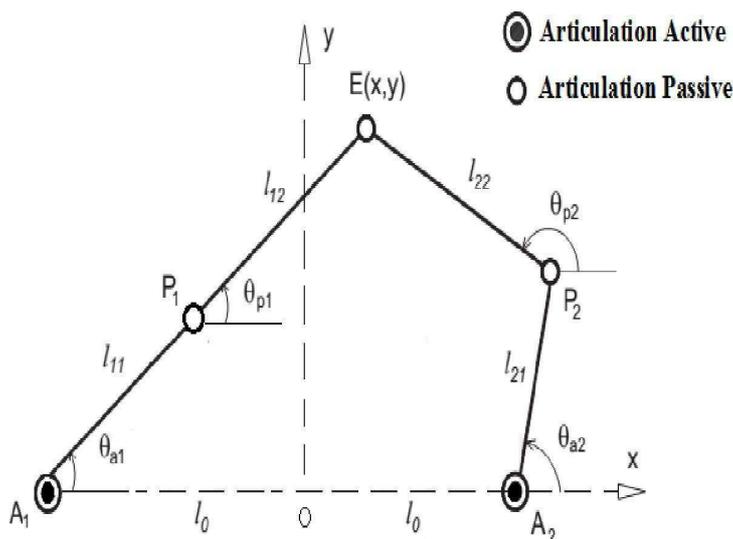


Figure 2.1 Robot parallèle plan à $2ddl$

CHAPITRE 2

2.1.3 Modèle Géométrique Inverse MGI

Soit $P = [x, y]^T$ le vecteur des coordonnées opérationnelles (2 degrés de liberté du robot) qui correspondent à la position $[x, y]^T$. Soit $\theta_{ai} = [\theta_{a1}, \theta_{a2}]^T$ le vecteur des variables articulaires correspondant aux élongations des articulations actives. $\theta_{pi} = [\theta_{p1}, \theta_{p2}]^T$ le vecteur des variables articulaires correspondant aux élongations des articulations passives. La modélisation géométrique du robot a pour but de déterminer les relations entre les coordonnées opérationnelles P et les variables articulaires θ_{ai}, θ_{pi} .

L'expression $P = f(\theta_{ai}, \theta_{pi})$ exprime le modèle géométrique direct. Quand à l'expression $\theta = f(P)$, elle correspond au modèle géométrique inverse.

A partir du schéma du robot plan (voir Figure 2.1)., on peut déduire la solution au problème géométrique inverse. Elle s'écrit facilement de la manière suivante :

$$\begin{cases} l^2 = (y - l \sin \theta_{a1})^2 + (l + x - l \cos \theta_{a1})^2 \\ l^2 = (y - l \sin \theta_{a2})^2 + (x - l - l \cos \theta_{a2})^2 \end{cases} \quad (2.1)$$

Où $l = l_0 = l_{11} = l_{12} = l_{22}$

A partir du système d'équations (2.1), les équations du problème géométrique inverse peuvent être écrites de la façon suivante :

$$\theta_{a1} = \text{atan2}(A_1, B_1) \quad (2.2)$$

Où

$$\begin{cases} A_1 = \frac{(2ly(y^2+(l+x)^2)+2\epsilon l(l+x)\sqrt{(2ly)^2+(2l(l+x))^2-(y^2+(l+x)^2)^2})}{(2ly)^2+(2l(l+x))^2} \\ B_1 = \frac{((2l(l+x))(y^2+(l+x)^2)-\epsilon 2ly\sqrt{(2ly)^2+(2l(l+x))^2-(y^2+(l+x)^2)^2})}{(2ly)^2+(2l(l+x))^2} \end{cases}$$

$\epsilon = \pm 1$

$$\theta_{a2} = \text{atan2}(A_2, B_2) \quad (2.3)$$

Où

$$\begin{cases} A_2 = \frac{(2ly(y^2+(x-l)^2)+2\epsilon l(x-l)\sqrt{(2ly)^2+(2l(x-l))^2-(y^2+(x-l)^2)^2})}{(2ly)^2+(2l(x-l))^2} \\ B_2 = \frac{((2l(x-l))(y^2+(x-l)^2)-\epsilon 2ly\sqrt{(2ly)^2+(2l(x-l))^2-(y^2+(x-l)^2)^2})}{(2ly)^2+(2l(x-l))^2} \end{cases}$$

CHAPITRE 2

$$\varepsilon = \pm 1$$

$$\theta_{p1} = ar \cos \left(\frac{-l^2 + y^2 + x^2 + 2lx}{2l^2} \right) \quad (2.4)$$

$$\theta_{p2} = ar \cos \left(\frac{-l^2 + y^2 + x^2 - 2lx}{2l^2} \right) \quad (2.5)$$

2.1.4 Modèle Cinématique

Soit $\dot{P} = [\dot{x}, \dot{y}]^T$ le vecteur contenant les vitesses linéaires du centre $E(x, y)$ de la plateforme mobile. Soit $\dot{\theta}_{ai} = [\dot{\theta}_{a1}, \dot{\theta}_{a2}]^T$ le vecteur des vitesses des articulations actives du robot. La relation entre les vitesses articulaires et opérationnelles s'établit à l'aide de la matrice jacobienne notée J . L'expression des vitesses opérationnelles \dot{P} en fonction des vitesses articulaires, s'écrit $\dot{P} = J(\dot{\theta}_{ai})$ et elle correspond au modèle cinématique direct du robot. L'expression des vitesses articulaires actives $\dot{\theta}_a$ en fonction des vitesses opérationnelles \dot{P} , correspondant au modèle cinématique inverse, s'écrit $\dot{\theta}_{ai} = J^{-1}(\dot{P})$ dans le cas où J est inversible (non singulière). Pour la plupart des robots parallèles, la résolution du problème cinématique inverse est aisée.

2.1.5 Modèle Dynamique

Pour obtenir le terme d'énergie cinétique nécessaire à la méthode de Lagrange, il faut connaître les vitesses de chacun des centres de masse des segments obtenues par la dérivée de leur position respective. En faisant la supposition que les segments sont de section uniforme et constante sur toute leur longueur, le centre de masse se trouve à mi-distance dans chaque segment.

Pour avoir les vitesses il suffit de dériver les équations des centres de masse ce qui donne respectivement :

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1} = -\frac{l}{2} \sin \theta_{ai} \dot{\theta}_{ai} \\ \dot{y}_{i1} = \frac{l}{2} \cos \theta_{ai} \dot{\theta}_{ai} \\ \dot{x}_{i2} = -l \sin \theta_{ai} \dot{\theta}_{ai} - \frac{l}{2} \sin \theta_{pi} \dot{\theta}_{pi} \\ \dot{y}_{i2} = l \cos \theta_{ai} \dot{\theta}_{ai} + \frac{l}{2} \cos \theta_{pi} \dot{\theta}_{pi} \end{cases} \quad (2.6)$$

Connaissant ces équations de vitesse, il faut maintenant les insérer dans celle de l'équation d'énergie cinétique on obtient la formule suivante :

$$L_i = \frac{1}{2} m_{i1} (\dot{x}_{i1}^2 + \dot{y}_{i1}^2) + \frac{1}{2} I_{zi1} \dot{\theta}_{ai}^2 + \frac{1}{2} m_{i2} (\dot{x}_{i2}^2 + \dot{y}_{i2}^2) + \frac{1}{2} I_{zi2} \dot{\theta}_{pi}^2 \quad (2.7)$$

CHAPITRE 2

En remplaçant les équations des vitesses de centre de gravité (2.6) dans (2.7) nous obtenons l'équation suivante :

$$L_i = \frac{1}{2} \left[\alpha_i \dot{\theta}_{ai}^2 + \beta_i \dot{\theta}_{pi}^2 + 2\gamma_i \cos(\theta_{ai} - \theta_{pi}) \dot{\theta}_{ai} \dot{\theta}_{pi} \right] \quad (2.8)$$

Où les variables α, β, γ sont présentées par :

$$\begin{cases} \alpha_i = m_{i1} \frac{l_{i1}^2}{4} + I_{zi1} + m_{i2} l_{i1}^2 \\ \beta_i = m_{i2} \frac{l_{i2}^2}{4} + I_{zi2} \\ \gamma_i = m_{i2} l_{i1} \frac{l_{i2}}{2} \end{cases}$$

Dans cette équation, la plupart des termes comme les longueurs, masses et moments d'inertie restent sous forme de variable pour que l'équation reste sous la forme la plus générale possible. Par exemple les termes de moment d'inertie, peuvent être exprimés en fonction de leurs dimensions et masse. Il est maintenant possible d'appliquer la méthode de Lagrange pour obtenir les équations dynamiques du mouvement.

2.1.5.1 Dynamique du manipulateur par la méthode de Lagrange

La méthode de Lagrange est souvent utilisée afin d'obtenir les équations différentielles du mouvement de manipulateurs. Comme toute méthode, elle repose sur les lois de la mécanique et de l'énergie. Pour des problèmes simples, il peut être plus facile d'utiliser directement la loi de Newton. Cependant, lorsqu'un problème est complexe, Lagrange s'avère une méthode puissante et relativement facile à appliquer. Elle est utilisée dans des domaines aussi variés que la mécanique et l'électromécanique.

La méthode produit, pour un système de n degrés de liberté autant d'équations couplées associées à une coordonnée généralisée. L'équation de Lagrange se formule ainsi :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L_i}{\partial \theta_i} = F_i, i = 1, 2 \quad (2.9)$$

Où L_i représente lagrangien totale du système défini (2.10) en fonction des coordonnées généralisées, θ_i est la i^{ime} coordonnée généralisée et finalement F_i est la force généralisée pour la coordonnée θ_i .

$$L_i = E_C - E_P \quad (2.10)$$

E_C, E_P représentent les énergies cinétique et potentielle.

Où $E_P = l_{i1} * g * h$ avec $h = 0$ cas du robot plan.

CHAPITRE 2

2.1.5.2 Dynamique du manipulateur parallèle plan à deux degrés de liberté

Dans cette section nous développons les équations différentielles couplées qui définiront la dynamique du manipulateur parallèle. En utilisant la méthode de Lagrange pour le manipulateur parallèle plan à deux degrés de liberté, il y aura donc un système de quatre équations et les coordonnées généralisées seront celles des articulations, soit θ_{ai} et θ_{pi} .

Avec l'énergie cinétique totale du système définie précédemment par l'équation (2.8), et l'équation de Lagrange définie par l'équation (2.9), les premières dérivées calculées sont celles par rapport aux vitesses :

$$\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\theta}_{ai}} = \alpha \dot{\theta}_{ai} + \gamma_i \cos(\theta_{ai} - \theta_{pi}) \dot{\theta}_{pi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\theta}_{ai}} \right) = \alpha_i \ddot{\theta}_{ai} + \gamma_i \cos(\theta_{ai} - \theta_{pi}) \ddot{\theta}_{pi} - \gamma_i \sin(\theta_{ai} - \theta_{pi}) \dot{\theta}_{ai} \dot{\theta}_{pi} + \gamma_i \sin(\theta_{ai} - \theta_{pi}) \dot{\theta}_{pi}^2$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\theta}_{pi}} = -\gamma_i \sin(\theta_{ai} - \theta_{pi}) \dot{\theta}_{ai} \dot{\theta}_{pi}$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\theta}_{pi}} = \beta_i \dot{\theta}_{pi} + \gamma_i \cos(\theta_{ai} - \theta_{pi}) \dot{\theta}_{ai}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\theta}_{pi}} \right) = \beta_i \ddot{\theta}_{pi} + \gamma_i \cos(\theta_{ai} - \theta_{pi}) \ddot{\theta}_{ai} + \gamma_i \sin(\theta_{ai} - \theta_{pi}) \dot{\theta}_{ai} \dot{\theta}_{pi} - \gamma_i \sin(\theta_{ai} - \theta_{pi}) \dot{\theta}_{ai}^2$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \theta_{pi}} = \gamma_i \sin(\theta_{ai} - \theta_{pi}) \dot{\theta}_{ai} \dot{\theta}_{pi}$$

Finalement.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\theta}_{ai}} \right) - \frac{\partial L_i}{\partial \theta_{ai}} = \alpha_i \ddot{\theta}_{ai} + \gamma_i \cos(\theta_{ai} - \theta_{pi}) \ddot{\theta}_{pi} + \gamma_i \sin(\theta_{ai} - \theta_{pi}) \dot{\theta}_{pi}^2 \quad (2.11)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\theta}_{pi}} \right) - \frac{\partial L_i}{\partial \theta_{pi}} = \beta_i \ddot{\theta}_{pi} + \gamma_i \cos(\theta_{ai} - \theta_{pi}) \ddot{\theta}_{ai} - \gamma_i \sin(\theta_{ai} - \theta_{pi}) \dot{\theta}_{ai}^2 \quad (2.12)$$

Où $F = [F_{ai}, F_{pi}]^T$, est la contribution des actionneurs qui sont directement les couples appliqués aux articulations.

$$F_i = M(\theta) \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} \quad (2.13)$$

L'expression de la matrice d'inertie et la matrice des forces de Coriolis, centrifuges sont don-

CHAPITRE 2

nées respectivement par :

$$M_i(\theta_i) \begin{bmatrix} \alpha_i & \gamma_i \cos(\theta_{ai} - \theta_{pi}) \\ -\gamma_i \cos(\theta_{ai} - \theta_{pi}) & \beta_i \end{bmatrix}, i = 1, 2$$

$$C_i(\theta_i, \dot{\theta}_i) \begin{bmatrix} 0 & \gamma_i \sin(\theta_{ai} - \theta_{pi}) \dot{\theta}_{pi} \\ -\gamma_i \sin(\theta_{ai} - \theta_{pi}) \dot{\theta}_{ai} & 0 \end{bmatrix}, i = 1, 2$$

Le passage de l'espace articulaire à l'espace cartésien est basé sur la formule analytique suivante :

$$\dot{\theta} = J^{-1} (\dot{P}) \quad (2.14)$$

$$\ddot{\theta} = \dot{J}^{-1} \dot{P} + J^{-1} \ddot{P} \quad (2.15)$$

Remarque les auteurs dans [92] Ont utilisé le même formalisme pour obtenir le modèle dynamique direct du robot plan Biglide dans l'espace opérationnelle qui sera présenté dans la section suivante.

2.2 Modélisation du robot parallèle plan Biglide

2.2.1 Description du robot parallèle plan Biglide

Le robot considéré dans cette partie (Maquette du laboratoire LAMIH) est symétrique à deux degrés de liberté et composé de deux segments qui ont la même longueur a liant la base à l'organe terminal (voir Figure 2.2). Avec deux articulations prismatiques motorisées, ces articulations linéaires sont utilisées pour déplacer le robot avec une translation suivant les axes x, y .

La relation entre les deux vecteurs de coordonnées (Articulaires/Opérationnelles) est écrite avec des contraintes cinématiques en boucle fermée (Figure 2.2).

Cette relation analytique est donnée par :

$$\Phi(P, q) = 0, \Phi(P, q) = \begin{pmatrix} (x - q_1)^2 + y^2 - a^2 \\ (q_2 - x)^2 + y^2 - a^2 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Dans le cas du robot parallèle plan Biglide les paramètres géométriques sont définis par :

CHAPITRE 2

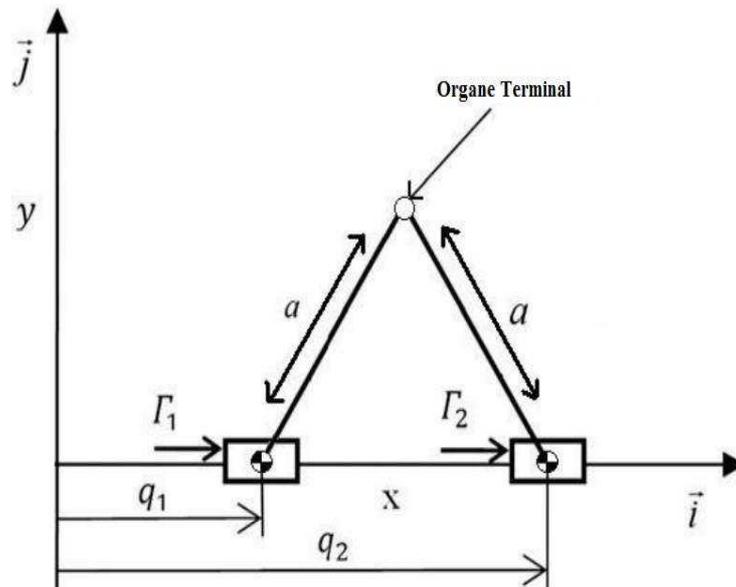


Figure 2.2 la représentation du robot parallèle Plan Biglide

$P = [x, y]$ vecteur des coordonnées opérationnelles

$q = [q_1, q_2]$ vecteur des coordonnées articulaires

2.2.2 Modèle géométrique inverse du robot plan Biglide

Les auteurs dans [92] ont déterminé le modèle géométrique inverse du robot plan Biglide. l'équation du modèle MGI est donnée par la relation géométrique suivante :

$$q = g(P) \quad (2.17)$$

Avec

$$g(P) = \begin{pmatrix} x - C(y) \\ x + C(y) \end{pmatrix}, C(y) = \sqrt{a^2 - y^2} \quad (2.18)$$

Dans [92], les auteurs ont étudié l'espace de travail sur lequel le robot Biglide effectue son déplacement sur quatre trajectoires (trajectoire en haut, trajectoire en bas, trajectoire gauche et droite) (voir Figure 2.3).

CHAPITRE 2

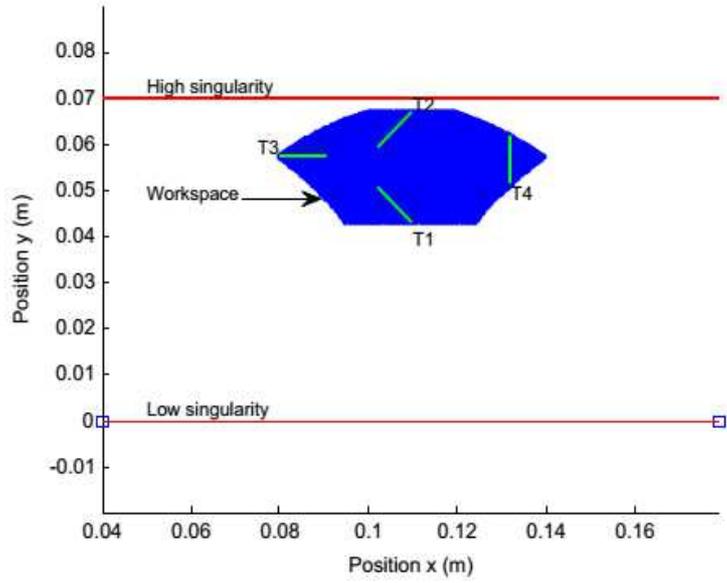


Figure 2.3 Espace de travail et Trajectoires : (T1) Trajectoire en bas, (T2) Trajectoire en Haut , (T3) Trajectoire a Gauche, (T4) Trajectoire a droite.

2.2.3 Modèle géométrique direct du robot plan Biglide MGD

Pour le problème géométrique direct, il s'agit de trouver la position et l'orientation de la plate-forme mobile à partir des longueurs des jambes du robot.

L'expression du modèle géométrique directe du robot parallèle Biglide est donnée par la formule suivante.

$$P = g^{-1}(q) \quad (2.19)$$

Où

$$g^{-1}(q) = \begin{pmatrix} \frac{q_1+q_2}{2} \\ \sqrt{a^2 - \frac{(q_1+q_2)^2}{4}} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

2.2.4 Modèle cinématique du robot Biglide

La relation entre les vitesses du torseur cinématique de l'effecteur et les vitesses articulaires est obtenue en dérivant l'équation (2.18) par rapport au temps :

$$J_p(P, q)\dot{P} = J_q(P, q)\dot{q} \quad (2.21)$$

CHAPITRE 2

Où

$$J_p(P, q) = \begin{bmatrix} x - q_1 & y \\ x - q_2 & y \end{bmatrix}$$

et

$$J_q(P, q) = \begin{bmatrix} x - q_1 & 0 \\ 0 & x - q_2 \end{bmatrix}$$

- Le Biglide à deux singularités parallèles :

Singularité en haut (High singularity) lorsque $q_1 = q_2 = x$ et $y = 0.07$ Figure 2.3.

Singularité en bas (Low singularity) lorsque $y=0$.

2.2.5 Modèle dynamique inverse du robot parallèle plan Biglide MDI

Il a été montré que la commande dynamique des robots parallèles dans l'espace cartésien est la plus adéquate [67]. En effet, la dynamique d'une machine à structure parallèle est naturellement décrite dans l'espace cartésien [18]. De plus, les variables à commander (la pose et l'effort de contact) sont aisément décrites dans l'espace de la tâche.

Le modèle dynamique inverse est déterminé par le formalisme de Lagrange et est représenté dans l'espace opérationnel [92].

Le modèle dynamique inverse de l'organe terminal de robot Biglide est écrit sous la forme suivante :

$$\Gamma = M(P)\ddot{P} + N(P, \dot{P})\dot{P} \quad (2.22)$$

tel que :

$M(P)$ représente la matrice d'inertie du robot Biglide et donnée par :

$$M(P) = \begin{pmatrix} m_1 + \frac{1}{2}(m - \lambda_1 + \lambda_2) & f_1(P) \\ m_2 + \frac{1}{2}(m - \lambda_2 + \lambda_1) & f_2(P) \end{pmatrix}$$

Où

$$\lambda_{1,2} = ms_{1,2}/a$$

CHAPITRE 2

et

$$\begin{cases} f_1(P) = [(2m_1 - 3\lambda_1 - \lambda_2)y^2 + mC(y)^2 + J_1 + J_2]/(2C(y) \times y) \\ f_2(P) = -[(2m_2 - 3\lambda_2 - \lambda_1)y^2 + mC(y)^2 + J_1 + J_2]/(2C(y) \times y) \end{cases}$$

$N(P, \dot{P}) = R(y, \dot{y}) + p(y)$ est la matrice des forces de Coriolis, centrifuges et de gravité.

Où

$$R(y, \dot{y}) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\begin{cases} r_{11} = r_{12} = 0 \\ r_{12} = -[(2m_1 - 3\lambda_1 - \lambda_2)y^2 + (2m_1 - 3\lambda_1 - \lambda_2) \\ C(y)^2 + J_1 + J_2]\dot{y}/(2C(y))^3 \\ r_{22} = [(2m_2 - 3\lambda_2 - \lambda_1)y^2 + (2m_2 - 3\lambda_2 - \lambda_1) \\ C(y)^2 + J_1 + J_2]\dot{y}/(2C(y))^3 \end{cases}$$

$p(y)$ présente le vecteur de gravité.

Où

$$p(y) = \begin{pmatrix} (gC(y)(m + \lambda_1 + \lambda_2))/2y \\ (-gC(y)(m + \lambda_1 + \lambda_2))/2y \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Le modèle dynamique des articulations est donné par [92] :

$$\Gamma = M_a \ddot{q}_a + b \dot{q}_a + \Gamma_t + \Gamma_f \quad (2.25)$$

Où $q_a = [q_{a1} q_{a2}]^T$, $M_a = \text{diag}(m_a m_a)$, $\Gamma_f = [\Gamma_{f1} \Gamma_{f2}]^T$.

le modèle des articulations élastiques est donné par :

$$\Gamma_t = k_t(q_a - q) + b_t(\dot{q}_a - \dot{q}) \quad (2.26)$$

le modèle de frottement (Stribeck friction) est donné par :

$$\Gamma_{fi} = \begin{cases} [\Gamma_{fc} + (\Gamma_{fs} - \Gamma_{fc})e^{-(\dot{q}_{ai}/v_s)^2}] \text{sign}(\dot{q}_{ai}) \text{ if } |\dot{q}_{ai}| > 0 \text{ (slip)} \\ \min(|\Gamma_i - \Gamma_{ti}|, \Gamma_{fs}) \text{sign}(\Gamma_i - \Gamma_{ti}) \text{ if } \dot{q}_{ai} = 0 \text{ (stick)} \end{cases} \quad (2.27)$$

Où

m_a : représente la masse de l'articulation prismatique .

k_t : représente la raideur de l'articulation prismatique.

CHAPITRE 2

b_t est le coefficient d'amortissement de l'articulation prismatique.

Γ_{f_s} représente les frottements secs.

Γ_{f_c} représente les frottements de coulomb.

v_s représente le coefficient de la vitesse de glissement.

L'expression final de modèle dynamique inverse dans l'espace cartésien du robot Biglide est donnée par :

$$\hat{\Gamma} = \hat{M}(P)\ddot{P} + \hat{N}(P, \dot{P})\dot{P} \quad (2.28)$$

tel-que

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} m_a + \frac{1}{2}(m - \lambda_1 + \lambda_2) & f_1(P) \\ m_a + \frac{1}{2}(m - \lambda_2 + \lambda_1) & f_2(P) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -[(2m_a - 3\lambda_1 - \lambda_2)y^2 + (2m_a - 3\lambda_1 - \lambda_2)C(y)^2 + J_1 + J_2]\dot{y}/(2C(y)^3) \\ 0 & [(2m_a - 3\lambda_2 - \lambda_1)y^2 + (2m_a - 3\lambda_2 - \lambda_1)C(y)^2 + J_1 + J_2]\dot{y}/(2C(y)^3) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (gC(y)(m + \lambda_1 + \lambda_2))/2y \\ (-gC(y)(m + \lambda_1 + \lambda_2))/2y \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Où

$$\begin{cases} f_1(P) = [(2m_a - 3\lambda_1 - \lambda_2)y^2 + mC(y)^2 + J_1 + J_2]/(2C(y) \times y) \\ f_2(P) = -[(2m_a - 3\lambda_2 - \lambda_1)y^2 + mC(y)^2 + J_1 + J_2]/(2C(y) \times y) \end{cases}$$

2.3 Simulation du modèle dynamique en boucle ouverte du Robot Biglide

les Figure 2.4, Figure 2.6, Figure 2.5 et Figure 2.7 représentent les résultats de la simulation en boucle ouverte de la modélisation dynamique du robot Biglide.

les Figure 2.4, Figure 2.5 représentent les résultats de la simulation en boucle ouverte du robot Biglide, une translation de la plate-forme mobile selon une trajectoire donnée en haut position.

la Figure 2.6, et Figure 2.7 représentent les résultats de la simulation en boucle ouverte du robot Biglide, une translation de la plate-forme mobile selon une trajectoire donnée en bas position.

CHAPITRE 2

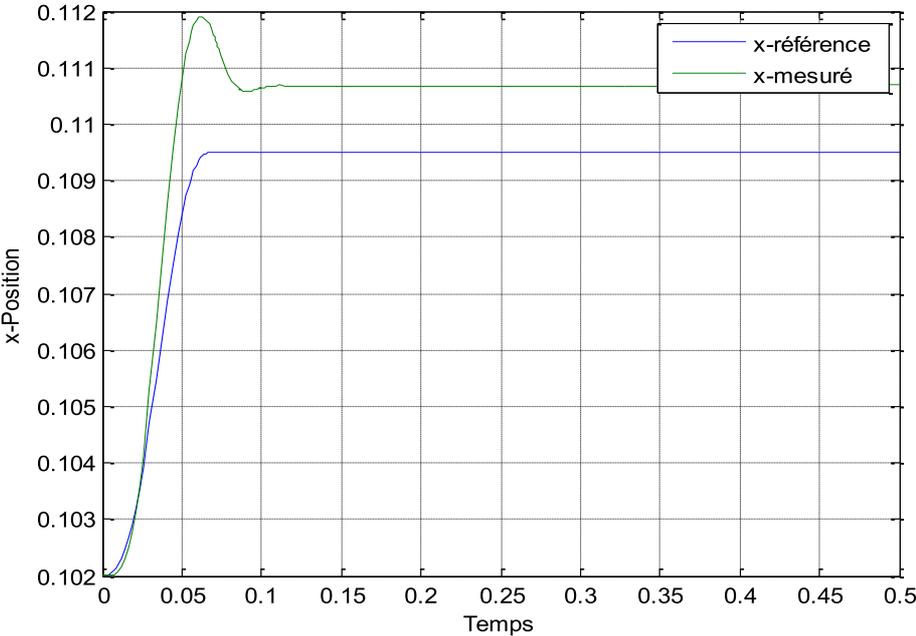


Figure 2.4 Réponse en boucle ouverte pour une trajectoire en Haut avec x-position

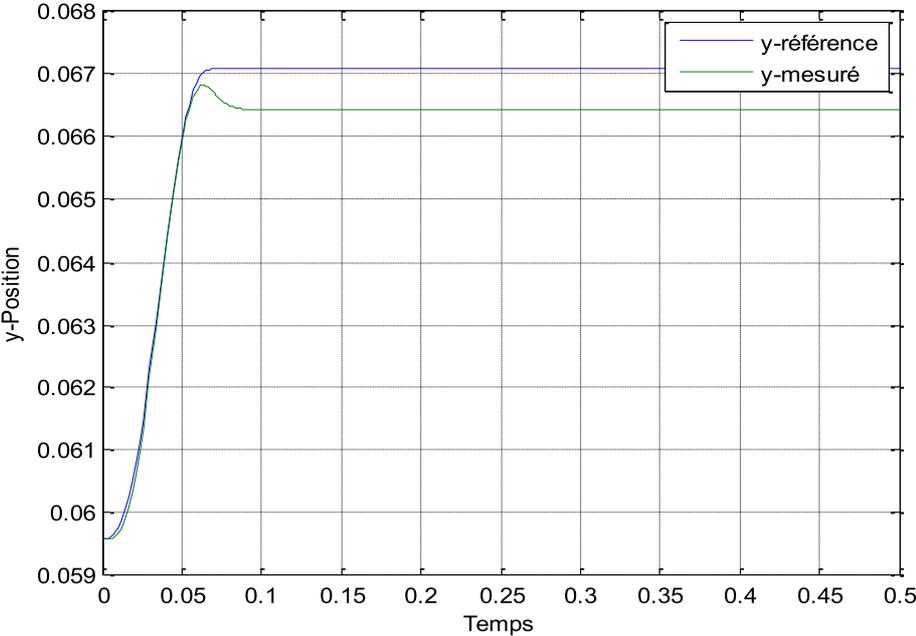


Figure 2.5 Réponse en boucle ouverte pour une trajectoire en Haut avec y-position

CHAPITRE 2

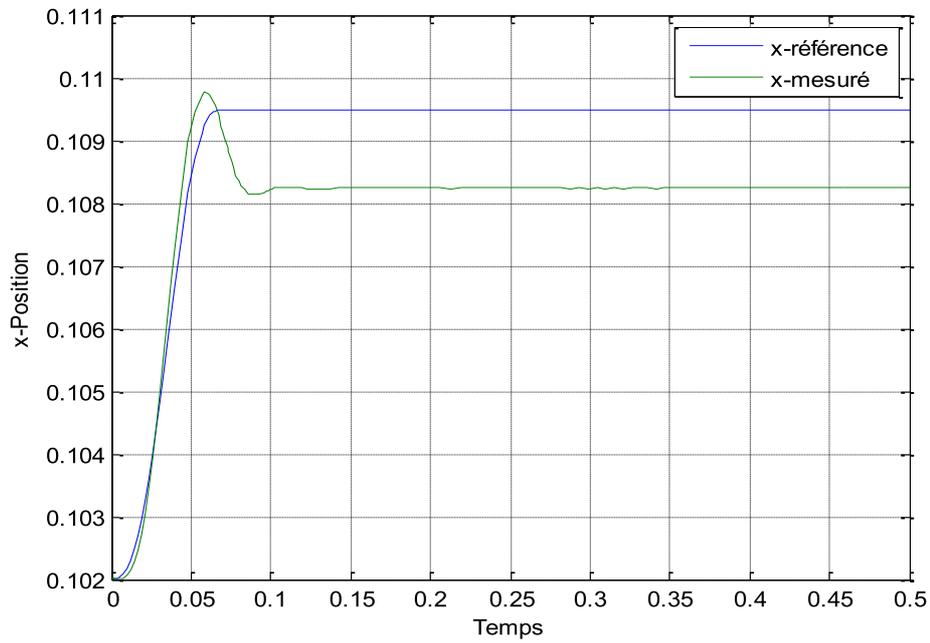


Figure 2.6 Réponse en boucle ouverte pour une trajectoire en bas avec x-position

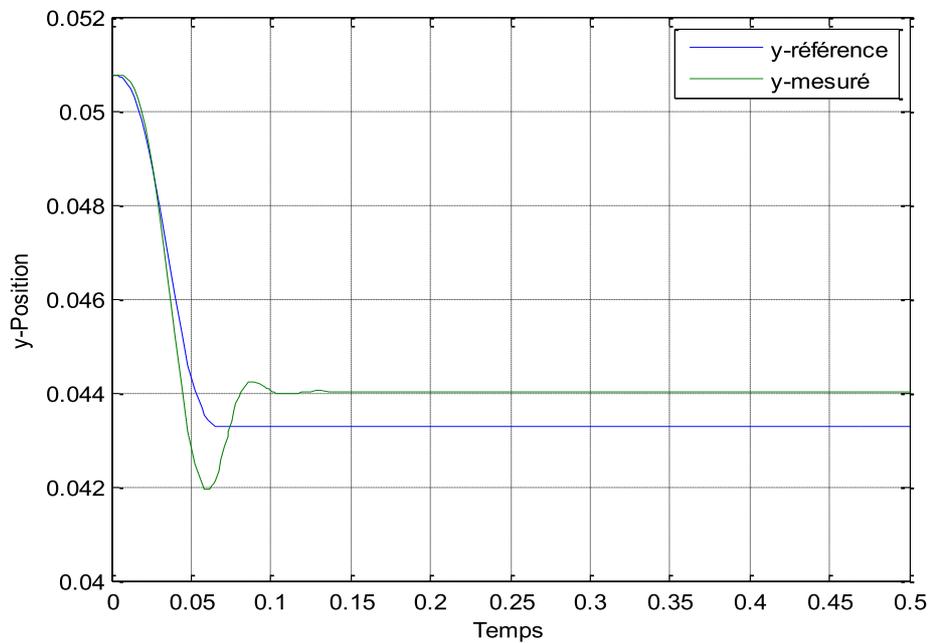
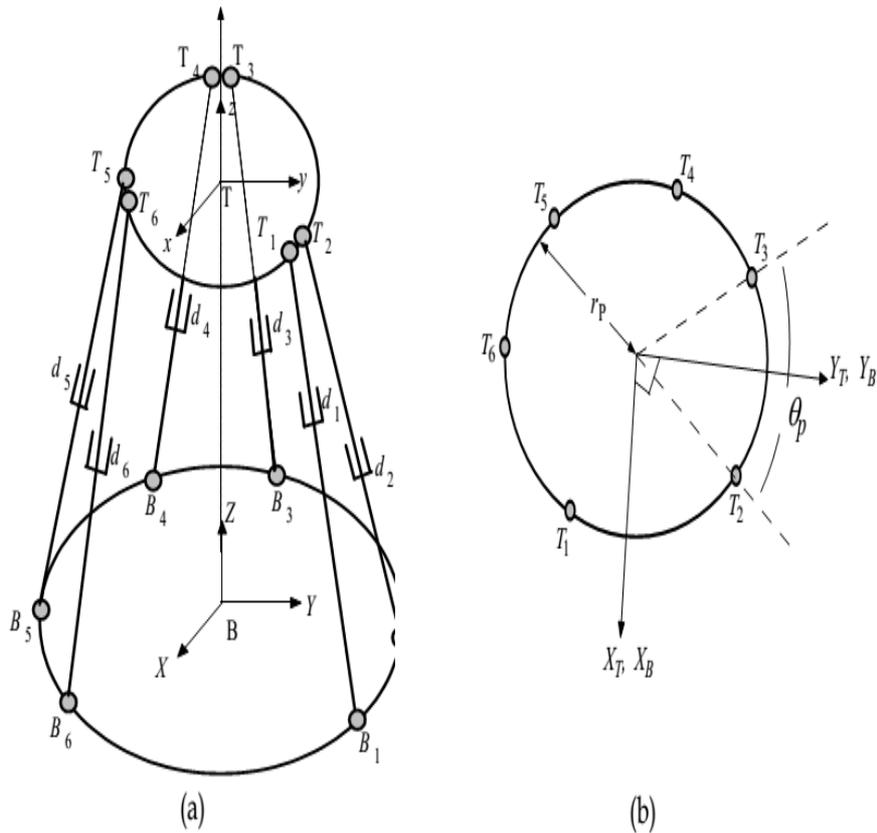


Figure 2.7 Réponse en boucle ouverte pour une trajectoire en bas avec y-position

CHAPITRE 2

2.4 Le Manipulateur de Gough-Stewart

La plate-forme de Gough-Stewart est un manipulateur parallèle, ce qui signifie que l'effecteur est rattaché à la base par plus d'une branche. La Figure 2.8 illustre une modélisation géométrique générale de la plate-forme de Gough-Stewart. La base fixe est reliée à une plate-forme mobile par six actionneurs prismatiques. La base et la plate-forme n'ont pas de géométrie imposée et donc les points d'attache peuvent être disposés de manière quelconque. Pour que le mécanisme ait six degrés de liberté, des cardans sont requis entre les points d'attache de la base et la base des vérins. Dans le même ordre d'idée, des liaisons sphériques (rotules) relient l'extrémité distale des vérins aux points d'attache de la plate-forme. Des longueurs données des actionneurs prismatiques imposent ainsi une pose à la plate-forme mobile.



CHAPITRE 2

2.4.1 Utilisations

la plate-forme de Gough a été utilisée dans différents domaines. La plus classique reste le simulateur de vol Figure 2.9, mais il existe des applications plus exotiques comme par exemple, son utilisation en technologie des machines-outils Figure 2.10



Figure 2.9 (a) Machine-outil basée sur une plate-forme de Gough (Ingersoll, USA) [15]



Figure 2.10 (b) Simulateur de vol (CAE, Canada) [15]

2.4.2 Configurations

Par définition, la plate-forme de Gough-Stewart n'a pas de configuration imposée puisque la base et la plate-forme peuvent être de forme quelconque. Cependant, plusieurs architectures se sont développées au fil du temps pour diverses applications.

2.4.2.1 Base plane

Comme son nom le suggère, cette configuration impose que tous les points d'attache de la base du manipulateur soient situés dans un même plan. Cette disposition est très répandue, puisqu'elle conduit à une construction plus simple et intuitive.

2.4.2.2 SSM

SSM est l'acronyme anglais « Simplified Symmetric Manipulator », qui peut être traduit par « manipulateur symétrique simplifié ». Cette configuration, illustrée à la Figure 2.11,

CHAPITRE 2

requiert que la base et la plate-forme soient planes en plus d'avoir toutes deux une forme symétrique par rapport à un axe.

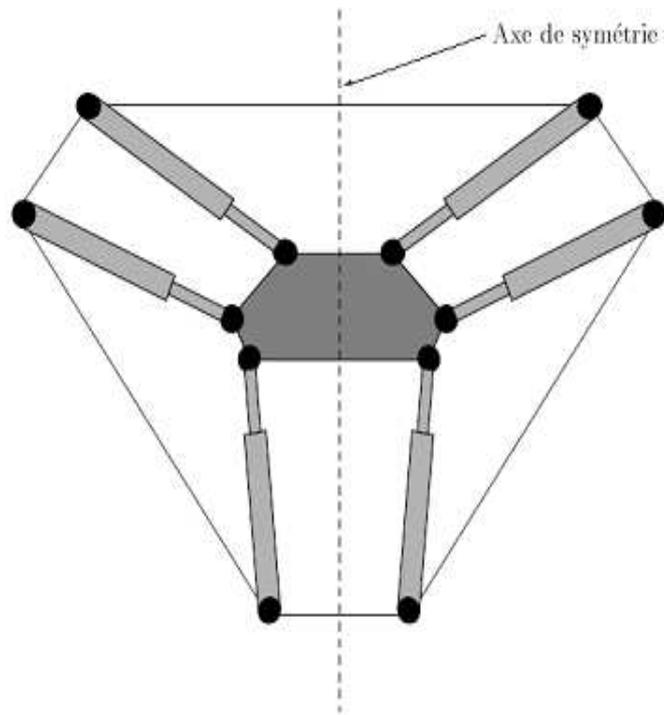


Figure 2.11 Modélisation SSM (vue du dessus) [79]

2.4.2.3 TSSM

Le TSSM (Triangular Simplified Symmetric Manipulator) correspond à un SSM auquel on impose que la plate-forme soit triangulaire en plus d'être symétrique. Pour satisfaire cette dernière caractéristique, la plate-forme doit avoir la forme d'un triangle isocèle ou équilatéral. À la Figure 2.12, qui donne un exemple d'une configuration TSSM, on remarque qu'il n'y a que trois points d'attache des actionneurs sur la plate-forme, ce qui les oblige à se regrouper deux par deux.

CHAPITRE 2

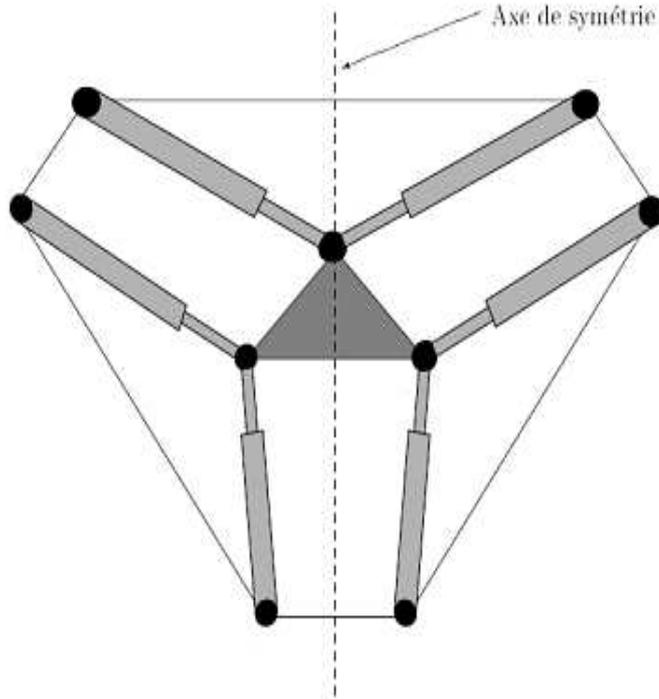


Figure 2.12 Modélisation TSSM (vue du dessus) [79]

2.4.2.4 MSSM

L'architecture du MSSM (Minimal Simplified Symmetric Manipulator) est la suite logique du SSM et du TSSM, c'est-à-dire que la base doit maintenant avoir aussi la forme d'un triangle isocèle (ou équilatéral). On doit donc lier les actionneurs deux à deux sur la base, tel que illustre la Figure 2.13. De plus, afin d'éviter que des pattes ne soient superposées, deux actionneurs partageant un point d'attache commun sur la base s'attachent en des points distincts sur la plate-forme. Cette configuration simplifie grandement l'analyse des lieux de singularité, tel que démontré ultérieurement dans ce mémoire. De plus, elle est d'un grand intérêt pratique puisque plusieurs plates-formes de Gough-Stewart existantes ont une géométrie proche de celle du MSSM.

CHAPITRE 2

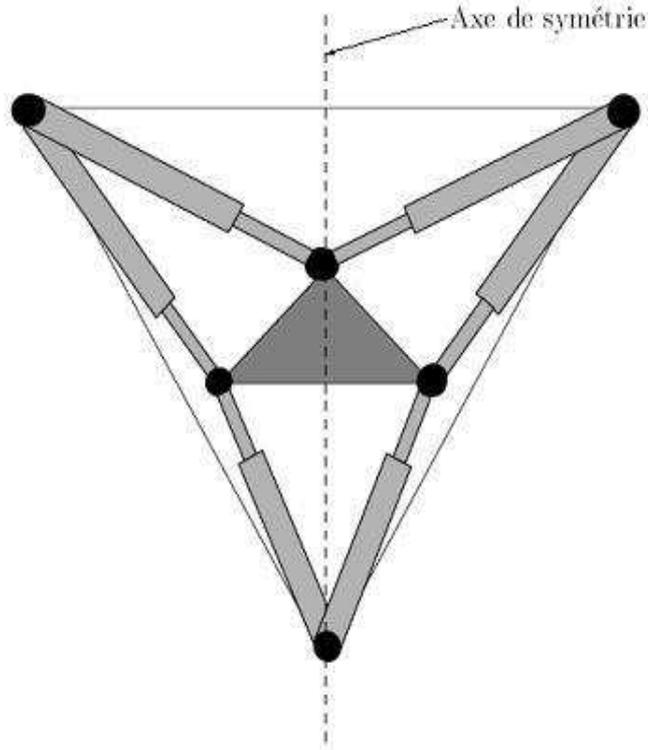


Figure 2.13 Modélisation MSSM (vue du dessus) [79]

2.4.3 Définition et notation utilisée

On donne quelques définitions de base introduites par Merlet.

Coordonnées articulaires ρ_i : les coordonnées articulaires sont les longueurs variables (course) des actionneurs qui permettent le déplacement de la plate-forme mobile.

Coordonnées généralisée X : Les coordonnées généralisées (6 composantes) sont l'association des coordonnées du vecteur position du point C (centre de la plate-forme mobile) et des angles d'orientation de la plate-forme mobile.

Le Modèle Géométrique Inverse (MGI) permet de déterminer les valeurs des variables articulaires ρ_i lorsqu'on connaît la position du point C et l'orientation de la plate-forme mobile. La Figure 2.14 montre les vecteurs fondamentaux qui permettront d'obtenir la longueur ρ_i du vérin.

Le repère de la base (repère galiléen) est $R_b = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et celui de la plate-forme mobile est $R_r = (C, \vec{x}_r, \vec{y}_r, \vec{z}_r)$; O et C correspondent à l'origine du repère galiléen (origine de la base) et au centre de la plate-forme mobile respectivement. A_i et B_i avec $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, sont

CHAPITRE 2

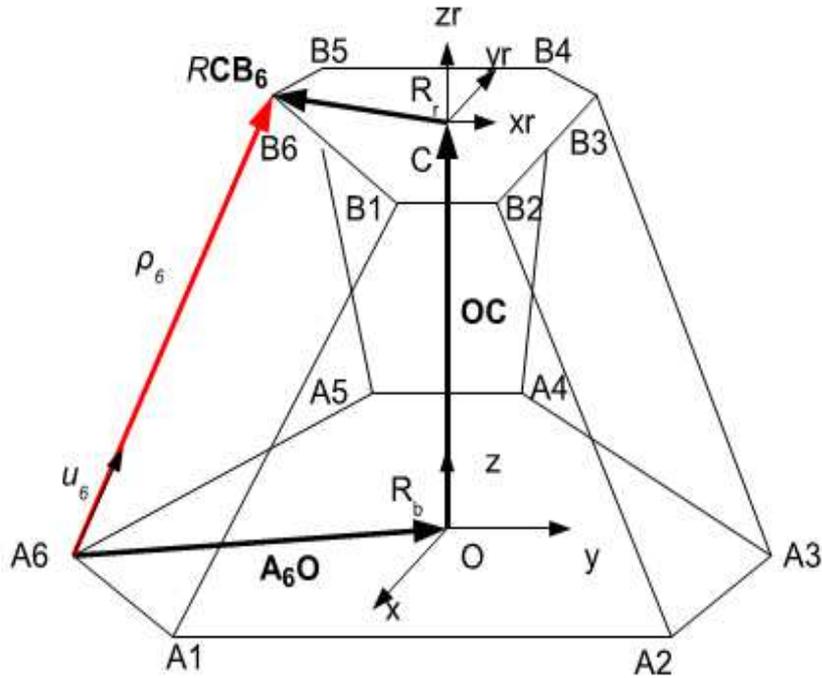


Figure 2.14 Représentation géométrique du robot (position nominale).

les points de raccordement des vérins à la base et à la plate-forme mobile respectivement. Chaque vecteur \vec{OA}_i est défini dans le repère R_b et chaque vecteur \vec{CB}_i dans le repère R_r . Les six vecteurs unitaires \vec{n}_i colinéaires à $\vec{A_iB_i}$ peuvent s'écrire comme suit : soit par exemple \vec{n}_1 représentatif du vérin 1.

$$\vec{n}_1 = \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{13} \end{bmatrix}_{R_b} \quad (2.30)$$

Le passage de bases de R_r à R_b se fait à partir des transformations suivantes :

$$R_b = R(z_r, \gamma)R(y_r, \beta)R(x_r, \alpha)(R_r) \quad (2.31)$$

Avec :

$$R(z_r, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

CHAPITRE 2

$$R(y_r, \beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$R(x_r, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Avec α, β, γ les angles de roulis, tangage et lacet utilisés dans l'aéronautique et dans l'industrie général [80].

La matrice de passage R est, en respectant cet ordre de rotation, la suivante :

$$R = R(z_r, \gamma)R(y_r, \beta)R(x_r, \alpha) \quad (2.35)$$

Soit :

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cos\beta & -\sin\gamma \cos\beta + \cos\gamma \sin\beta \sin\alpha & \sin\gamma \sin\beta + \cos\gamma \sin\beta \cos\alpha \\ \sin\alpha \cos\beta & \cos\gamma \cos\beta + \sin\gamma \sin\beta \sin\alpha & \cos\beta \sin\gamma - \cos\gamma \sin\beta \sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta \sin\alpha & \cos\alpha \cos\gamma \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

2.4.4 Modèle Géométrique Inverse MGI

On souhaite savoir quelle est la longueur ρ_i du vérin, pour une position et une orientation de la plate-forme données [58].

Soit la longueur ρ_i de chaque vérin, i et \vec{n}_i le vecteur de chaque vérin, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{A_i B_i} = \rho_i \vec{n}_i, (i = 1 \dots 6) \quad (2.38)$$

Avec :

$$\vec{n}_i = \frac{\overrightarrow{A_i B_i}}{\|\overrightarrow{A_i B_i}\|} \quad (2.39)$$

CHAPITRE 2

On peut écrire :

$$\overrightarrow{A_i B_i} = \overrightarrow{A_i O} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB_i} \quad (2.40)$$

Pour exprimer le vecteur $\overrightarrow{A_i B_i}$ sur le repère R_b , on doit projeter chacun des vecteurs de cette somme sur R_b ce qui donne l'expression suivante :

$$\overrightarrow{A_i B_i} = \overrightarrow{A_i O} + \overrightarrow{OC} + R\overrightarrow{CB_i} \quad (2.41)$$

Les longueurs de chaque vérin sont donc données par :

$$\rho_i = \left\| \overrightarrow{A_i B_i} \right\| = \left\| \overrightarrow{A_i O} + \overrightarrow{OC} + R\overrightarrow{CB_i} \right\| \quad (2.42)$$

En projetant tous les vecteurs dans le repère R_b , et en élevant au carré l'équation (2.42) nous obtenons :

$$\rho_i^2 = \left\| \overrightarrow{A_i O} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{CB_i} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{OC} \right\|^2 + 2 \left(\overrightarrow{A_i O} + R\overrightarrow{CB_i} \right) \cdot \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{A_i O} \cdot R\overrightarrow{CB_i} \quad (2.43)$$

La longueur de chaque vérin ρ_i est la suivante :

$$\rho_i = \sqrt{\left\| \overrightarrow{A_i O} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{CB_i} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{OC} \right\|^2 + 2 \left(\overrightarrow{A_i O} + R\overrightarrow{CB_i} \right) \cdot \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{A_i O} \cdot R\overrightarrow{CB_i}}, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad (2.44)$$

2.4.5 Simulation de modèle géométrique inverse

Pour illustrer la modélisation géométrique inverse de la plate-forme de Gough-Stewart une simulation sous environnement Matlab, de ces équations est présentée.

Le détail des calculs du modèle géométrique inverse de la plate-forme de Gough-Stewart est présenté dans l'annexe A.

- 1-Cas

On se donne une trajectoire cartésienne pour une translation selon la relation suivante :
 $(x = 0, y = 0, z = 1, \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0)$

Résultat de simulation

La Figure 2.15 montre le résultat de simulation (une translation de la plate-forme mobile

CHAPITRE 2

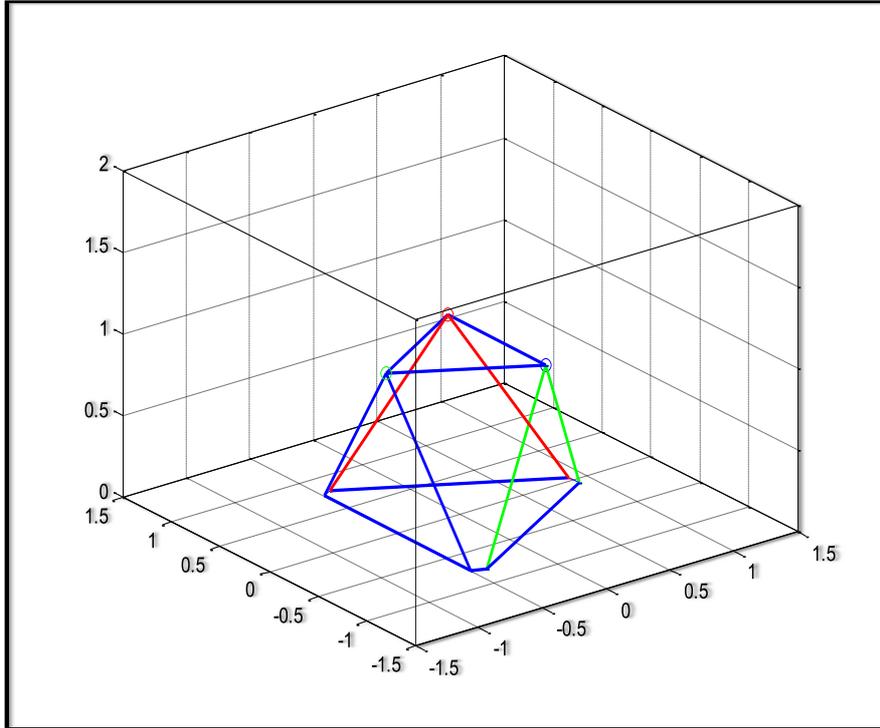


Figure 2.15 Translation sur l'axe Z

selon l'axe Z).

Les longueurs des vérins obtenus à travers le test de simulation soit :

$$L_1 = 1.3341; L_2 = 1.3342; L_3 = 1.3342; L_4 = 1.3342; L_5 = 1.3342; L_6 = 1.3341$$

Nous constatons à partir des résultats obtenus que les longueurs des vérins sont identiques, ce qui confirme la validité de notre modèle géométrique inverse.

- 2-Cas

On se donne une trajectoire cartésienne pour une translation et une orientation selon la relation suivante :

$$(x = 0, y = 0, z = 1, \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = (90 * \frac{\pi}{180}))$$

Résultat de simulation

La Figure 2.16 montre le résultat de simulation (une translation de la plate-forme mobile selon l'axe Z correspond à une variation de lacet).

CHAPITRE 2

Les longueurs des vérins obtenus à travers le test de simulation soit :

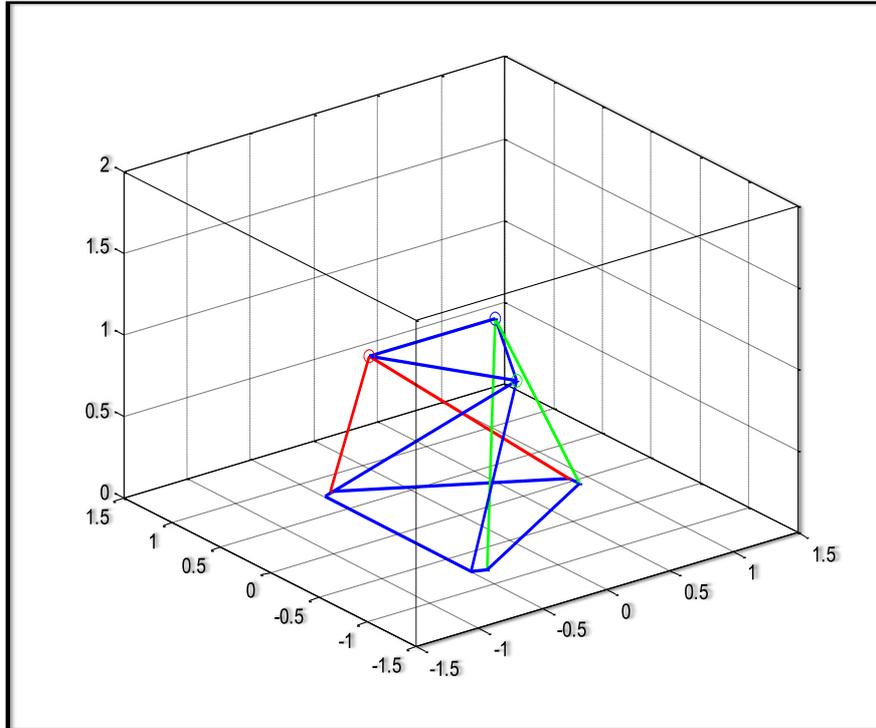


Figure 2.16 Variation de lacet sur l'axe Z

Où :

Les longueurs des vérins obtenus à travers le test de simulation soit :

$$L_1 = 1.7328; L_2 = 1.1272; L_3 = 1.7328; L_4 = 1.1272; L_5 = 1.7329; L_6 = 1.1273$$

Nous remarquons à travers les résultats obtenus qu'il y a une variation entre les longueurs de chaque vérin due à la variation de l'angle de lacet.

- 3-Cas

On se donne une trajectoire cartésienne pour une translation et une orientation selon la relation suivante :

$$(x = 0, y = 0, z = 1, \alpha = 0, \beta = (90 * \frac{\pi}{180}), \gamma = 0)$$

CHAPITRE 2

Résultat de simulation

La Figure 2.17 montre le résultat de simulation (une translation de la plate-forme mobile selon l'axe Z correspond une variation de roulis).

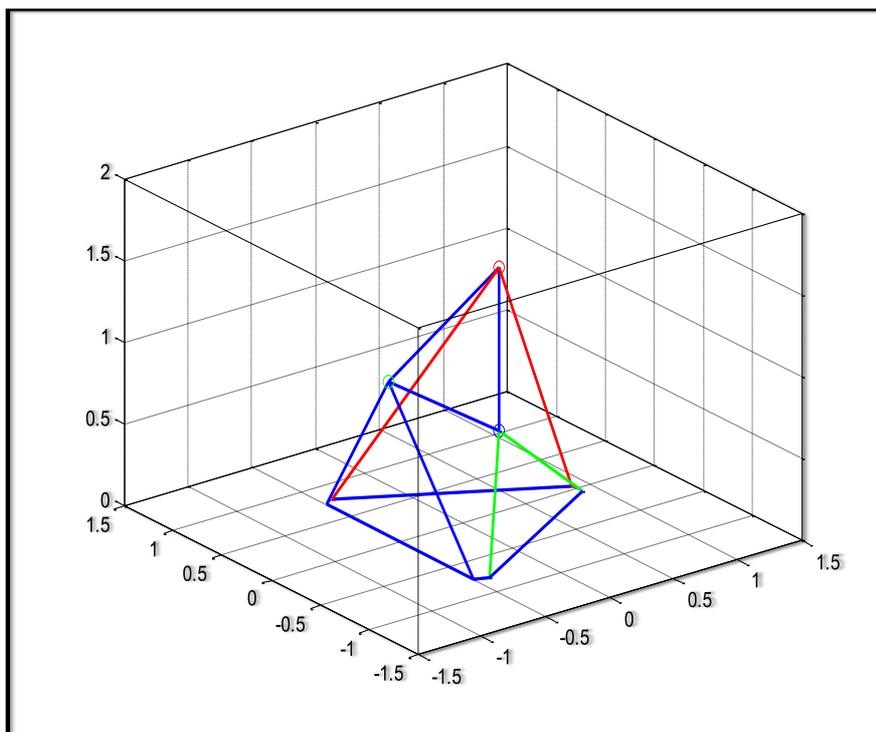


Figure 2.17 Variation de roulis sur l'axe Z

Où :

Les longueurs des vérins obtenus à travers le test de simulation soit :

$$L_1 = 1.6186; L_2 = 1.8357; L_3 = 1.2530; L_4 = 1.2530; L_5 = 1.1706; L_6 = 0.7874$$

Nous remarquons à travers les résultats obtenus qu'il ya une variation entre les longueurs de chaque vérin due à la variation de l'angle de roulis.

- 4-Cas

On se donne une trajectoire cartésienne pour une translation et une orientation selon la relation suivante :

CHAPITRE 2

$$(x = 0, y = 0, z = 1, \alpha = (90 * \frac{\pi}{180}), \beta = 0, \gamma = 0)$$

Résultat de simulation

La Figure 2.18 montre le résultat de simulation (une translation de la plate-forme mobile selon l'axe Z correspond une variation de tangage).

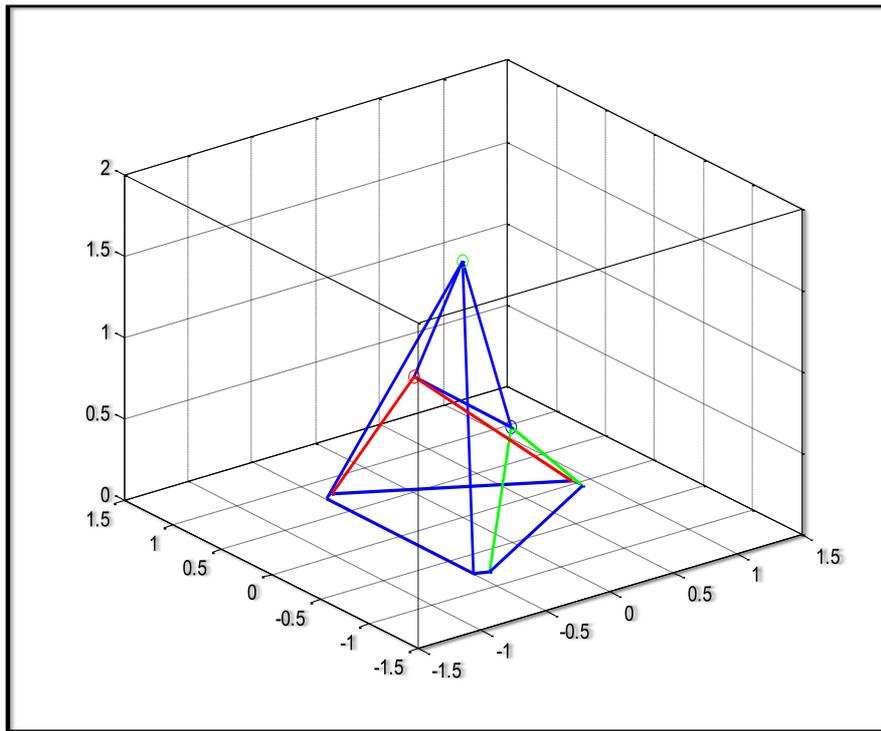


Figure 2.18 Variation de tangage selon l'axe Z

Où :

Les longueurs des vérins obtenus à travers le test de simulation soit :

$$L_1 = 1.2285; L_2 = 0.8713; L_3 = 1.8142; L_4 = 1.8142; L_5 = 0.8713; L_6 = 1.2285$$

Nous remarquons à travers les résultats obtenus qu'il ya une variation entre les longueurs de chaque vérin due à la variation de l'angle de tangage.

- 5-Cas

On se donne une trajectoire cartésienne pour une translation selon la relation suivante :

CHAPITRE 2

$$(x = 1, y = 0, z = 0, \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0)$$

Résultat de simulation

La Figure 2.19 montre le résultat de simulation (une translation de la plate-forme mobile selon l'axe X).

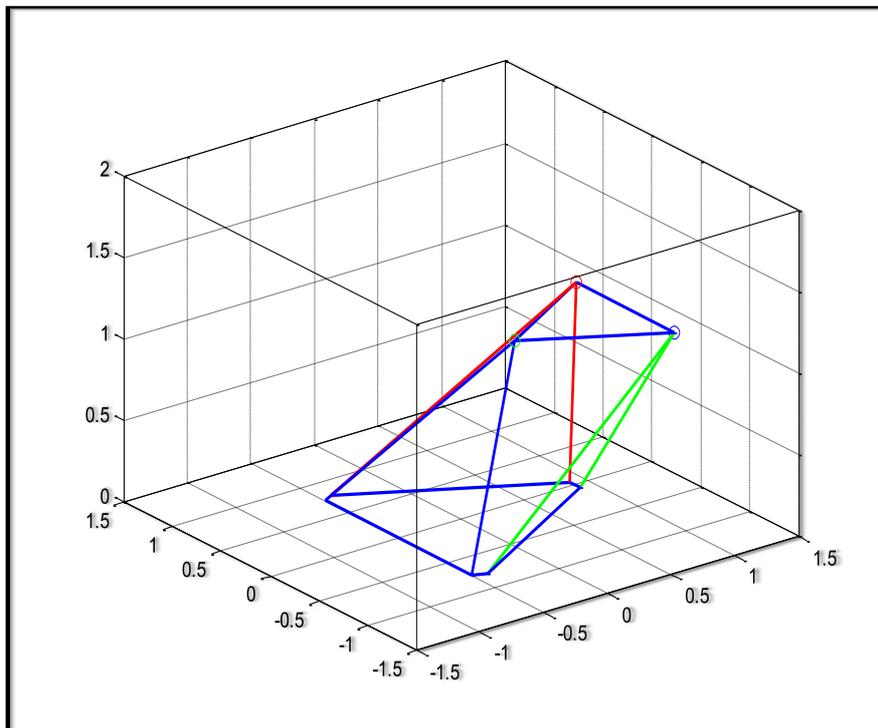


Figure 2.19 Translation sur l'axe X

Où :

Les longueurs des vérins obtenus à travers le test de simulation soit :

$$L_1 = 1.1652; L_2 = 1.9890; L_3 = 1.5482; L_4 = 1.5482; L_5 = 1.9890; L_6 = 1.1652$$

A travers les résultats obtenus nous remarquons qu'il y a une variation entre les longueurs de chaque vérin due à la valeur de la translation donnée.

- 6-Cas

CHAPITRE 2

On se donne une trajectoire cartésienne pour une translation selon la relation suivante :

$$(x = 0, y = 1, z = 0, \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0)$$

Résultat de simulation

La Figure 2.20 montre le résultat de simulation (une translation de la plate-forme mobile selon l'axe Y).

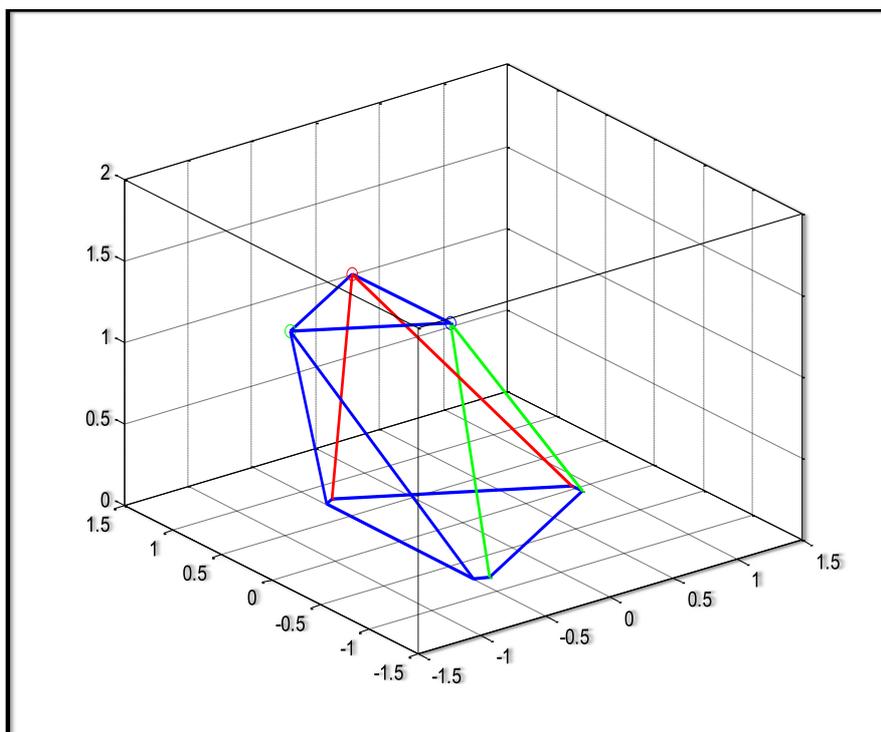


Figure 2.20 Translation sur l'axe Y

Où :

Les longueurs des vérins obtenus à travers le test de simulation soit :

$$L_1 = 1.8627; L_2 = 1.4036; L_3 = 1.0344; L_4 = 2.0174; L_5 = 1.7805; L_6 = 1.2923$$

A travers les résultats obtenus nous remarquons qu'il ya une variation entre les longueurs de chaque vérin due a la valeur de la translation donnée.

CHAPITRE 2

2.4.6 Modèle Géométrique Direct MGD

Pour le problème géométrique direct, il s'agit de trouver la position et l'orientation de la plate-forme à partir des longueurs des jambes du robot. Ce problème est très complexe, il admet plusieurs solutions (40 solutions au maximum [57]). Des méthodes numériques peuvent être utilisées pour résoudre ce problème complexe tel-que la méthode de Newton-Raphson.

2.4.7 Modèle Cinématique Inverse (MCI)

Ce paragraphe présente la relation entre les vitesses articulaires (vitesse du point d'attachement des articulations à la plate-forme) et la vitesse cartésienne (vitesse du point C de la plate-forme mobile).

2.4.7.1 Matrice Jacobienne Inverse

Le modèle cinématique inverse (MCI) se calcule à partir de la relation cinématique entre les vitesses de deux points d'un même solide. La vitesse d'un des points de connections B_i de la plate-forme mobile en fonction du point de référence C est :

$$\overrightarrow{V_{B_i/R_b}} = \overrightarrow{V_{C/R_b}} + \overrightarrow{B_i\dot{C}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{(p/R_b)}} \quad (2.45)$$

En projection sur R_b , on obtient l'expression suivante :

$$\overrightarrow{V_{B_i/R_b}} = \overrightarrow{V_{C/R_b}} + \overrightarrow{RB_i\dot{C}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{(p/R_b)}} \quad (2.46)$$

Remarque : Afin d'alléger l'écriture tout le long de ce chapitre, nous écrirons la vitesse d'un point de la manière suivante : $\overrightarrow{V_{B_i/R_b}}$, vitesse du point B_i appartenant à la plate-forme par rapport au repère R_b au lieu de $\overrightarrow{V_{B_i}} \in p/R_b$ (écriture conventionnelle dans le domaine de la mécanique).

En utilisant l'équation (2.45), nous pouvons supposer que la vitesse d'un segment i peut être écrite en fonction du point de référence C . Pour un segment i de vecteur, cette vitesse est définie par la relation suivante :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{A_i B_i}}{dt} \right]_{R_b} = \overrightarrow{V_{C/R_b}} + \overrightarrow{RB_i\dot{C}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{(p/R_b)}} \quad (2.47)$$

CHAPITRE 2

Nous pouvons écrire sous forme matricielle cette équation :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{A_i B_i}}{dt} \right]_{R_b} = U_i \{ \dot{P} \} \quad (2.48)$$

Avec :

$\{ \dot{P} \}$ Le torseur cinématique de la plate-forme mobile est défini par :

$$\{ \dot{P} \} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{V_{C/R_b}} \\ \overrightarrow{\Omega_{(p/R_b)}} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Avec $\overrightarrow{V_{C/R_b}}$ la vitesse de translation du point C et $\overrightarrow{\Omega_{(p/R_b)}}$ la vitesse de rotation de la plate-forme mobile U_i est un vecteur de dimension 6.

En partant du modèle géométrique inverse, décrit dans le paragraphe précédent et en utilisant l'équation (2.43), nous pouvons écrire :

$$\rho_i^2 = \|\overrightarrow{A_i O}\|^2 + \|\overrightarrow{C B_i}\|^2 + \|\overrightarrow{O C}\|^2 + 2(\overrightarrow{A_i O} + R\overrightarrow{C B_i}) \cdot \overrightarrow{O C} + 2\overrightarrow{A_i O} \cdot R\overrightarrow{C B_i}$$

Nous pouvons obtenir par différenciation de l'équation précédente :

$$2\rho_i \frac{d\rho_i}{dt} = 2 \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{O C} \right]_{R_b} \cdot (\overrightarrow{O C} + \overrightarrow{A_i O} + R\overrightarrow{C B_i}) + 2(\overrightarrow{O C} + \overrightarrow{A_i O}) \cdot \left[\frac{d}{dt} R\overrightarrow{C B_i} \right]_{R_b} \quad (2.50)$$

Avec

$$\left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{O C} \right]_{R_b} = \overrightarrow{V_{C/R_b}} \quad (2.51)$$

$$\left[\frac{d}{dt} R\overrightarrow{C B_i} \right]_{R_b} = R\overrightarrow{B_i C} \wedge \overrightarrow{\Omega_{(p/R_b)}} \quad (2.52)$$

$$\overrightarrow{\Omega_{(p/R_b)}} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \alpha \\ \frac{d}{dt} \beta \\ \frac{d}{dt} \gamma \end{bmatrix}_{R_b} \quad (2.53)$$

En utilisant les équations (2.38), (2.51), (2.52) et (2.53) nous écrivons :

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \overrightarrow{V_{C/R_b}} \cdot \frac{\overrightarrow{A_i B_i}}{\rho_i} + \left[\frac{d}{dt} R\overrightarrow{C B_i} \right]_{R_b} \cdot \frac{\overrightarrow{A_i C}}{\rho_i} \quad (2.54)$$

CHAPITRE 2

Avec

$$\vec{n}_i = \frac{\overrightarrow{A_i B_i}}{\rho_i} \quad (2.55)$$

Où

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \overrightarrow{V_{C/R_b}} \cdot \vec{n}_i + \left(\overrightarrow{R B_i \dot{C}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{(p/R_b)}} \right) \frac{\overrightarrow{A_i \dot{C}}}{\rho_i} \quad (2.56)$$

En utilisant le produit mixte, on obtient :

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \overrightarrow{V_{C/R_b}} \cdot \vec{n}_i + \overrightarrow{\Omega_{(p/R_b)}} \left(\frac{\overrightarrow{A_i \dot{C}}}{\rho_i} \wedge \overrightarrow{R B_i \dot{C}} \right) \quad (2.57)$$

Sachant que $\overrightarrow{A_i B_i} = \overrightarrow{A_i \dot{C}} - \overrightarrow{R B_i \dot{C}}$ et que $\overrightarrow{R B_i \dot{C}} \wedge \overrightarrow{R B_i \dot{C}} = 0$, nous obtenons finalement :

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \overrightarrow{V_{C/R_b}} \cdot \vec{n}_i + \overrightarrow{\Omega_{(p/R_b)}} \left(\vec{n}_i \wedge \overrightarrow{R B_i \dot{C}} \right) \quad (2.58)$$

En utilisant la matrice $\left\{ \dot{P} \right\}$, l'équation (2.58) sous forme matricielle est donnée par :

$$\frac{d\rho_i}{dt} = J^{-1} \left\{ \dot{P} \right\} \quad (2.59)$$

L'équation (2.59) est l'équation du modèle cinématique inverse (MCI).

Avec J^{-1} la matrice jacobienne inverse cinématique s'écrivant :

$$J^{-1} = \left[\begin{array}{c} \vec{n}_i \\ \left(\vec{n}_i \wedge \overrightarrow{B_i \dot{C}} \right) \end{array} \right] \quad (2.60)$$

Remarque

Les coordonnées cartésiennes et les orientations de la plate-forme mobile sont regroupées

CHAPITRE 2

dans un vecteur P (coordonnées généralisées) :

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

\dot{P} est défini comme le torseur cinématique de la plate-forme mobile ou comme la vitesse généralisée.

$$\dot{P} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x \\ \frac{d}{dt}y \\ \frac{d}{dt}z \\ \frac{d}{dt}\alpha \\ \frac{d}{dt}\beta \\ \frac{d}{dt}\gamma \end{pmatrix}_{R_b} = \begin{pmatrix} V_{C_x} \\ V_{C_y} \\ V_{C_z} \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}_{R_b} \quad (2.62)$$

2.4.8 Étude des configurations singulières

Pour les manipulateurs, type sériel ou parallèle, on trouve des configurations dites singulières où le nombre de degrés de liberté de la plate-forme mobile est différent de la dimension de l'espace opérationnel dans lequel il évolue. Ainsi, un manipulateur pleinement parallèle peut gagner ou perdre un ou plusieurs degré(s) de liberté. De plus, ces configurations peuvent se situer sur la frontière de l'espace de travail, comme pour les manipulateurs sériels ainsi qu'à l'intérieur. Ainsi, au voisinage de ces singularités, on rencontre les problèmes suivants :

Une augmentation importante des efforts dans les articulations pouvant endommager la structure du manipulateur.

Une perte de rigidité du manipulateur qui peut se traduire par une instabilité de la plate-forme mobile, c'est-à-dire des mouvements incontrôlables de celle-ci alors que les articulations motorisées bloquées.

Pour rechercher ces configurations singulières, il existe deux approches. La méthode géométrique et la méthode analytique. La méthode analytique est fondée sur l'étude des matrices Jacobiennes du manipulateur et en analysant le rang de l'inverse de la matrice Jacobienne,

CHAPITRE 2

dans ce cas il existe deux types de singularité [23], [16] :

Les singularités du premier type, qui apparaissent lorsque le déterminant de la matrice J^{-1} devient infini.

Les singularités du second type, qui apparaissent lorsque le déterminant de la matrice J^{-1} est égal à zéro, ce qui correspond à des déplacements incontrôlables de la partie mobile lorsque toutes les articulations actives sont bloquées.

De nombreuses études utilisent les matrices Jacobiennes pour déterminer les configurations singulières des manipulateurs parallèles. Parmi celle-ci, on peut également citer [23], [73] et [53] pour les manipulateurs plans et [32], [6] et [26] pour les manipulateurs spatiaux.

Les singularités d'un manipulateur plan RPR simplifié pour des orientations données sont présentés dans [73] .

Les singularités parallèles d'une plate-forme de Gough-Stewart pour une position donnée ou pour une orientation donnée de la plate-forme mobile sont présentés dans [32]

Cependant, il est difficile de calculer toutes les configurations singulières de ce manipulateur et surtout de les représenter.

Une méthode géométrique basée sur la géométrie de Grassman est proposée dans [58] . Cette méthode consiste à définir les conditions de dépendance linéaire entre les vecteurs de Plucker des lignes associées aux segments du manipulateur. Cette dépendance linéaire conduit à une dégénérescence de l'inverse de la matrice Jacobienne puisqu'elle est formée avec ces vecteurs.

Dans notre cas, on détermine un exemple d'une configuration singulière à partir de calcul du déterminant de la matrice Jacobienne de la plateforme de Gough-Stewart d'une architecture TSSM .

2.4.9 Résultats de simulation (Exemple de configuration singulière)

Pour illustrer le calcul de la matrice jacobienne de la plate-forme de Gough-Stewart une simulation sous environnement Matlab, de cette matrice est présentée avec un exemple d'une configuration singulière.

CHAPITRE 2

- 1-Cas configuration non singulière

On se donne une trajectoire cartésienne pour une translation et une orientation selon la relation suivante :

$$(x = 0, y = 0, z = 1, \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = (90 * \frac{\pi}{180}))$$

Résultat de simulation :

La Figure 2.21 montre une translation selon l'axe Z avec une variation de l'angle de lacet.

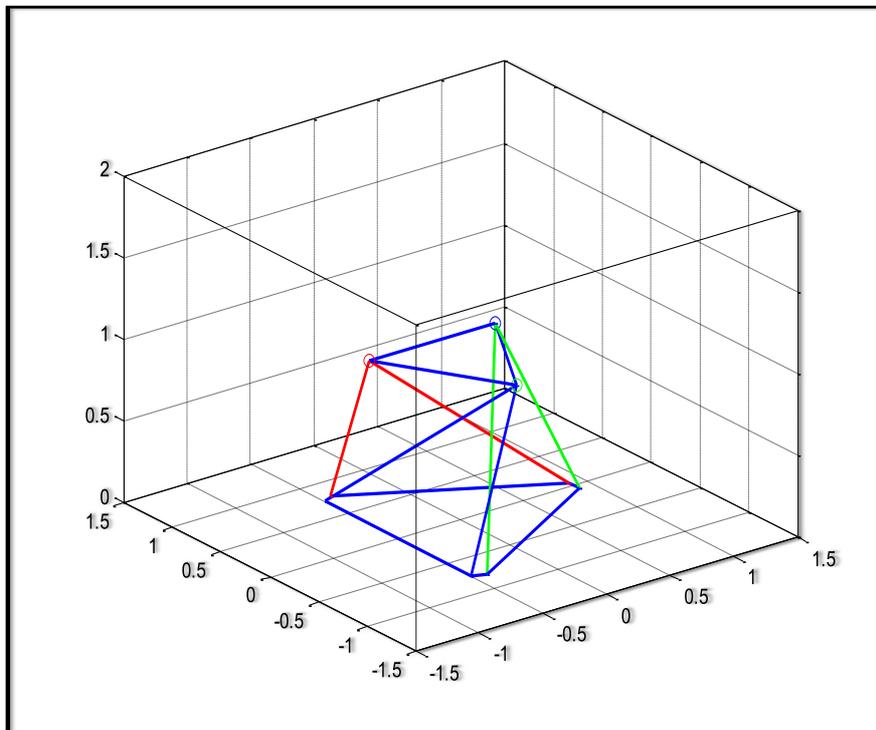


Figure 2.21 Variation de lacet sur l'axe Z

Le résultat de la matrice jacobienne inverse et donnée par la formule suivante :

CHAPITRE 2

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} -0.6206 & 0.3658 & 0.6936 & 0.4004 & -0.0001 & 0.3583 \\ 0.3671 & -0.2022 & 0.9080 & 0.5242 & -0.0001 & -0.2119 \\ -0.0065 & -0.7204 & 0.6936 & -0.2002 & 0.3468 & 0.3583 \\ -0.0084 & 0.4189 & 0.9080 & -0.2621 & 0.4540 & -0.2119 \\ 0.6271 & 0.3547 & 0.6935 & -0.2001 & -0.3468 & 0.3583 \\ -0.3585 & -0.2166 & 0.9080 & -0.2620 & -0.4541 & -0.2118 \end{bmatrix}$$

– Le Calcul du déterminant de la matrice $\det(J^{-1}) = 0.9483$, confirme que notre robot est situé dans une configuration non singulière.

- 2-Cas configuration singulière

On se donne une trajectoire cartésienne pour une translation et une orientation selon la relation suivante :

$$(x = 1, y = 0, z = 0, \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = (90 * \frac{\pi}{180}))$$

Résultat de simulation :

La Figure 2.22 montre une translation sur l'axe 'X'.

Le résultat de La matrice jacobienne et donnée par la formule suivante :

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6515 & 0.6135 & 0.4462 & 0.0223 & 0.0469 & -0.1070 \\ 0.9642 & -0.2159 & 0.1537 & 0.1229 & 0.2158 & -0.5106 \\ 0.7728 & -0.6346 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.3085 \\ 0.7728 & 0.6346 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.3085 \\ 0.9642 & 0.2159 & -0.1537 & 0.1229 & -0.2158 & 0.5106 \\ 0.6515 & -0.4462 & -0.4462 & 0.0223 & -0.0469 & 0.1070 \end{bmatrix}$$

$$\det(J^{-1}) = 0$$

– Le Calcul de déterminant de la matrice $\det(J^{-1}) = 0$, confirme que notre robot est situé dans une configuration singulière Figure 2.22.

CHAPITRE 2

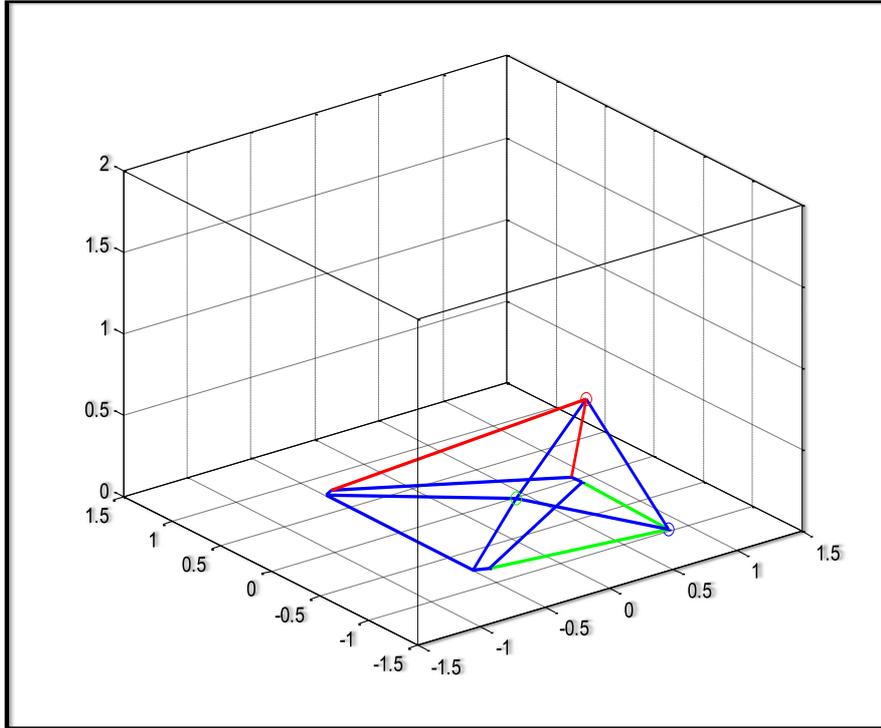


Figure 2.22 Translation sur l'axe X (situation singulière)

2.4.10 Modèle dynamique de la plate-forme de Gough-Stewart

Pour étudier la dynamique de la plate-forme parallèle de Gough-Stewart. Deux grandes méthodes sont possibles : énergie ou principe fondamental de la dynamique. La méthode de Lagrange ou celle des travaux virtuels utilisent les équations de conservation de l'énergie. Il est alors possible de relier les couples articulaires aux variations d'énergie :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K(P, \dot{P})}{\partial \dot{P}} \right) - \frac{\partial K(P, \dot{P})}{\partial P} + \frac{\partial Q}{\partial P} = \Gamma \quad (2.63)$$

Où $K(P, \dot{P})$ est l'énergie cinétique, $Q(P)$ est l'énergie potentielle et Γ est le vecteur des forces généralisées agissant sur le système.

Le modèle dynamique est la relation entre les couples (et/ou forces) appliqués aux actionneurs et les positions, vitesses et accélérations articulaires. On représente le modèle dynamique de la plate-forme de Gough-Stewart par une relation de la forme :

$$M(P)\ddot{P} + C(P, \dot{P})\dot{P} + G(P) = J^T F \quad (2.64)$$

CHAPITRE 2

Où

J^T est la matrice Jacobienne du modèle cinématique inverse.

$G(P) = \frac{\partial Q(P)}{\partial P}$ vecteur des couples/forces de gravité.

L'énergie cinétique du système est une fonction quadratique des vitesses articulaires.

$$K(P, \dot{P}) = \frac{1}{2} \dot{P}^T M(P) \dot{P}$$

Où $M(P)$ est la matrice (6×6) de l'énergie cinétique, d'élément générique $M_{ij}(P)$, appelée aussi matrice d'inertie du robot, qui est symétrique et définie positive.

$$C(P, \dot{P}) = \frac{1}{2} \left\{ \dot{M}(P) + U_M^T - U_M \right\}$$

$$U_M = (I_n \otimes \dot{P}^T) \left[\frac{\partial M}{\partial P} \right]^T = (I_n \otimes \dot{P}^T) \left[\frac{\partial M}{\partial P_1} \dots \dots \frac{\partial M}{\partial P_n} \right]^T$$

\otimes Présente le produit de Kronecker [9], [27].

Propriétés du modèle dynamique

- La matrice $M(P)$ est symétrique et définie positive, donc $M_{ij}(P) = M_{ji}(P)$.
- On montre que, C étant défini selon la relation [34], la matrice $\left[\frac{d}{dt} M - 2C(P, \dot{P}) \right]$ est antisymétrique [41], [4], ce qui est une propriété intéressante pour la commande.

Remarque :

Pour la plate-forme de Stewart, la masse des six branches est considérée inférieure à celle de la plate-forme mobile. Dans les équations dynamiques de corps rigides, la partie dynamique des jambes est plus complexe et moins important que la dynamique de la plate-forme de la partie mobile. Si l'on néglige la dynamique des jambes, la dynamique de la plate-forme sera donnée par la formule suivante [27] :

$$K = \frac{1}{2} m_{up} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} \Omega_{up(mf)}^T I_{up} \Omega_{up(mf)} \quad (2.65)$$

Où m est la masse de la plate-forme mobile, I représente l'inertie de la plate-forme telle que $I_{up} = \text{diag} \{ I_x, I_y, I_z \}$, $\Omega_{up(mf)}$ est la vitesse angulaire de la plate-forme mobile dans le repaire

CHAPITRE 2

mobile.

avec

$$\Omega_{up(mf)} = \dot{\alpha}R_Y(\beta)X + \dot{\beta}Y + \dot{\gamma}R_Y(\beta)R_X(\alpha)Z \quad (2.66)$$

$$\Omega_{up(ff)} = \dot{\alpha}R_Z^T(\gamma)R_X^T(\alpha)X + \dot{\beta}R_Z^T(\gamma)R_X^T(\alpha)R_Y^T(\beta)Y + \dot{\gamma}R_Z^T(\gamma)Z \quad (2.67)$$

L'expression de la matrice d'inertie de la plate-forme de Gough-Stewart est donnée par la formule suivante [51], [27] :

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & M_{45} & M_{46} \\ 0 & 0 & 0 & M_{54} & M_{55} & M_{56} \\ 0 & 0 & 0 & M_{64} & M_{65} & M_{66} \end{bmatrix}$$

Où

$$\begin{cases} M_{44} = I_x C_\beta^2 C_\gamma^2 + I_x C_\beta^2 S_\gamma^2 + I_y S_\beta^2 \\ M_{45} = M_{54} = (I_x - I_y) C_\beta C_\gamma S_\gamma \\ M_{46} = M_{64} = I_z S_\beta \\ M_{55} = I_x S_\gamma^2 + I_y C_\gamma^2 \\ M_{66} = I_z \end{cases}$$

avec $C_\beta = \cos \beta$, $C_\gamma = \cos \gamma$, $S_\beta = \sin \beta$ et $S_\gamma = \sin \gamma$

La matrice des forces de Coriolis, centrifuges est donnée sous la forme suivante : $C(P, \dot{P}) =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_1 \dot{\beta} - K_2 \dot{\gamma} & -K_1 \dot{\alpha} - K_3 \dot{\beta} + K_4 \dot{\gamma} & -K_2 \dot{\alpha} + K_4 \dot{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & K_1 \dot{\alpha} + K_4 \dot{\gamma} & K_5 \dot{\gamma} & K_4 \dot{\alpha} + K_5 \dot{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & K_2 \dot{\alpha} - K_4 \dot{\beta} & -K_4 \dot{\alpha} - K_5 \dot{\beta} & 0 \end{bmatrix}$$

Où

CHAPITRE 2

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = C_\beta S_\beta (C_\gamma^2 I_x + S_\gamma^2 I_y + I_z) \\ K_2 = C_\beta^2 C_\gamma S_\gamma (I_x - I_y) \\ K_3 = C_\gamma S_\gamma S_\gamma (I_x - I_y) \\ K_4 = \frac{1}{2} C_\beta (C_\gamma - S_\gamma)(C_\gamma + S_\gamma)(I_x - I_y) \\ K_5 = C_\gamma S_\gamma (I_x - I_y) \end{array} \right.$$

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre une étude détaillée sur les robots manipulateurs parallèles a été présentée, où nous avons parlé de la géométrie, de la constitution, de la cinématique, et de la dynamique de ce type de robots.

Ce chapitre est une base pour le développement ultérieur du modèle dynamique du robot parallèle que nous allons utiliser pour la commande.

Troisième partie

COMMANDE PAR MODE GLISSANT APPLIQUÉE AUX ROBOTS PARALLÈLES

CHAPITRE 3

Commande par Mode Glissant appliquée aux robots parallèles

3.1 Commande par Mode de Glissement pour les Systèmes Mono Variable

3.1.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, deux modèles des robots parallèles dans l'espace cartésien ont été développés. Ces modèles présentent des non-linéarités qu'il faut pouvoir prendre en compte pour développer des lois de commande performantes.

Dans ce chapitre, des lois de commande non linéaires basées sur la théorie de la commande par mode glissant d'ordre 1 sont développées pour répondre à cette problématique. Les principaux avantages de ce type de commande sont la relative simplicité de mise en œuvre pour certaines formes de systèmes non linéaires et la robustesse par rapport à une classe particulière d'incertitudes paramétrique et de perturbations. L'intérêt dans le cas considéré est de pouvoir prendre en compte les variations paramétriques des modèles et les perturbations telle que la variation de la masse de l'organe terminal.

3.1.2 Rappels sur la commande par mode glissant pour les systèmes mono variables

La commande par mode glissant consiste à concevoir une loi de commande qui puisse guider le vecteur d'état d'un système donné vers un hyperplan $S = O$, communément appelé surface de glissement. Une fois ce sous-espace d'état atteint, le vecteur d'état possédera alors une dynamique stable qui dépendra directement du choix de la surface de glissement, et qui fera en sorte que le vecteur d'état convergera vers le point d'équilibre. Nous dirons alors que le vecteur d'état «glisse» sur l'hyperplan jusqu'à atteindre le point d'équilibre. La Figure 3.7 schématise ce processus dans le plan de phase, c'est-à-dire dans le cas particulier d'un système mono variable d'ordre deux. Ainsi nous pouvons constater que la commande par mode de glissement est divisée en deux étapes, ou deux modes : Dans une première phase, le vecteur d'état doit atteindre la surface de glissement, nous parlons alors du mode d'atteinte, ou « Reaching mode » en anglais. Dans une deuxième phase, et après avoir atteint la surface de glissement $S = O$, le vecteur d'état doit glisser sur cette surface jusqu'à atteindre

CHAPITRE 3

le point d'équilibre, nous parlons alors de mode de glissement, ou de « Sliding mode ». Donc la conception de la commande par mode glissant est divisée en deux parties distinctes [91], [90] et [77] :

- Premièrement, il faut choisir adéquatement la surface de glissement pour y assurer la

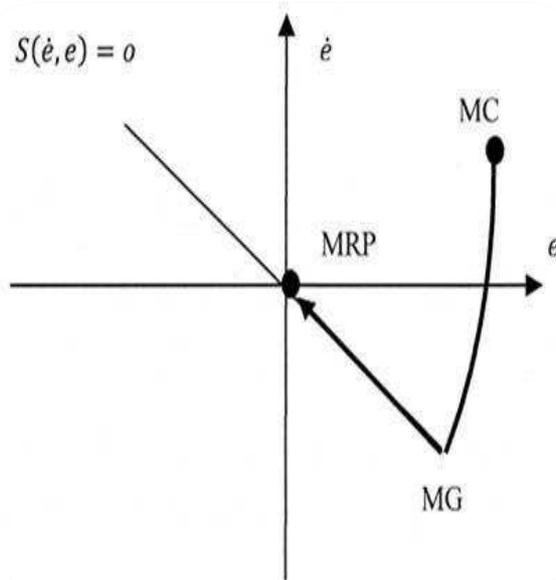


Figure 3.1 Schématisation du mode de glissement dans le plan de phase

convergence du vecteur d'état vers le point d'équilibre.

- Deuxièmement, il faut concevoir la loi de commande de telle manière que le vecteur d'état puisse atteindre la surface de glissement et y glisser.

Afin de bien comprendre les étapes dans la conception de la commande par mode glissant, considérons le cas particulier d'un système non linéaire mono variable du deuxième ordre, dont la dynamique est donnée par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) + b(x, \dot{x}) \cdot u \quad (3.1)$$

où f et b sont des fonctions non linéaires, et b est supposée inversible. u est l'entrée du système. Soit x_d la consigne désirée et soit e l'erreur de poursuite définie par $e = x - x_d$. Tout d'abord, il faut commencer par choisir la fonction de glissement S . Le choix typique de S est fait tout simplement comme suit [91], [90], [89] et [77], [60] :

$$S = \lambda e + \dot{e} \quad (3.2)$$

CHAPITRE 3

où λ est un coefficient positif. Ainsi, lorsque la surface de glissement $S = 0$ est atteinte, le système vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\lambda e + \dot{e} = 0 \quad (3.3)$$

D'après (3.3), l'erreur de poursuite vérifie alors une équation différentielle linéaire du premier ordre et tendra exponentiellement vers 0. Le choix de la fonction de glissement S étant fait, la deuxième étape consiste à concevoir une loi de commande qui puisse amener le vecteur d'état à glisser sur la surface $S = 0$. Pour cela, il faut que la loi de commande soit conçue de telle manière à ce que la condition suivante (appelée également condition d'atteinte, ou « Reaching condition») soit vérifiée :

$$S \cdot \dot{S} < 0, \forall t \quad (3.4)$$

Si la condition (3.4) est vérifiée, alors la fonction de glissement et sa dérivée sont de signe contraire quel que soit le temps. Ceci implique donc que 0 est un centre attracteur pour S , ce qui veut dire que la vérification de la condition (3.4) implique que S convergera vers 0.

Le temps de convergence, ou le temps d'atteinte « Reaching time » t_r dépend directement du choix de S . D'une autre perspective, la condition (3.4) assure que la fonction de Lyapunov $\frac{1}{2}S^2$ admet une dérivée temporelle strictement négative, ce qui implique que S convergera vers 0. Généralement, pour que la condition (3.4) soit vérifiée en tout temps, S est usuellement choisie comme suit :

$$\dot{S} = -k \cdot \text{sign}(S), \forall t \quad (3.5)$$

avec la fonction sign et le coefficient k appelé aussi gain discontinu et strictement positif. (3.5) est appelée loi d'atteinte ou loi de convergence ou encore « Reaching law ». En intégrant temporellement (3.5) entre 0 et t_r , nous trouvons que le temps d'atteinte de la surface de glissement est fini et est donné par la relation suivante :

$$t_r = \frac{|S(0)|}{k} \quad (3.6)$$

Il suffit maintenant de choisir la loi de commande pour que la loi de convergence (3.5) soit vérifiée. Pour cela, il faudra exprimer \dot{S} en fonction de la commande u . Or :

$$\dot{S} = \ddot{e} + \lambda \dot{e} = \lambda \dot{e} - \ddot{x}_d + \ddot{x} = \lambda \dot{e} - \ddot{x}_d + f(x, \dot{x}) + b(x, \dot{x}) \cdot u \quad (3.7)$$

CHAPITRE 3

Ainsi, pour que (3.5) soit vérifiée, il suffirait que

$$\lambda\dot{e} - \ddot{x}_d + f(x, \dot{x}) + b(x, \dot{x}) \cdot u = -k \cdot \text{sign}(S) \quad (3.8)$$

En isolant alors la commande dans (3.8), nous déduisons la loi de commande suivante qui permettra au vecteur d'état d'atteindre la surface de glissement et de converger vers la trajectoire désirée :

$$u = b^{-1}(\ddot{x}_d - \lambda\dot{e} - f) - b^{-1}k \cdot \text{sign}(S) \quad (3.9)$$

Nous voyons directement l'intérêt que la fonction b soit inversible. De (3.9), nous constatons que la loi de commande est divisée en deux termes de natures différentes [90], [89]. L'un, de nature continue, est appelé contrôle équivalent et correspond à :

$$u_{eq} = b^{-1}(\ddot{x}_d - \lambda\dot{e} - f) \quad (3.10)$$

L'autre, de nature discontinue, est appelé contrôle discontinu et correspond à :

$$u_{disc} = -b^{-1}k \cdot \text{sign}(S) \quad (3.11)$$

L'interprétation du rôle de chacun de ces termes est différente : Lorsque la surface de glissement $S = 0$ est atteinte, le contrôle discontinu s'annule théoriquement (puisque $\text{sign}(0) = 0$) et seul le terme équivalent de la loi de commande subsiste. Nous déduisons alors que le rôle de u_{eq} est de garder le vecteur d'état sur la surface de glissement lorsque celle-ci est atteinte. Le rôle de u_{eq} peut être également perçu comme un compensateur des non linéarités introduites par la fonction f . Par ailleurs, le rôle du terme discontinu u_{disc} est principalement de vérifier la condition d'atteinte (3.4), et donc de guider le vecteur d'état vers la surface de glissement. Ainsi, comme nous l'avons mentionné précédemment, le rôle de la loi de commande est double, puisqu'en effet, il consiste à guider le vecteur d'état sur la surface de glissement et à le garder sur cette dernière pour qu'il converge vers l'équilibre.

En pratique, la fonction $\text{sign}(S)$ ne s'annule jamais exactement, et la nature discontinue de ce terme engendre en régime permanent le phénomène des commutations haute fréquence, ou « Chattering », caractéristiques de la commande par mode de glissement.

Plusieurs solutions existent pour réduire ce phénomène, qui peut avoir des effets néfastes sur le système en question. Quoi qu'il en soit, la robustesse de cette commande reste un atout majeur et c'est également u_{disc} qui assure cette propriété. En effet, imaginons à titre d'exemple, que la fonction non linéaire f du système (3.1) ne soit pas rigoureusement connue. Soit alors \hat{f} l'estimée de f . Nous supposons que f ainsi que son estimée sont bornées dans le

CHAPITRE 3

temps. La loi de commande (3.9) devient alors :

$$u = b^{-1}(\ddot{x}_d - \lambda \dot{e} - \hat{f}) - b^{-1}k(S) \quad (3.12)$$

En substituant la loi de commande (3.12) dans l'expression de S dans (3.7), nous obtenons, en contraste avec (3.6), la loi d'atteinte suivante :

$$\dot{S} = (f - \hat{f}) - k(S), \forall t \quad (3.13)$$

Ainsi, pour que la condition d'atteinte (3.5) soit encore vérifiée, il suffirait, d'après (3.13), que la condition suivante soit respectée :

$$k > |f - \hat{f}|, \forall t \quad (3.14)$$

D'après (3.14), nous constatons qu'en choisissant le gain discontinu k suffisamment grand, l'incertitude sur f sera absorbée par le terme discontinu de la loi de commande. Ainsi, nous constatons qu'une augmentation du gain discontinu assure une plus grande robustesse du contrôleur, mais aux dépens de l'augmentation du phénomène de commutations sur la commande.

3.1.3 Problème de réticence (Chattering problem).

Le phénomène de réticence (broutement) est le principal inconvénient de la commande par mode de glissant. Il est dû d'une part à l'imperfection des éléments de commutation ou des limites technologiques et physiques, tels que les retards au niveau des commutations [54] ou des comportements hystérésis, qui peuvent exciter des dynamiques négligées en haute fréquence. En pratique, un régime glissant idéal n'existe pas car la fréquence de commutation des organes de commande a une limite finie, due aux limites technologiques et physiques. La présence des imperfections des organes de commande engendre un mouvement autour d'une couche limite de la surface de glissement. Ce mouvement est appelé réticence ou broutement (Chattering en anglais).

3.1.4 Adoucissement de la commutation

Pour remédier à l'effet de broutement, et dans le but de réduire les oscillations hautes fréquences, de nombreux algorithmes ont été développés. On peut citer la commande continue dans une bande de la surface [77] ou la commande avec correction intégrale en régime permanent [74], [75] et [29]. Dans la littérature, il existe plusieurs fonctions d'adoucissement

CHAPITRE 3

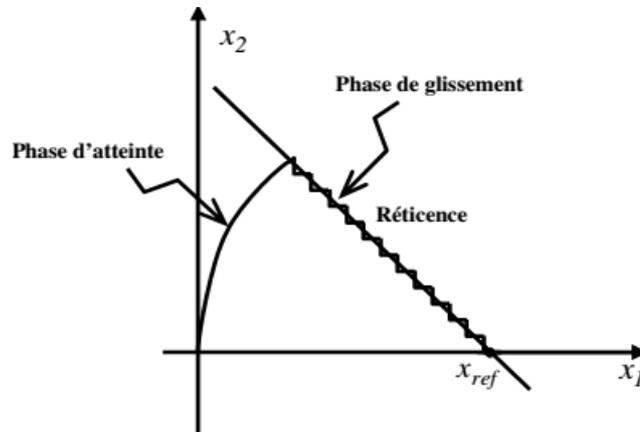


Figure 3.2 Phénomène de réticence dans un plan bidimensionnel

de la commande. Parmi ces fonctions, on trouve la fonction de saturation, la fonction com_{\sin} , la fonction smooth, et la fonction com_{\arctg} .

3.1.4.1 La fonction de saturation $sat(S(t))$ [76]

Cette fonction consiste à substituer à la commutation une droite de pente $\frac{S(t)}{\varphi}$ Figure 3.3 dans la couche interne de la surface de discontinuité que nous appelons « couche limite » (boundary layer en anglais). L'expression de cette fonction est donnée par

$$sat(S(t)) = \begin{cases} \frac{S(t)}{\varphi} & \text{si } |S(t)| \leq \varphi \\ sign(S(t)) & \text{si } |S(t)| > \varphi \end{cases} \quad (3.15)$$

3.1.4.2 La fonction com_{\sin}

On remplace la fonction $sign(S(t))$ de la commande par une fonction sinusoïdal à l'intérieur de la couche limite de la surface de glissement Figure 3.4.

$$com_{\sin}(s(t)) = \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2\varphi}S(t)) & \text{si } |S(t)| \leq \varphi \\ sign(S(t)) & \text{si } |S(t)| > \varphi \end{cases} \quad (3.16)$$

3.1.4.3 La Fonction «Smooth» [29]

Elle est définie par, Figure 3.5

$$smooth(S(t)) = \frac{S(t)}{|S(t)| + \varphi} \quad (3.17)$$

CHAPITRE 3

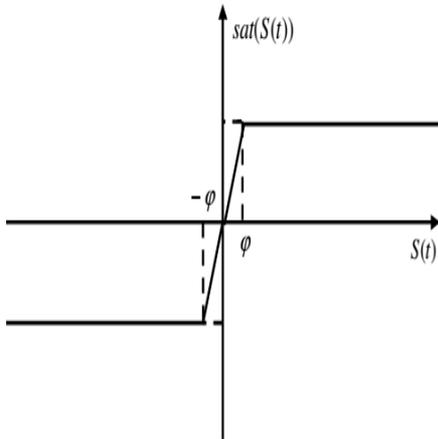


Figure 3.3 Fonction saturation $sat(S(t))$

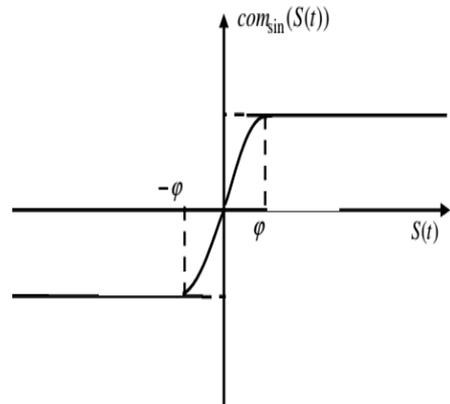


Figure 3.4 Fonction com_{sin}

3.1.5 La fonction com_{arctg}

Elle est définie par, Figure 3.6

$$com_{arctg}(S(t)) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{S(t)}{\varphi}\right) \quad (3.18)$$

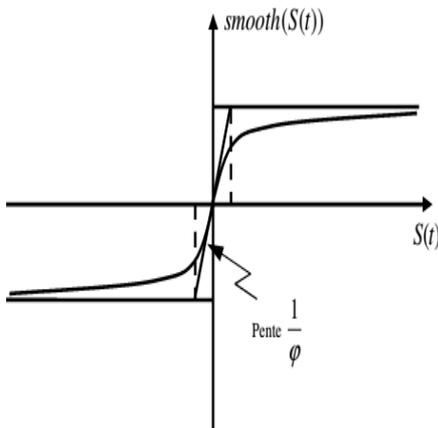


Figure 3.5 Fonction $smooth(S(t))$

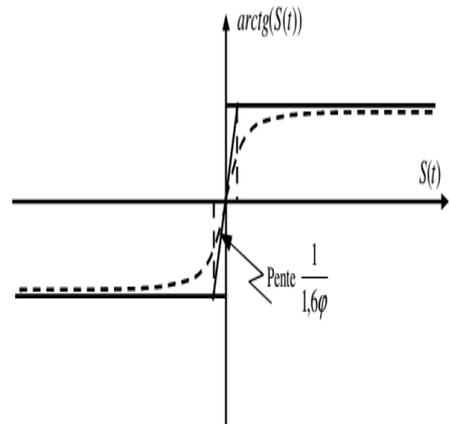


Figure 3.6 Fonction $arctg(S(t))$

Remarque

1- Les fonctions $sat(S(t))$ et $com_{sin}(S(t))$ sont toutes deux exactement égales à la commutation $sign(S(t))$ à l'extérieur de la couche limite φ . Par conséquent, ceci rend l'analyse vis à vis des erreurs de perturbation plus facile car on connaît d'une manière précise la frontière à

CHAPITRE 3

partir de laquelle la commutation $\text{sign}(S(t))$ n'est plus utilisée. Ceci n'est pas le cas des deux autres fonctions smooth et $\text{com}_{\text{arctg}}$, pour lesquels le choix de φ n'est pas simple.

2- Dans un cas idéal, la substitution de la fonction sign par l'une des fonctions de lissage ne change rien quant à l'atteignabilité de la surface de glissement $S(t) = 0$ car la condition $\dot{S}(t)S(t) < 0$ reste toujours valable. En présence d'erreurs de modèle et de perturbations, on ne pourra assurer que $S(t) < \varphi$ et des erreurs de suivi en découleront.

3- Par la suite, nous préférons utiliser la fonction $\text{sat}(S(t))$ qui est linéaire à l'intérieur de φ et qui rend l'analyse du comportement de $S(t)$ à l'intérieur de la couche limite φ plus facile.

3.2 Commande par Mode Glissant des Systèmes Multi Variables

3.2.1 Introduction

Dans la première partie, nous avons introduit la commande par mode glissant sur des systèmes mono variables, c'est à dire des systèmes à une seule entrée et une seule sortie la deuxième partie présente donc une continuité dans le développement, puisqu'il s'agit de l'étude de la commande par mode glissant sur les systèmes multi variables, c'est à dire des systèmes à plusieurs entrées et à plusieurs sorties. Nous allons dans un premier temps généraliser l'application de la commande par mode glissant sur des systèmes multi variables, dits carrés. Nous allons par la suite considérer deux manipulateurs parallèles (Plan et spatial) sur lesquels nous appliquerons la commande par mode glissant dans les chapitres suivants.

3.2.2 Commande par mode glissant appliquée aux systèmes multi variables

Considérons un système incertain avec autant d'entrées que de sorties défini comme suit [20] :

$$x_i^{(n_i)} = f_i(x) + \Delta f_i(x) + \sum_{j=1}^m (g_{ij}(x) + \Delta g_{ij}(x))u_j, i, j = 1, \dots, m \quad (3.19)$$

ou le vecteur u composé des u_j est le vecteur de commande, le vecteur d'état x est composé des états x_i et de leurs $n_i - 1$ premières dérivées, $f(x)$ est le vecteur des éléments $f_i(x)$, et la matrice $G(x)$ se compose des éléments $g_{ij}(x)$. On suppose que la matrice $G(x)$ est inversible sur l'ensemble de l'espace d'état.

$$f(x) = (f_1(x) f_2(x) \dots f_m(x))^T$$

CHAPITRE 3

$$G(x) = \begin{pmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) & \cdots & g_{1m}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & \cdots & g_{2m}(x) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ g_{m1}(x) & g_{m2}(x) & \cdots & g_{mm}(x) \end{pmatrix}$$

$\Delta f_i(x), \Delta g_{ij}(x)$ contiennent les incertitudes de modélisation et des perturbations qui sont supposées bornées :

$$|\Delta f_i(x)| \leq \alpha_i(x) \quad (3.20)$$

$$|\Delta g_{ij}(x)| \leq \beta_{ij}(x) \quad (3.21)$$

avec $i = 1, \dots, m$

Le but du problème de commande est alors de faire suivre à l'état x un état de référence variant dans le temps x_r . La loi de commande doit être suffisamment robuste pour compenser les incertitudes de modélisation et les perturbations inconnues $\Delta f(x), \Delta G(x)$. Une surface de glissement $s(t)$ est considérée, elle est composée des $s_i(t)$ définies par :

$$\begin{aligned} s_i(t) &= \left(\frac{d}{dt} + \lambda_i\right)^{n_i-1} e_i(t) \\ &= e_i^{(n_i-1)}(t) + C_{n_i-1}^1 \lambda_i e_i^{(n_i-2)}(t) + \dots + C_{n_i-1}^{n_i-2} \lambda_i^{n_i-2} \dot{e}_i(t) + \lambda_i^{n_i-1} e_i(t) \\ &= e_i^{(n_i-1)}(t) + \sum_{j=1}^{n_i-1} C_{n_i-1}^j \lambda_i^j e_i^{(n_i-1-j)}(t) \end{aligned} \quad (3.22)$$

ou λ est une constante positive, $e_i(t)$ est l'erreur de suivi. Comme dans le cas mono-entrée, une fonction de Lyapunov candidate est choisie sous la forme :

$$V(t) = \frac{1}{2} s(t)^T s(t) \quad (3.23)$$

La condition de la stabilité du critère de Lyapunov est obtenue par dérivation :

$$\dot{V}(t) = s(t)^T \dot{s}(t) \leq 0 \quad (3.24)$$

De façon similaire au cas mono-entrée, pour prendre en compte les variations des paramètres, les perturbations, *etc.*, la condition suivante est introduite :

$$\dot{V}(t) = s(t)^T \dot{s}(t) \leq -\eta \|s(t)\| \quad (3.25)$$

ou η est une constante positive.

Une loi de commande est alors choisie de la forme :

$$u = G(x)^{-1}(\hat{u} - k \text{sign}(s)) \quad (3.26)$$

CHAPITRE 3

ou k est un scalaire positif, $sign(s)$ est le vecteur de i^{me} élément $sign(s_i)$ et le vecteur \hat{u} correspond à la commande équivalente définie par l'expression :

$$\hat{u} = -f(x) + \overset{(n)}{x}_r(t) - h_e(t) \quad (3.27)$$

ou $\overset{(n)}{x}_r(t)$ est un vecteur composé des éléments $\overset{(n_i)}{x}_{r_i}(t)$

$$\overset{(n)}{x}_r(t) = \left(\overset{(n_1)}{x}_{r_1}(t) \overset{(n_2)}{x}_{r_2}(t) \dots \overset{(n_m)}{x}_{r_m}(t) \right)^T \quad (3.28)$$

et $h_e(t)$ est le vecteur

$$h_e(t) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n_1-1} C_{n_1-1}^j \lambda_i^j e_1^{(n_1-2-j)}(t) \\ \sum_{j=1}^{n_2-1} C_{n_2-1}^j \lambda_i^j e_2^{(n_2-2-j)}(t) \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{n_m-1} C_{n_m-1}^j \lambda_i^j e_m^{(n_m-2-j)}(t) \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

La grandeur k est choisie de sorte que la condition de glissement (3.25) soit vérifiée malgré les perturbations et les incertitudes de modélisation. Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= f(x) + G(x)u - \overset{(n)}{x}_r(t) + h_e(t) + \Delta f(x) + \Delta G(x)u \\ &= -\left(I + \Delta G(x)G(x)^{-1}\right) k sign(s(t)) + \Delta f(x) + \Delta G(x)G(x)^{-1}\hat{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= s(t)^T \dot{s}(t) \\ &= s(t)^T \left(-\left(I + \Delta G(x)G(x)^{-1}\right) k sign(s(t)) + \Delta f(x) + \Delta G(x)G(x)^{-1}\hat{u} \right) \\ &\leq \left\| s(t)^T \right\| \left(-k + k \left\| \Delta G(x)G(x)^{-1} sign(s(t)) \right\| + \left\| \Delta f(x) \right\| + \left\| \Delta G(x)G(x)^{-1}\hat{u} \right\| \right) \end{aligned}$$

La condition de glissement (3.25) est alors vérifiée si la condition suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned} &\left(-k + k \left\| \Delta G(x)G(x)^{-1} sign(s(t)) \right\| + \left\| \Delta f(x) \right\| + \left\| \Delta G(x)G(x)^{-1}\hat{u} \right\| \right) < -\eta \left\| s(t) \right\| \\ &\Leftrightarrow -k \left(1 - \left\| \Delta G(x)G(x)^{-1} sign(s(t)) \right\| \right) + \left\| \Delta f(x) \right\| + \left\| \Delta G(x)G(x)^{-1}\hat{u} \right\| < -\eta \end{aligned}$$

En supposant $\left\| \Delta G(x)G(x)^{-1} sign(s(t)) \right\| < 1$, il vient :

$$\Leftrightarrow k \geq \frac{\left\| \Delta f(x) \right\| + \left\| \Delta G(x)G(x)^{-1}\hat{u} \right\| + \eta}{1 - \left\| \Delta G(x)G(x)^{-1} sign(s(t)) \right\|}$$

CHAPITRE 3

Notons que

$$\|\Delta f(x)\| \leq \|\alpha(x)\| \quad (3.30)$$

$$\|\Delta G(x)\| \leq \|B(x)\| \quad (3.31)$$

ou $\alpha(x)$ est un vecteur composé d'éléments $\alpha_i(x)$, $B(x)$ est une matrice formée des $\beta_{ij}(x)$

$$\alpha(x) = (\alpha_1(x)\alpha_2(x) \dots \alpha_m(x))^T$$

$$B(x) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(x) & \beta_{12}(x) & \dots & \beta_{1m}(x) \\ \beta_{21}(x) & \beta_{22}(x) & \dots & \beta_{2m}(x) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \beta_{m1}(x) & \beta_{m2}(x) & \dots & \beta_{mm}(x) \end{pmatrix}$$

Un choix possible pour k est :

$$k = \frac{\|\Delta f(x)\| + \|\Delta G(x)G(x)^{-1}\hat{u}\| + \eta}{1 - \|\Delta G(x)G(x)^{-1}\text{sign}(s(t))\|} \quad (3.32)$$

La condition de glissement (3.25) est donc vérifiée. Un résultat similaire est obtenu avec une surface de glissement intégrale.

3.3 Application de la commande par mode glissant aux robots parallèles

En application à ce qui a précédé, nous allons dans cette partie implémenter la commande par mode glissant sur deux systèmes multi variables particulier, en l'occurrence deux manipulateur parallèles planaires, le robot Biglide à deux degrés de liberté et La plate-forme parallèle de Gough-Stewart à six degrés de liberté. nous allons exposer dans un premier temps le calcul de la loi de commande sur les deux type de robots par la suite nous exposerons et commenterons finalement les résultats de simulation obtenus.

3.3.1 Conception de la loi de commande par mode glissant (Robot Plan Biglide)

Pour appliquer la commande par mode glissant sur le robot parallèle Biglide, nous commençons par choisir la surface de glissement correspondant aux deux axes [47]. Ces fonctions ont été choisies comme suit :

$$S = \left(\frac{d}{dt} + \lambda_i \right)^{n_i-1} e_i(t) \quad (3.33)$$

CHAPITRE 3

n_i : degré relatif du S .

Dans le cas du robot Biglide le degré relatif $n_i = 2$.

$$S = \dot{e} + \lambda e \quad (3.34)$$

λ : Représente une matrice diagonale ($2 * 2$) des constantes positives.

La grandeur que l'on souhaite principalement contrôler et la position de l'effecteur terminal dans l'espace Cartésien c-a-d le problème de contrôle et de trouver une loi de commande telle que étant donnée une trajectoire désirée P_{des} , le système suit la trajectoire P_{des} avec une erreur e_i qui tend vers zéro asymptotiquement.

L'expression de l'erreur est donnée par :

$$e_i = P_{mes} - P_{des}, i = (1, 2), \quad (3.35)$$

avec :

$P_{mes} = \begin{bmatrix} x_{mes} & y_{mes} \end{bmatrix}^T$ représente le vecteur de position mesuré de l'organe terminal du robot parallèle Biglide .

$P_{des} = \begin{bmatrix} x_{des} & y_{des} \end{bmatrix}^T$ représente le vecteur de position désiré de l'organe terminal du robot parallèle Biglide .

La fonction de Lyapunov candidate est choisie sous la forme :

$$V = \frac{1}{2} S^T S \quad (3.36)$$

La condition de la stabilité du critère de Lyapunov est obtenu par dérivation :

$$\dot{V} = S^T \dot{S} \quad (3.37)$$

tel-que L'expression de \dot{S} est sous la forme suivante :

$$\dot{S} = \lambda \dot{e} + \ddot{P}_{mes} - \ddot{P}_{des} \quad (3.38)$$

avec

$$\ddot{P}_{mes} = M(P)^{-1} [\Gamma - N(P, \dot{P}) \dot{P}] \quad (3.39)$$

CHAPITRE 3

$\ddot{P}_{mes} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{mes} & \ddot{y}_{mes} \end{bmatrix}^T$ représente le vecteur d'accélération de l'effecteur.

En remplaçant l'équation du modèle dynamique (3.39) dans l'équation de la surface de glissement, la dérivée de la surface devient :

$$\dot{S} = \lambda\dot{e} - \ddot{P}_{des} + M(P)^{-1}[\Gamma - N(P, \dot{P})\dot{P}] \quad (3.40)$$

Apartir de l'équation (3.40) nous pouvons écrire l'équation sous la forme suivante :

$$\dot{V} = S^T[\lambda\dot{e} - \ddot{P}_{des} + M(P)^{-1}[\Gamma - N(P, \dot{P})\dot{P}]] \quad (3.41)$$

Si la condition $S \cdot \dot{S} < 0, \forall t$ est vérifiée, alors la fonction de glissement et sa dérivée sont de signe contraire quel que soit le temps. Ceci implique donc que 0 est un centre attracteur pour S , ce qui veut dire que la vérification de la condition $S \cdot \dot{S} < 0, \forall t$ implique que S convergera vers 0.

Le temps de convergence, ou le temps d'atteinte (« reaching time ») t_r dépend directement du choix de S . D'une autre perspective, la condition $S \cdot \dot{S} < 0, \forall t$ assure que la fonction de Lyapunov $\dot{V} = S^T \dot{S}$ admet une dérivée temporelle strictement négative, ce qui implique que S convergera vers 0. Généralement, pour que la condition $S \cdot \dot{S} < 0, \forall t$ soit vérifiée en tout temps, S est usuellement choisie comme suit :

$$\dot{S} = -k \cdot \text{sign}(S), \forall t \quad (3.42)$$

Il suffit maintenant de choisir la loi de commande pour que la loi de convergence (3.5) soit vérifiée. Pour cela, il faudra exprimer \dot{S} en fonction de la commande Γ . Or :

$$-k \cdot \text{sign}(S) = \lambda\dot{e} - \ddot{P}_{des} + M(P)^{-1}[\Gamma - N(P, \dot{P})\dot{P}] \quad (3.43)$$

Finalement la commande est écrite sous la forme suivante :

$$\Gamma = \hat{\Gamma} - Mk \text{sgn}(S) \quad (3.44)$$

$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{bmatrix}^T$ représente le vecteur de commande d'entrée.

telle que

- $\hat{\Gamma} = [M(P)(P_{des} - \lambda\dot{e}) + N(P, \dot{P})\dot{P}]$ représente l'expression de la commande équivalente.
- $-Mk \text{sgn}(S)$ représente l'expression de la commande discontinue.

CHAPITRE 3

3.4 Étude de la stabilité de Lyapunov du Robot Biglide

Rappelons l'équation de la commande du robot Biglide qui donné par :

$$\Gamma = \hat{\Gamma} - M k \operatorname{sgn}(S) \quad (3.45)$$

Où

$$\hat{\Gamma} = u_{eq} = [M(P)(P_{des} - \lambda \dot{e}) + N(P, \dot{P})] \quad (3.46)$$

Représente la commande équivalent.

$u_{dis} = -M k \operatorname{sgn}(S)$ Représente la commande discontinue.

Théorème de stabilité [49] :

$$\dot{S} = \lambda \dot{e} - \ddot{P}_{des} + M(P)^{-1}[\Gamma - N(P, \dot{P})] \quad (3.47)$$

Nous remplaçons l'équation de la commande (3.46) dans (3.47) nous obtenons :

$$\dot{S} = \lambda \dot{e} - \ddot{P}_{des} + M(P)^{-1}[\hat{\Gamma} - M k \operatorname{sgn}(S) - N(P, \dot{P})] \quad (3.48)$$

$$S \cdot \dot{S} = S(-k \operatorname{sgn}(S)) = -\eta |S| \leq 0 \quad (3.49)$$

Après calcul nous obtenons :

$$\dot{S} = -k \operatorname{sgn}(S) \quad (3.50)$$

tel que

$$S \cdot \dot{S} = S(-k \operatorname{sgn}(S)) = -\eta |S| \leq 0 \quad (3.51)$$

Alors $S \cdot \dot{S} < 0, \forall t$ est vérifiée, la fonction de glissement et sa dérivée sont de signe contraire quel que soit le temps. La condition $S \cdot \dot{S} < 0, \forall t$ assure que la fonction de Lyapunov $\dot{V} = S^T \dot{S}$ admet une dérivée temporelle strictement négative, ce qui implique que S convergera vers 0.

On pose :

CHAPITRE 3

$$\Gamma = \hat{\Gamma} - Mksat(S) \quad (3.52)$$

Pour vérifier la condition de stabilité du système, la constante k doit être positive.

3.4.1 Simulation de la commande par mode glissant du robot Biglide

La Figure 3.7 donne le schéma bloc de la commande par mode glissant du robot Biglide.

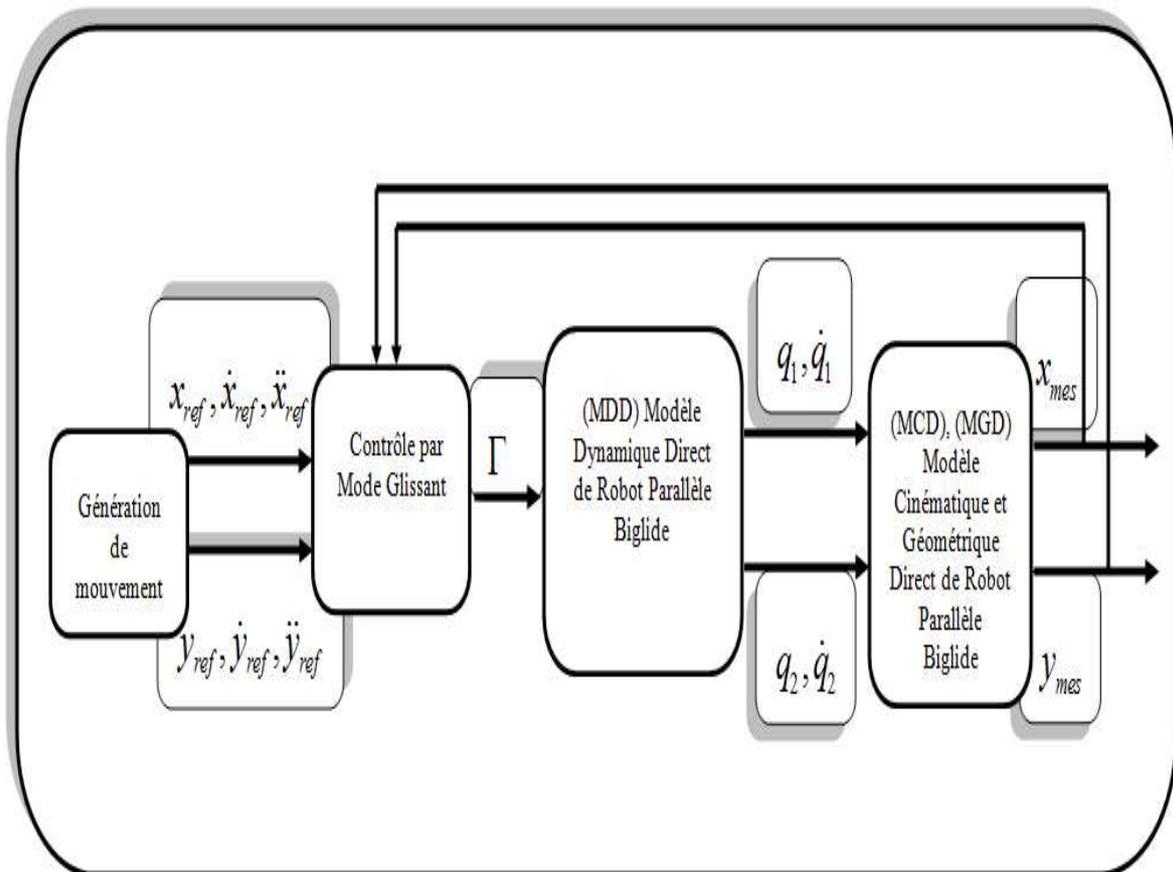


Figure 3.7 La structure de régulateur de position à mode glissant appliqué au robot parallèle Biglide

3.4.2 Simulation

Afin de montrer les performances de la commande par mode glissant et dans un but comparatif, nous allons appliquer les mêmes conditions que celles utilisées dans [92], [47].

CHAPITRE 3

On garde le même modèle avec les frottements, sauf qu'on remplace les régulateurs PID et CTC par le régulateur à mode glissant qui est schématisé par la Figure 3.7.

Le modèle du robot parallèle utilisé pour la simulation numérique comprend des incertitudes structurées et non structurées. L'incertitude structurée est considérée pour une variation de la masse de l'effecteur que celle utilisée dans [92], qui correspond à $\Delta m = 0.816kg$; bien sûr, pas d'incertitude correspond à $\Delta m = 0kg$.

La dynamique non modélisés comme le coefficient de friction Stricbeck et le coefficient de friction Coulomb [92] apparaissent dans le modèle de simulation pour fournir un comportement plus réaliste, (voir le chapitre de la modélisation).

Pour le suivi de la trajectoire nous avons utilisé l'interpolation polynomiale de degré cinq qui assure la continuité du mouvement en position, vitesse et accélération (Annexe B). Les paramètres de simulation numérique du modèle dynamique sont aussi présentés dans l'annexe B.

Les Figure 3.8, Figure 3.9, Figure 3.10 et Figure 3.11 montrent les résultats de simulation. les Figure 3.12, Figure 3.13, Figure 3.14 et Figure 3.15 représentent les résultats de la vitesse de l'effecteur du robot Biglide avec $\Delta m = 0kg$.

les Figure 3.16, Figure 3.17, Figure 3.18 et Figure 3.19 représentent les résultats de la vitesse de l'effecteur du robot Biglide avec $\Delta m = 0.816kg$.

3.4.3 Discussion des résultats obtenus

Les résultats de simulation obtenus sont montrés sur les Figure 3.9 et Figure 3.11 pour la trajectoire T1 (trajectoire près de la limite basse de l'espace de travail), et les Figure 3.8 et Figure 3.10 pour T2 (trajectoire près de la limite haute de l'espace de travail).

les différents vitesses de la plate-forme mobile sont montrés dans les Figure 3.12, Figure 3.13, Figure 3.14 et Figure 3.15 pour une valeur de $\Delta m = 0kg$, et les Figure 3.16, Figure 3.17, Figure 3.18 et Figure 3.19 pour une valeur de $\Delta m = 0.816kg$.

Pour chaque figure, les parties (a) et (b) présentent le point de consigne et la réponse le long des axes x et y dans le temps et les parties (c) et (d) présentent l'entrée du signal de commande de deux actionneurs au fil du temps. Notez également que les Figure 3.9 et Figure 3.8 sont sans variation de la masse de l'effecteur $\Delta m = 0kg$ tandis que les Figure 3.11 et Figure 3.10 utilisent une variation correspond à $\Delta m = 0.816kg$.

Dans le premier cas, $\Delta m = 0kg$, la commande par mode glissant et la commande du couple

CHAPITRE 3

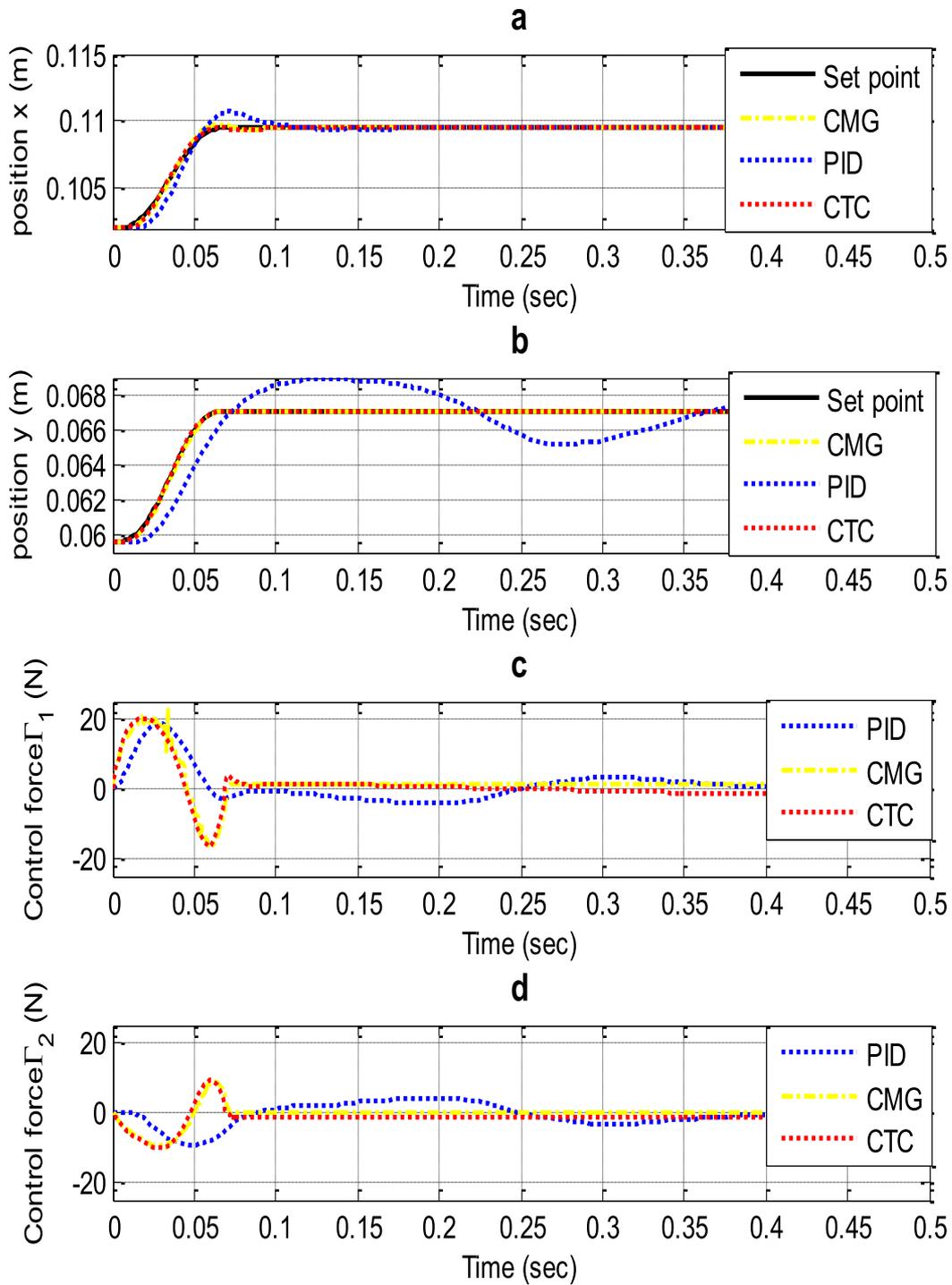


Figure 3.8 Schémas de réponse pour une trajectoire en haute avec $\Delta m = 0kg$

CHAPITRE 3

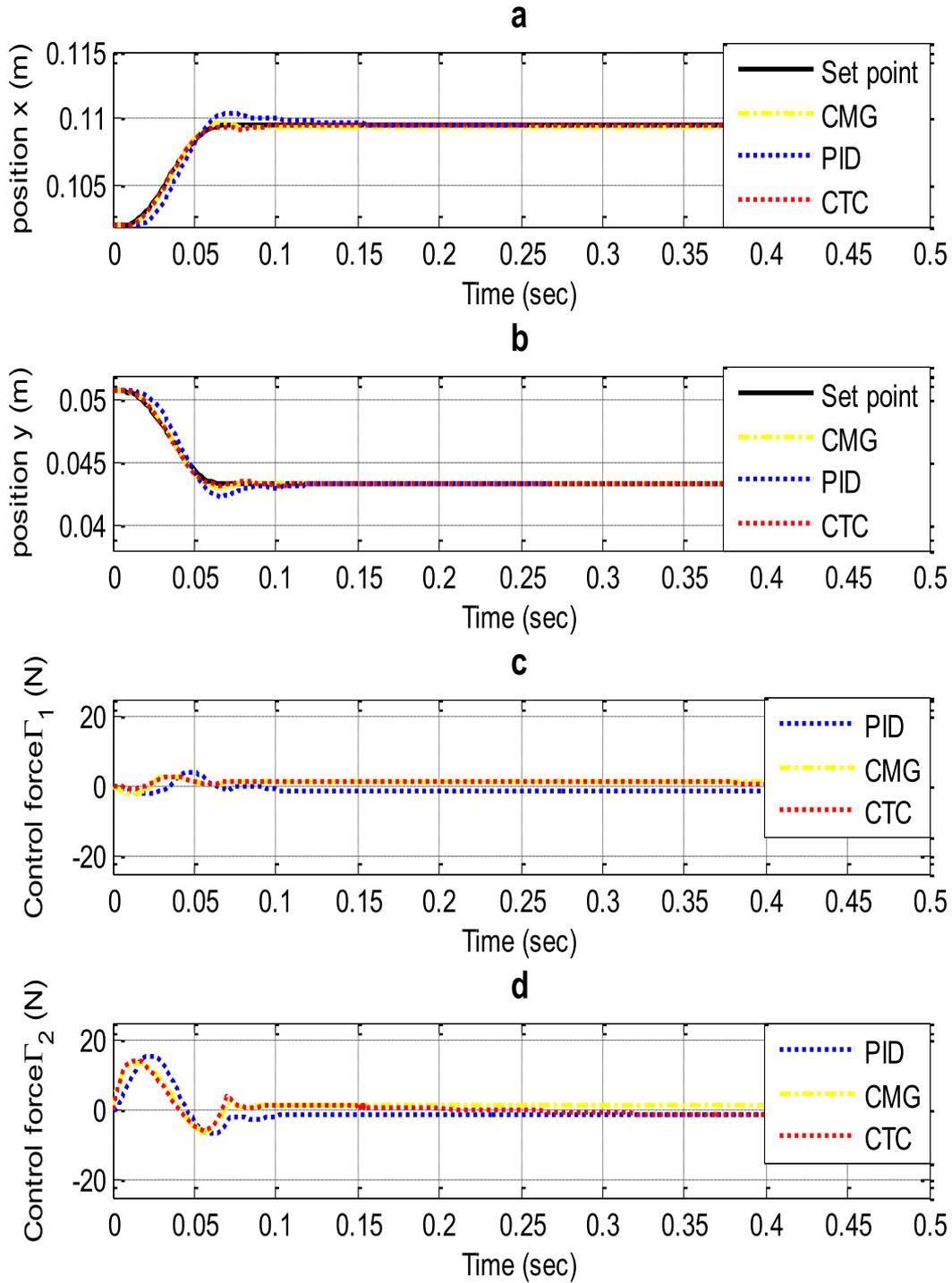


Figure 3.9 Schémas de réponse pour une trajectoire en bas avec $\Delta m = 0kg$

CHAPITRE 3

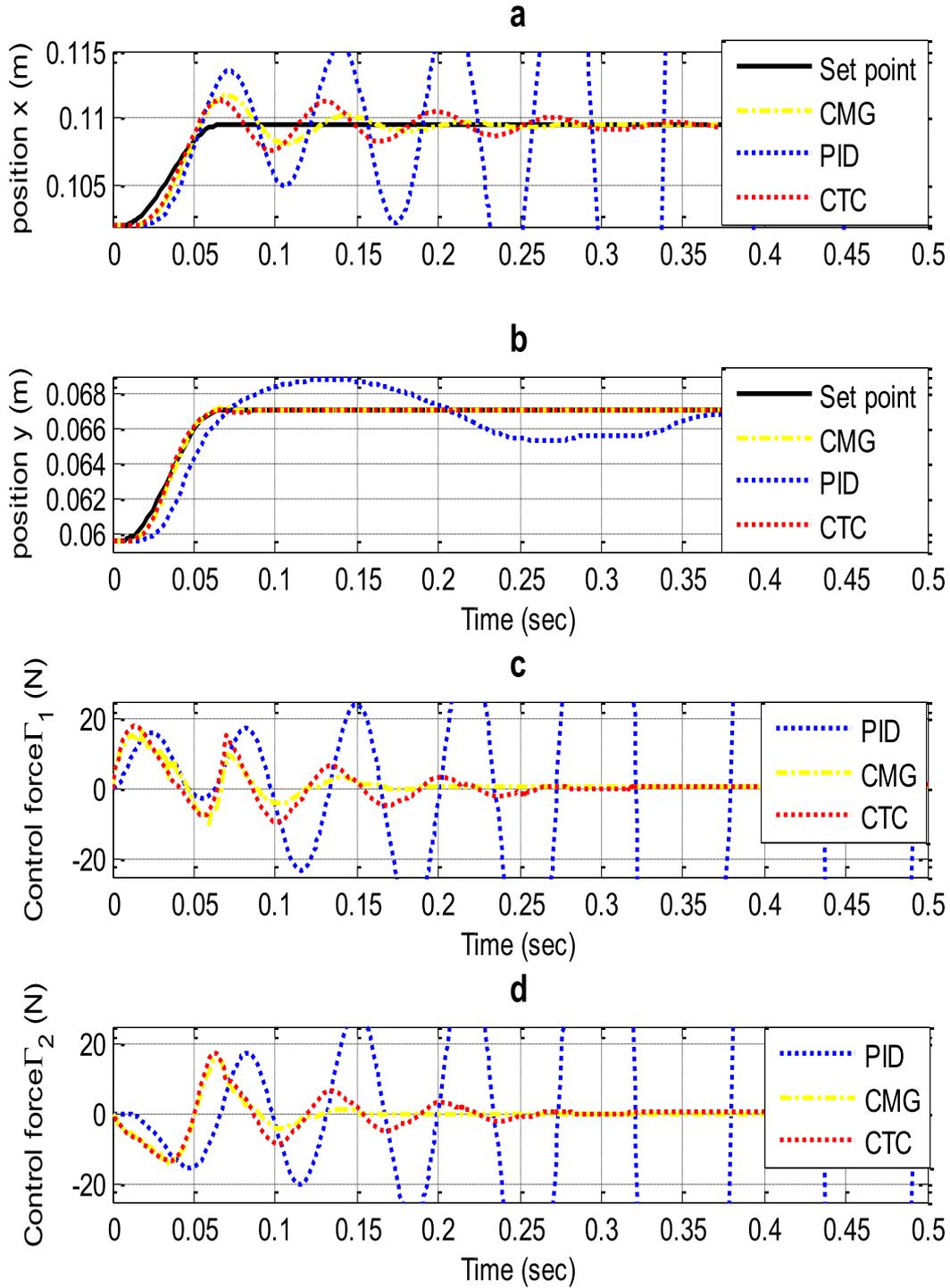


Figure 3.10 Schémas de réponse pour une trajectoire en haut avec $\Delta m = 0.816kg$

CHAPITRE 3

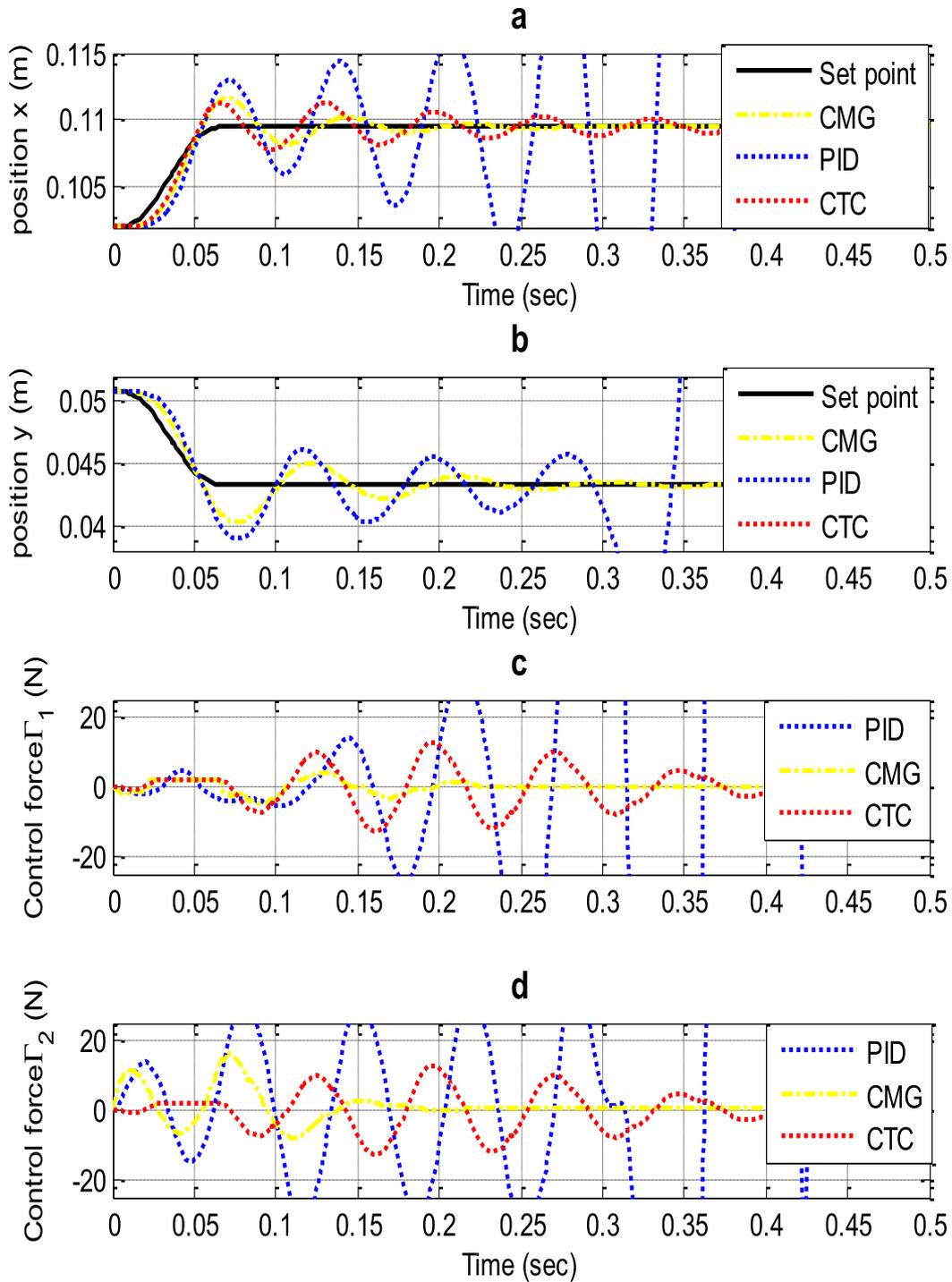


Figure 3.11 Schémas de réponse pour une trajectoire en bas avec $\Delta m = 0.816kg$

CHAPITRE 3

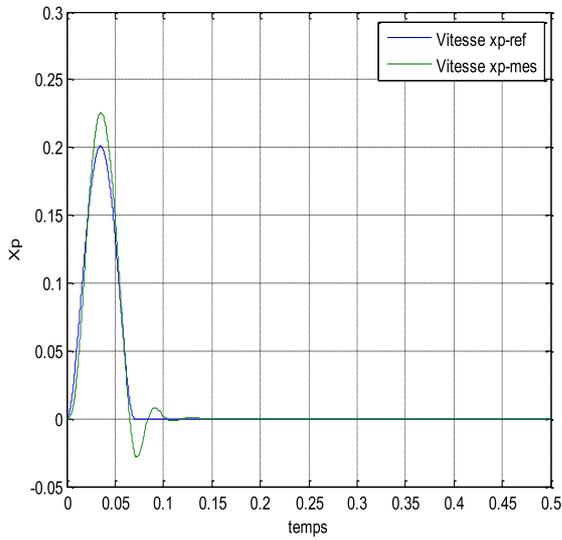


Figure 3.12 Réponse de vitesse pour une trajectoire en haut sur l'axe x, $\Delta m = 0kg$

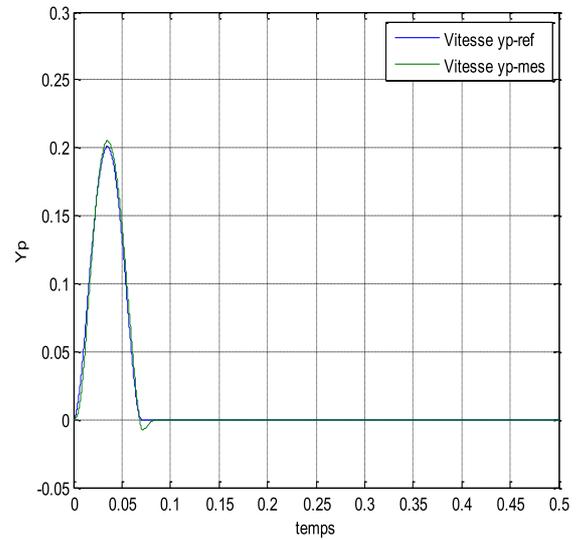


Figure 3.13 Réponse de vitesse pour une trajectoire en haut sur l'axe y, $\Delta m = 0kg$

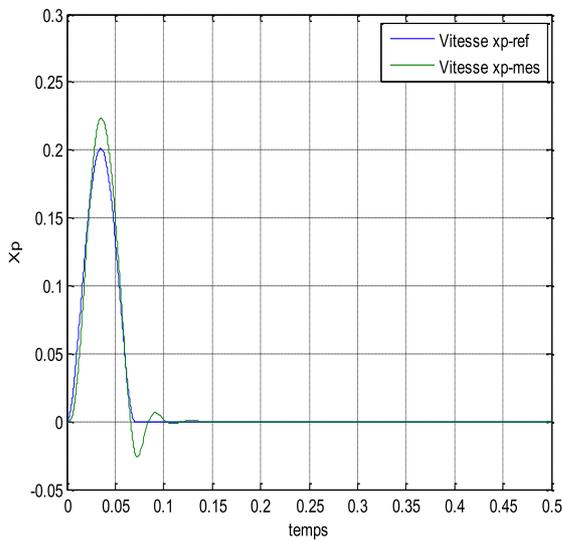


Figure 3.14 Réponse de vitesse pour une trajectoire en bas sur l'axe x, $\Delta m = 0kg$

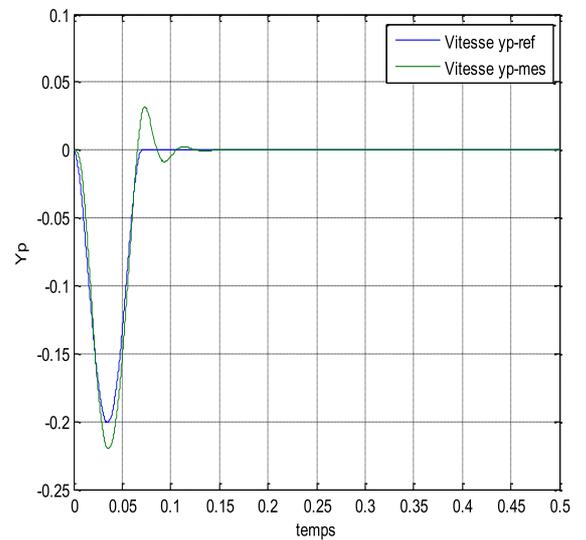


Figure 3.15 Réponse de vitesse pour une trajectoire en bas sur l'axe y, $\Delta m = 0kg$

CHAPITRE 3

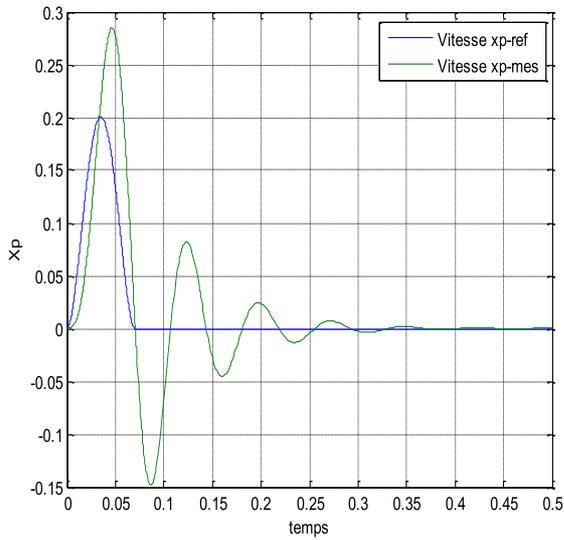


Figure 3.16 Réponse de vitesse pour une trajectoire en haut sur l'axe x, $\Delta m = 0.816kg$

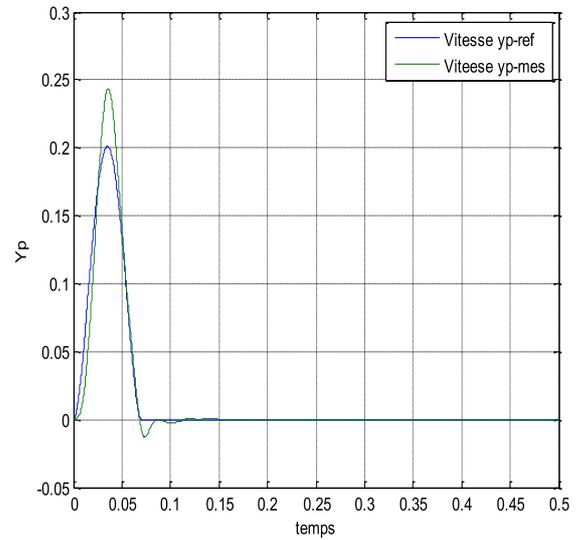


Figure 3.17 Réponse de vitesse pour une trajectoire en haut sur l'axe y, $\Delta m = 0.816kg$

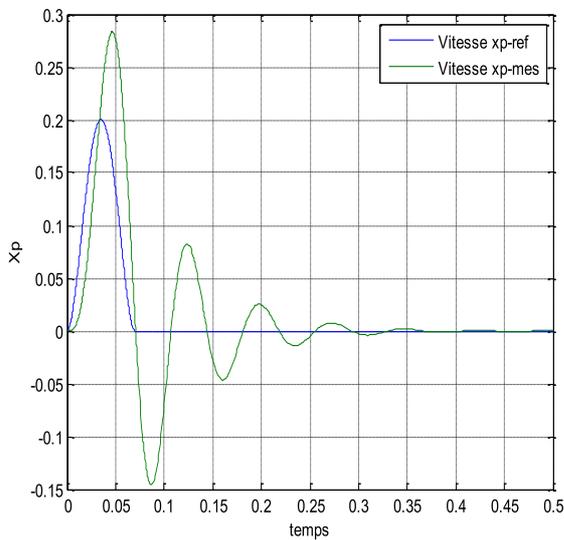


Figure 3.18 Réponse de vitesse pour une trajectoire en bas sur l'axe x, $\Delta m = 0.816kg$

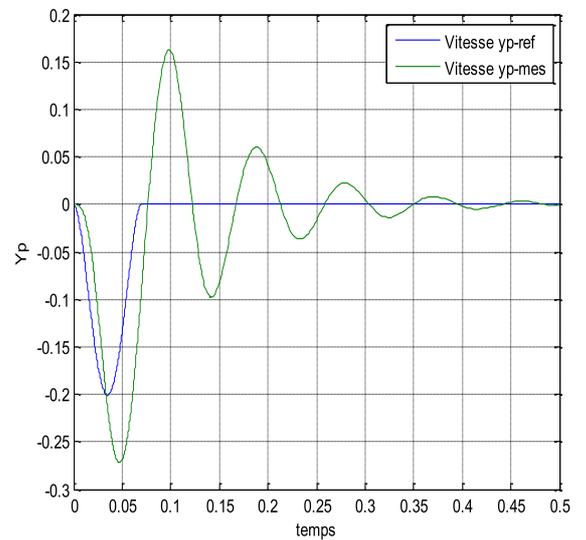


Figure 3.19 Réponse de vitesse pour une trajectoire en bas sur l'axe y, $\Delta m = 0.816kg$

CHAPITRE 3

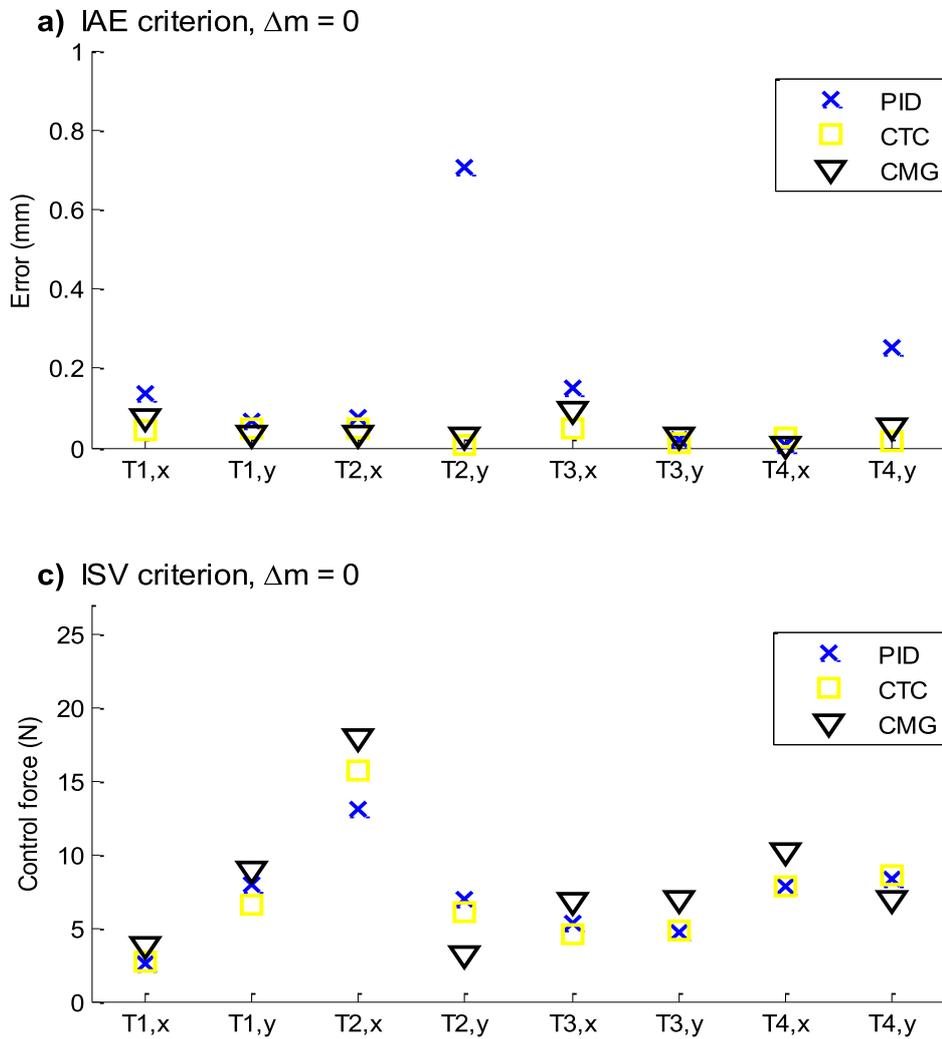


Figure 3.20 (a)-(c) Critères de performance (erreur de position et signal d'entrée de la commande) calculée pour tous les déplacements ($T1$ et $T4$) sur axes x et y , $\Delta m = 0kg$.

calculé montrent une bonne capacité de réponse, le PID présente un dépassement important. Dans le cas où, $\Delta m = 0.816kg$, le contrôleur par mode glissant présente de meilleurs résultats, avec quelques oscillations montrant sa robustesse vis à vis des incertitudes structurées (variation paramétrique) et non structurées (modèle Stribeck de frottement sec et modes de résonance). La commande du couple calculé (CTC) [92], comme prévu présente un comportement oscillatoire tandis que le PID, a une réponse instable.

Afin de quantifier le comportement de la commande par mode de glissant proposée, certains

CHAPITRE 3

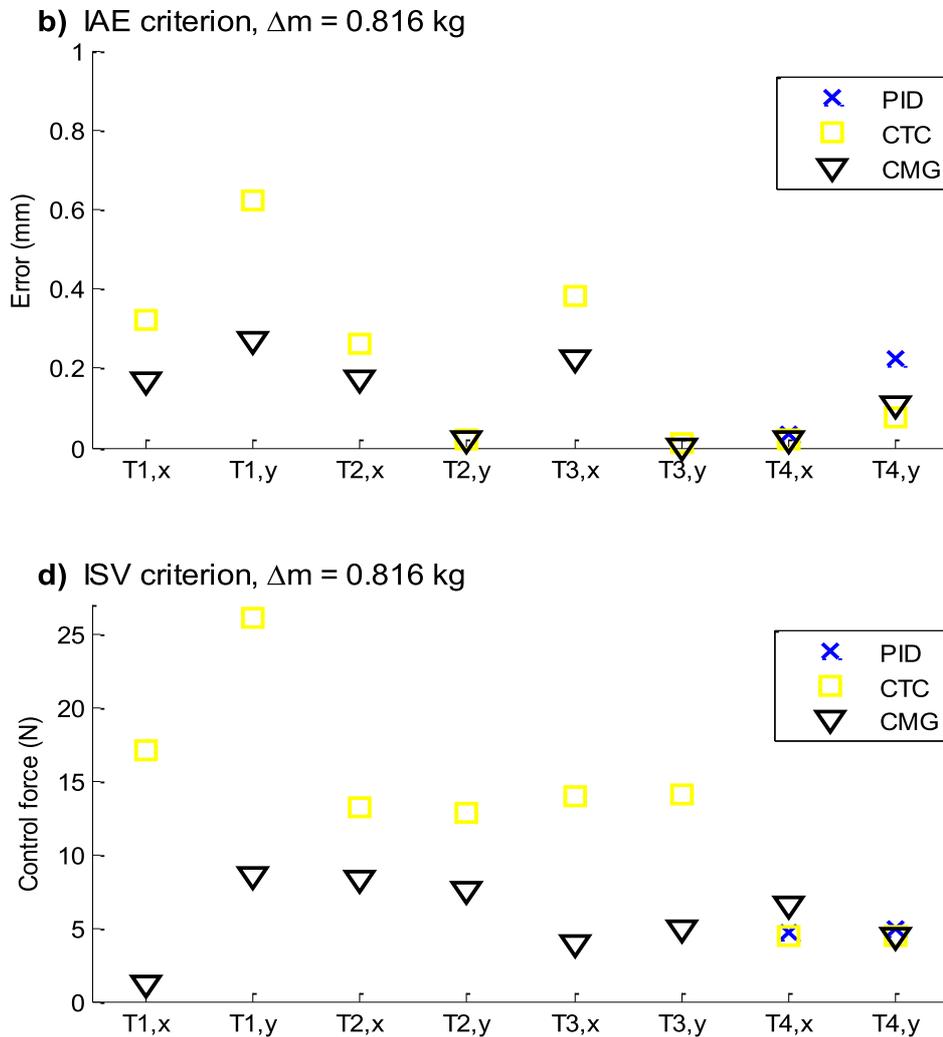


Figure 3.21 (b)-(d) Critères de performance (erreur de position et le signal d'entrée de la commande) calculée pour tous les déplacements ($T1$ et $T4$) sur axes x et y , $\Delta m = 0.816kg$.

critères bien connus sont calculés pour les quatre trajectoires $T1$, $T2$, $T3$ et $T4$ dans l'espace de travail. Les critères sont calculés pour un temps de simulation $T = 2s$ en utilisant le vecteur d'erreur, et le vecteur d'entrée de commande.

A partir de la Figure 3.20 et Figure 3.21 nous remarquons que pour toutes les trajectoires la commande par mode glissant montre une bonne réponse pour tout les déplacements ($T1$, $T2$, $T3$ et $T4$). Les résultats confirment les observations précédentes. Avec la variation de la masse de l'effecteur, la commande par mode de glissant est plus robuste par rapport à la

CHAPITRE 3

commande CTC et PID.

3.5 Application de la commande par mode glissant sur la plat-forme de Gough-Stewart

3.5.1 Conception de la loi de commande

Pour appliquer la commande par mode glissant sur la plate-forme de Gough-Stewart, nous commençons par choisir la surface de glissement correspondant aux six axes du robot. Ces fonctions ont été choisies comme suit :

$$S = \dot{e} + \lambda e \quad (3.53)$$

λ : représente une matrice diagonal (6×6) des constantes positives.

La grandeur que l'on souhaite principalement contrôler est la position de la plat-forme mobile dans l'espace Cartésien, c-a-d le problème de contrôle est de trouver une loi de commande telle que étant donnée une trajectoire désirée P_{des} , l'erreur de suivi e_i doit d'aller vers zéro asymptotiquement.

L'expression de l'erreur est donnée par :

$$e_i = P_{mes} - P_{des}, i = (1, 2, \dots, 6), \quad (3.54)$$

avec :

$P_{mes} = [x_{mes}, y_{mes}, z_{mes}, \alpha_{mes}, \beta_{mes}, \gamma_{mes}]^T$ représente le vecteur de position mesuré de la plate-forme mobile.

$P_{des} = [x_{des}, y_{des}, z_{des}, \alpha_{des}, \beta_{des}, \gamma_{des}]^T$ représente le vecteur de position désiré de la plate-forme mobile.

La fonction de lyapunov candidate est choisie sous la forme :

$$V = \frac{1}{2} S^T S \quad (3.55)$$

La condition de la stabilité du critère de Lyapunov est obtenue par dérivation :

$$\dot{V} = S^T \dot{S} \quad (3.56)$$

CHAPITRE 3

telle que l'expression de \dot{S} est sous la forme suivante :

$$\dot{S} = \lambda \dot{e} + \ddot{P}_{mes} - \ddot{P}_{des} \quad (3.57)$$

avec

$$\ddot{P}_{mes} = M(P)^{-1}[J^T \Gamma - C(P, \dot{P})\dot{P} - G(P)] \quad (3.58)$$

J^T représente la matrice jacobienne transposée.

l'équation (3.58) représente l'expression du modèle dynamique direct dans l'espace opérationnel.

$\ddot{P}_{mes} = [\ddot{x}_{mes}, \ddot{y}_{mes}, \ddot{z}_{mes}, \ddot{\alpha}_{mes}, \ddot{\beta}_{mes}, \ddot{\gamma}_{mes}]^T$ représente le vecteur d'accélération de la plateforme mobile.

En remplaçant l'équation du modèle dynamique (3.58) dans l'équation de la surface de commutation, la dérivée de la surface devient alors :

$$\dot{S} = \lambda \dot{e} - \ddot{P}_{des} + M(P)^{-1}[J^T \Gamma - C(P, \dot{P})\dot{P} - G(P)] \quad (3.59)$$

A partir de l'équation (3.59) nous pouvons écrire l'équation sous la forme suivante :

$$\dot{V} = S^T[\lambda \dot{e} - \ddot{P}_{des} + M(P)^{-1}[J^T \Gamma - C(P, \dot{P})\dot{P} - G(P)]] \quad (3.60)$$

Si la condition $S \cdot \dot{S} < 0, \forall t$ est vérifiée, alors la fonction de glissement et sa dérivée sont de signe contraire quel que soit le temps. Ceci implique donc que 0 est un centre attracteur pour S , ce qui veut dire que la vérification de la condition $S \cdot \dot{S} < 0, \forall t$ implique que S convergera vers 0.

Le temps de convergence, ou le temps d'atteinte (« Reaching time ») t_r dépend directement du choix de S . D'une autre perspective, la condition $S \cdot \dot{S} < 0, \forall t$ assure que la fonction de Lyapunov $\dot{V} = S^T \dot{S}$ admet une dérivée temporelle strictement négative, ce qui implique que S convergera vers 0. Généralement, pour que la condition $S \cdot \dot{S} < 0, \forall t$ soit vérifiée en tout temps, S est usuellement choisie comme suit :

$$\dot{S} = -K \cdot \text{sign}(S), \forall t \quad (3.61)$$

Où $K \in R^{6 \times 1}$ représente la matrice diagonale des gains positifs.

CHAPITRE 3

Il suffit maintenant de choisir la loi de commande pour que la loi de convergence (3.5) soit vérifiée. Pour cela, il faudra exprimer \dot{S} en fonction de la commande Γ . Or :

$$-K \cdot \text{sign}(S) = \lambda \dot{e} - \ddot{P}_{des} + M(P)^{-1}[J^T \Gamma - C(P, \dot{P})\dot{P} - G(P)] \quad (3.62)$$

Finalement la commande est écrite sous la forme suivante :

$$\Gamma = \hat{\Gamma} - MK \text{sign}(S) \quad (3.63)$$

$\Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6]^T$ représente le vecteur de commande d'entrée. Tel que

• $\hat{\Gamma} = J^{-T} \left[M(P) \left(\ddot{P}_{des} - \lambda \dot{e} \right) + C(P, \dot{P})\dot{P} + G(P) \right]$ représente l'expression de la commande équivalente.

• $-J^{-T}MK \text{sign}(S)$ représente l'expression de la commande discontinue.

On pose :

$$\Gamma = \hat{\Gamma} - J^{-T}Mksat(S) \quad (3.64)$$

Pour vérifier la condition de stabilité du système, le gain K doit être positive.

3.5.2 Résultats de simulation

Pour illustrer l'efficacité du contrôleur proposé, une simulation sous environnement Matlab, de cette loi de commande est présentée, Figure 3.22 avec et sans perturbation.

On se donne une trajectoire cartésienne pour une translation de :

$$\begin{bmatrix} 0.3 \cos(w * t) \\ 0.3 \sin(w * t) \\ 0.2 + 0.55 \sin(w * t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La position nominal sélectionnée au cours de la simulation est $P = [0, 0, 0.55, 0, 0, 0]^T$ [m] (voir Figure 3.23).

CHAPITRE 3

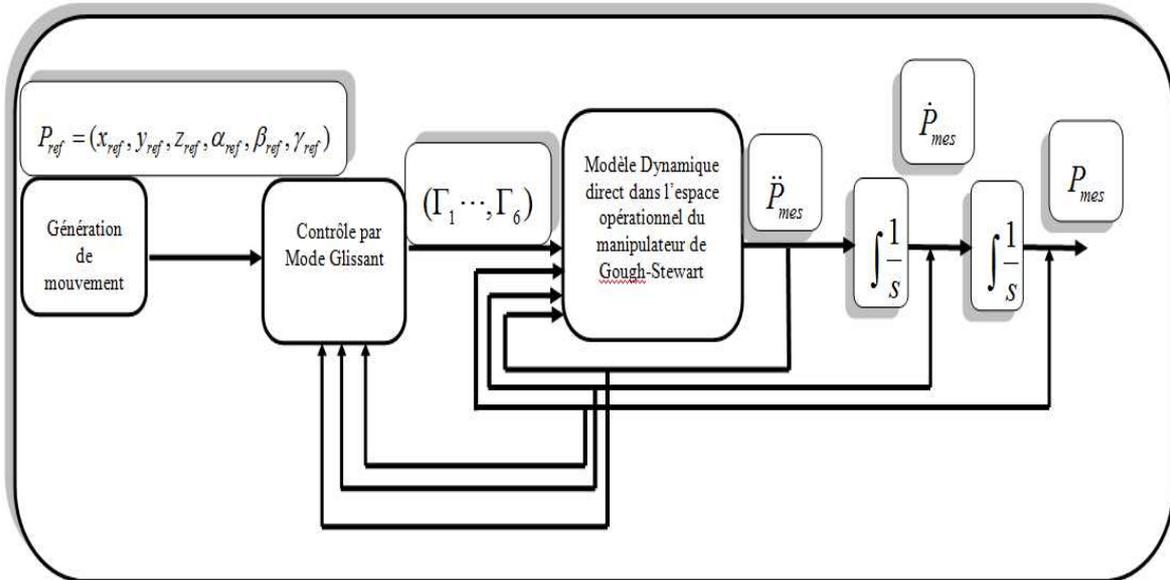


Figure 3.22 Schéma bloc de la commande par mode glissant appliquée au manipulateur de Gough-Stewart .

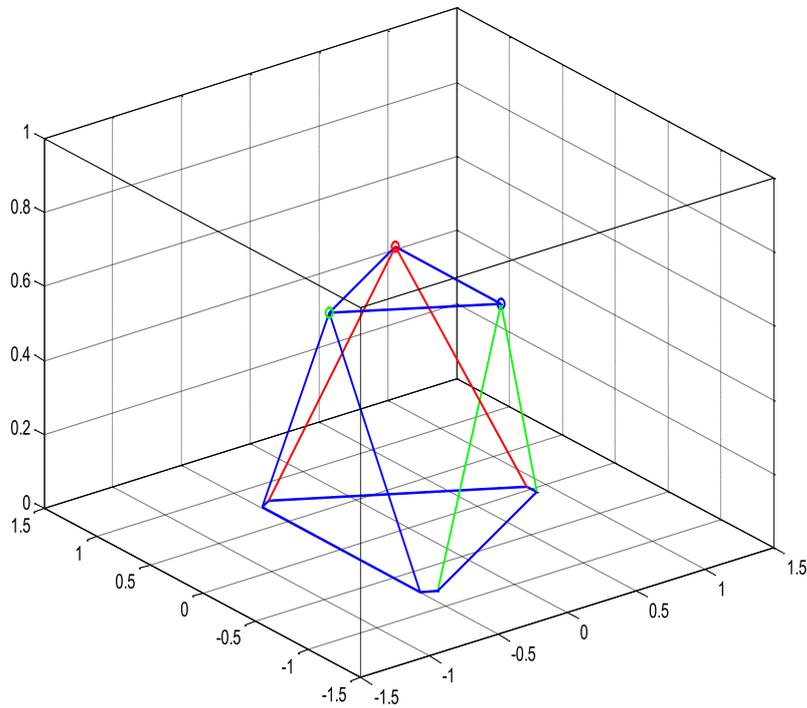


Figure 3.23 Position initiale de la plat-forme de Gough-Stewart

CHAPITRE 3

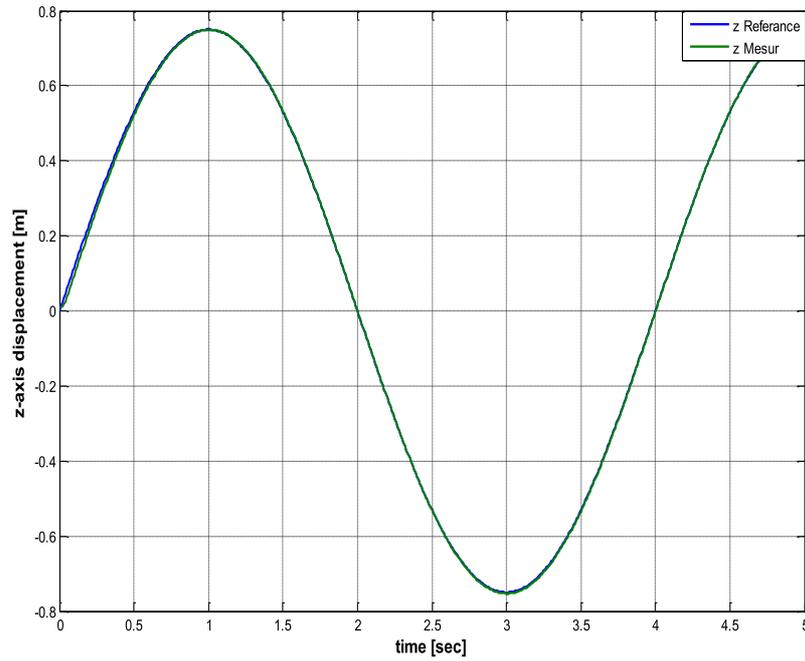


Figure 3.24 Réponse avec une translation de la plat-forme mobile selon l'axe Z

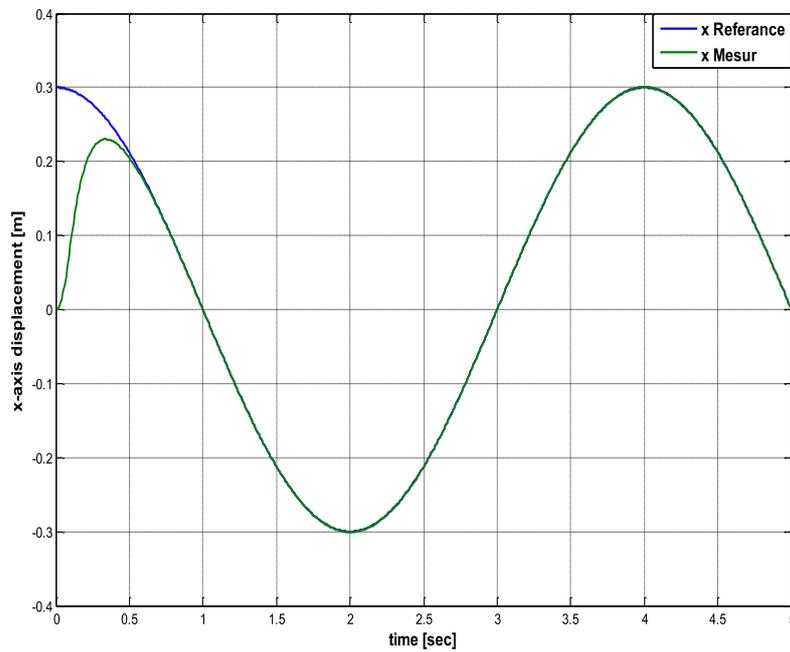


Figure 3.25 Réponse avec une translation de la plat-forme mobile selon l'axe X

CHAPITRE 3

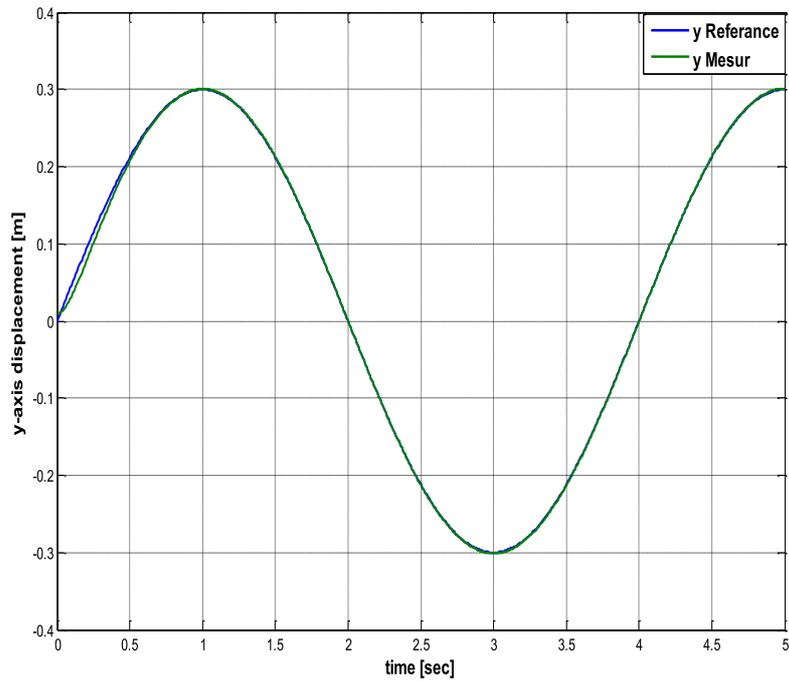


Figure 3.26 Réponse avec une translation de la plat-forme mobile selon l'axe Y

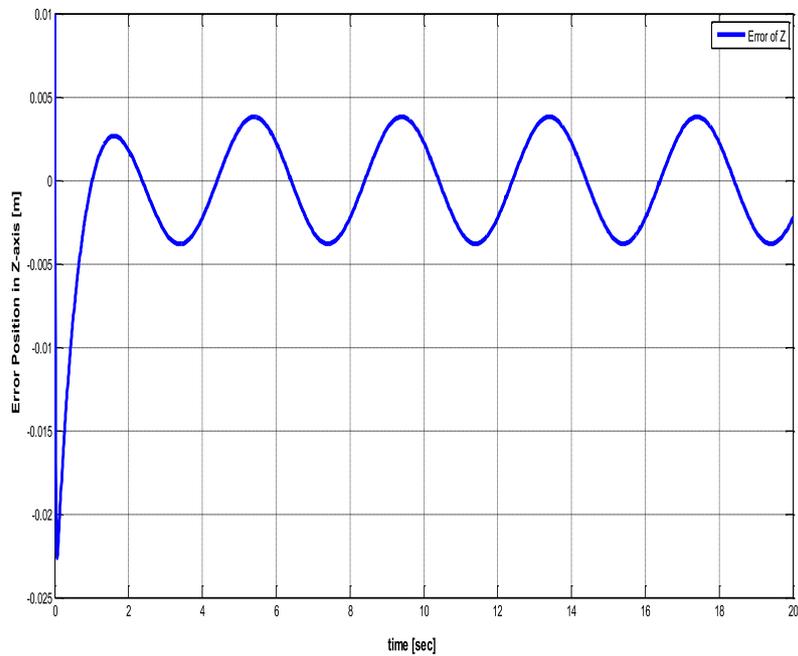


Figure 3.27 Erreur de position de la plat-forme mobile selon l'axe Z

CHAPITRE 3

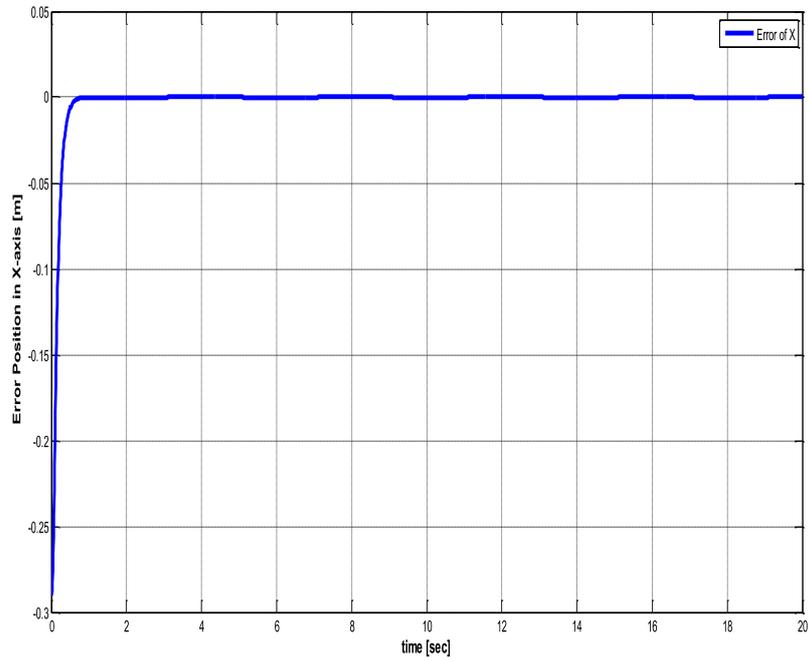


Figure 3.28 Erreur de position de la plat-forme mobile selon l'axe X

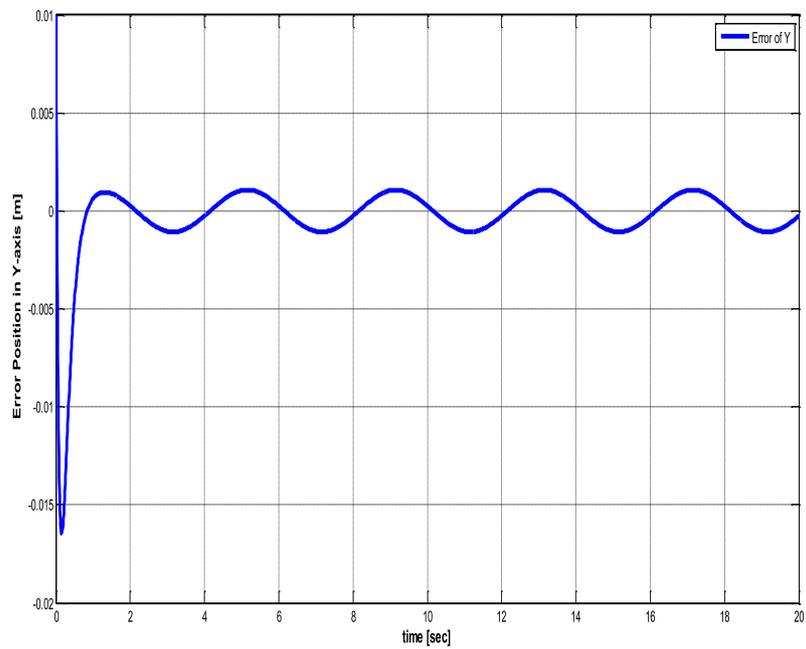


Figure 3.29 Erreur de position de la plat-forme mobile selon l'axe Y

CHAPITRE 3

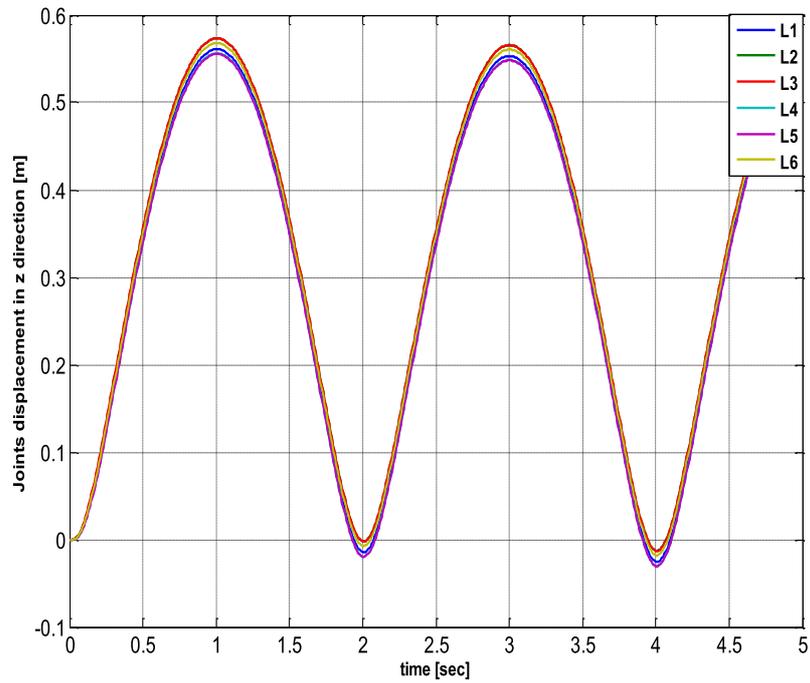


Figure 3.30 Position des actionneurs avec une translation selon l'axe Z

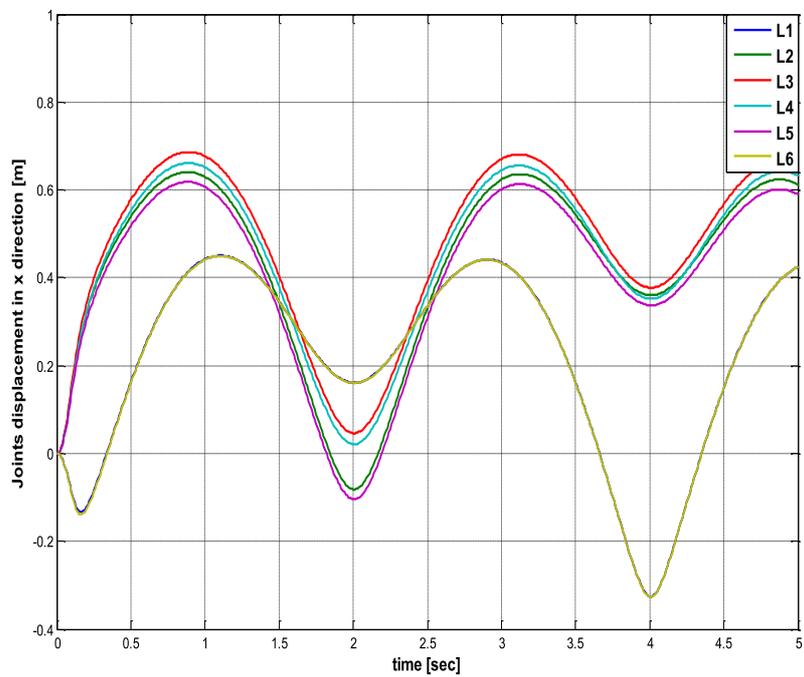


Figure 3.31 Position des actionneurs avec une translation selon l'axe X

CHAPITRE 3

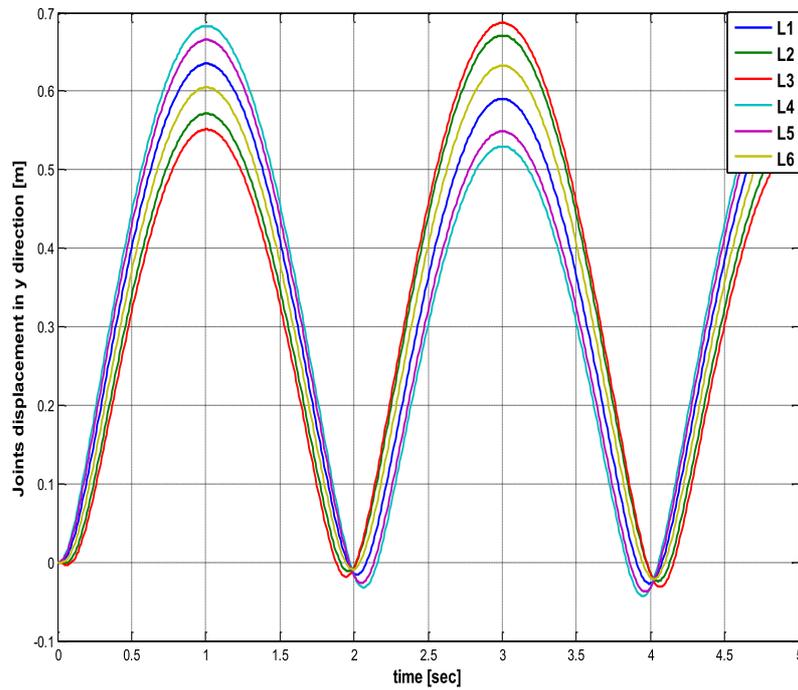


Figure 3.32 Position des actionneurs avec une translation selon l'axe Y

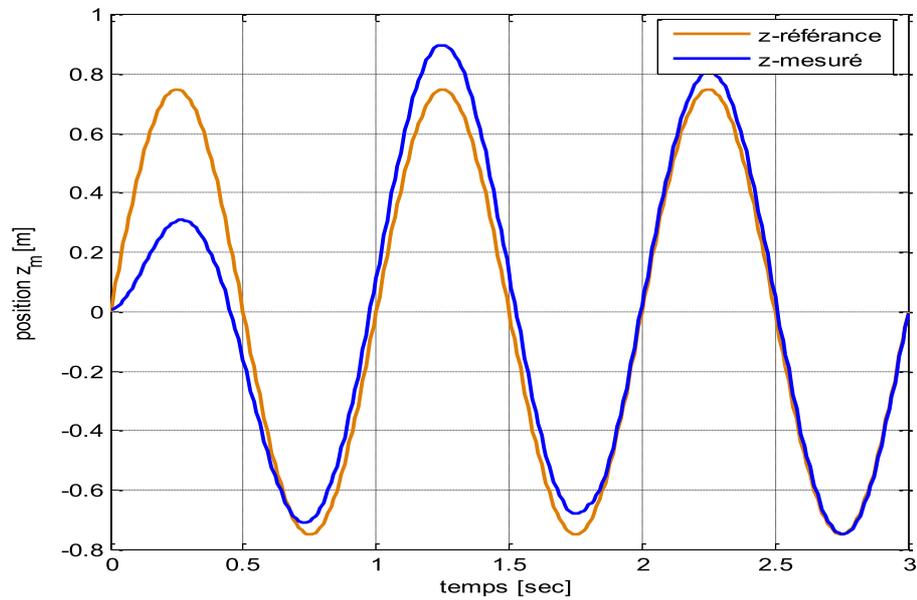


Figure 3.33 Réponse avec une translation de la plat-forme mobile selon l'axe Z avec perturbation

CHAPITRE 3

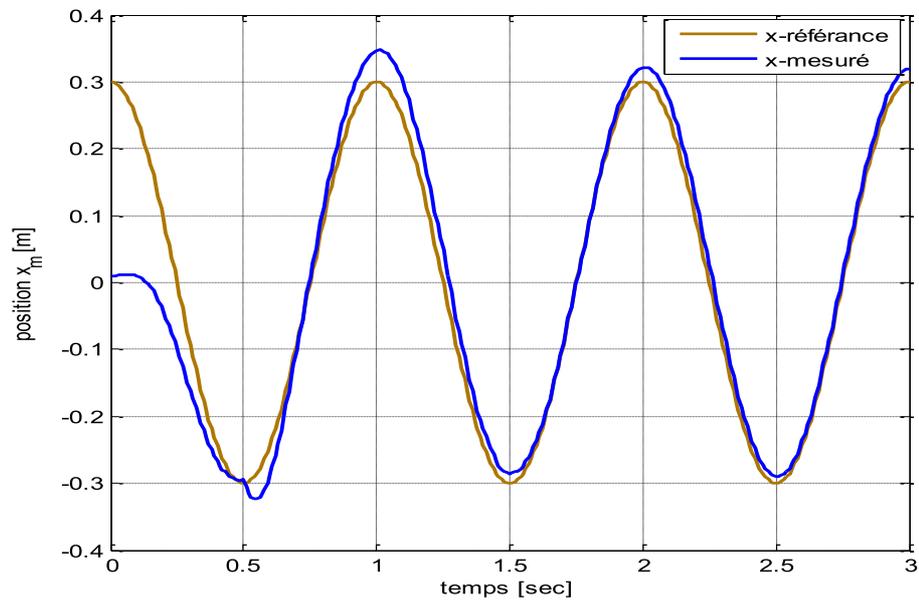


Figure 3.34 Réponse avec une translation de la plat-forme mobile selon l'axe X avec perturbation

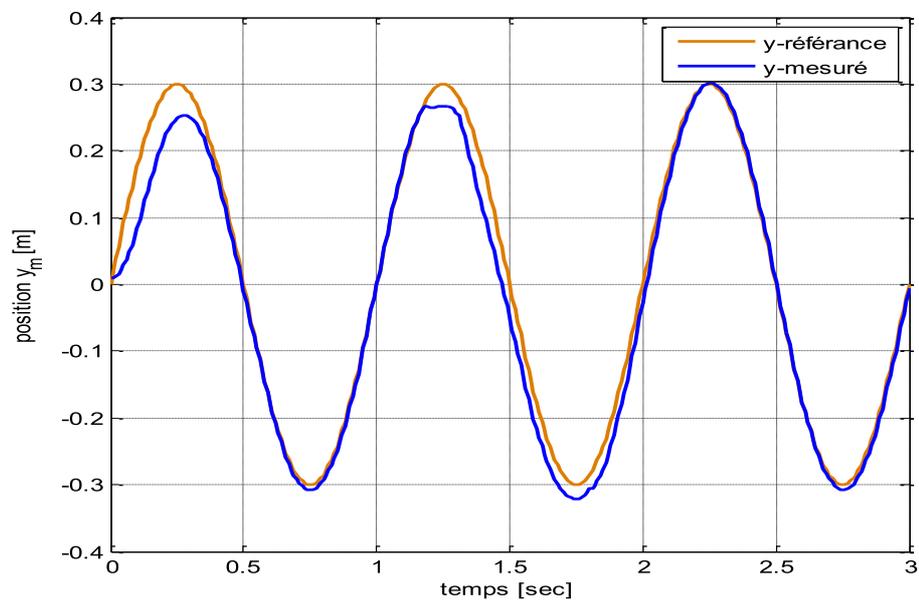


Figure 3.35 Réponse avec une translation de la plat-forme mobile selon l'axe Y avec perturbation

CHAPITRE 3

3.5.3 Discussion des résultats obtenus

Nous avons fait les tests de simulations avec la même loi de commande par mode glissant sur la plate-forme de Gough-Stewart, les résultats obtenus sont donnés par les figures Figure 3.24, Figure 3.25 et Figure 3.26. Nous constatons qu'à chaque fois, la sortie rejoint bien sa référence.

La Figure 3.30 illustre le bon déplacement des articulations prismatiques actives selon l'axe Z ce qui donne une bonne position de l'effecteur dans cette direction illustrée par la Figure 3.24.

La Figure 3.31 illustre une variation dans le déplacement des articulations prismatiques actives selon l'axe X qui correspond d'une variation de l'effecteur dans cette direction illustrée par la Figure 3.25.

La Figure 3.32 montre une variation dans le déplacement des articulations prismatiques actives selon l'axe Y qui correspond un bon déplacement de l'effecteur dans cette direction illustrée par la Figure 3.26.

Les Figure 3.28, Figure 3.29 et Figure 3.27 montrent que l'erreur suivant les trois directions convergent vers zéro. Cela prouve que la plate-forme de Gough-Stewart suit la trajectoire souhaitée avec des erreurs de très faibles valeurs.

Les Figure 4.25, Figure 4.29 et Figure 4.27 montrent le déplacement. montrent le déplacement de plate-forme mobile ce qui provoque une présence de quelque variations dans la réponse du système dues à la perturbation.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la commande par mode glissant des manipulateurs parallèles dans l'espace de la tâche. Notre objectif a été de montrer, d'une part, le fondement théorique de cette méthode dans l'espace d'état, et d'autre part, de développer et appliquer cette technique de commande sur le modèle dynamique non linéaire multi variables des manipulateurs parallèles (robot parallèle plan a deux degrés de liberté de type Biglide et la plate-forme de Gough-Stewart).

Dans le cas de robot Biglide, nous avons montré la robustesse de cette loi de commande

CHAPITRE 3

par rapport à des incertitudes paramétriques ce qui provoque une présence de quelques oscillations dans la réponse du système dues à la variation de la masse de l'organe terminal et à la dynamique non modélisée comme le coefficient de friction Stricbeck et le coefficient de friction Coulomb.

La fin de ce chapitre présente l'étude des simulations de la commande par mode glissant avec et sans perturbation appliquée aux manipulateur parallèle de Gough-Stewart . Les résultats obtenus de la simulation sans perturbation ont montré l'efficacité de l'algorithme de commande et la validité de l'aspect théorique proposé. dans le cas où la perturbation est appliquée à la commande, les résultats obtenus présentent quelques variations dues à la perturbation non corrigé par le contrôleur. L'application présentée confirme l'apport technique de la loi de commande.

Pour diminuer l'effet de la perturbation et réduire d'avantage ces oscillations, nous avons proposé d'autre type de loi de commande robuste non linéaire, la commande Backstepping que nous allons étudier dans le chapitre suivant sur les deux manipulateurs parallèle.

Quatrième partie

LA COMMANDE BACKSTEPPING

CHAPITRE 4

Commande backstepping appliquée aux Robots parallèles

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, une loi de commande non linéaires basées sur la théorie de la commande de backstepping est développée pour améliorer les résultats celles obtenus dans le chapitre précédent . les principaux avantages de ce type de commande sont la simplicité de mise en œuvre pour certaines formes de systèmes non linéaires et la robustesse par rapport à les incertitudes paramétrique et de perturbations.

4.1.1 Idée Générale de la commande backstepping

L'idée consiste à calculer une loi de commande afin de garantir que la dérivée d'une certaine fonction (de Lyapunov) définie positive, soit toujours négative. Pour cela, le système est décomposé en un ensemble de sous systèmes imbriqués. Le calcul de la fonction de Lyapunov s'effectue, ensuite, récursivement en partant de l'intérieur de la boucle. A chaque étape, l'ordre du système est augmenté et la partie non stabilisée lors de l'étape précédente est traitée. La loi de commande à appliquer est synthétisée à la dernière étape. Elle doit garantir, à chaque instant, la stabilité globale du système compensé tout en travaillant en poursuite ou en régulation.

Contrairement aux autres méthodes, le backstepping n'a aucune contrainte au niveau du type de non linéarités. Cependant, le système doit se présenter sous la forme dite paramétrique pure dont les équations sont données sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + b_1(x_1)x_1 + \delta_1(x_1, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + b_2(x_1, x_2)x_3 + \delta_2(x_1, x_2, t) \\ \vdots \\ \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_i) + b_i(x_1, \dots, x_i)x_{i+1} + \delta_i(x_1, \dots, x_i, t); i = 3, \dots, n - 1 \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) + b_n(x_1, \dots, x_n)u + \delta_n(x_1, \dots, x_n, t) \\ y = x_1 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Ou $x_i, i = 1, \dots, n$ sont les états du système, u et y sont respectivement l'entrée et la sortie

CHAPITRE 4

du système. $f_i(\cdot)$ et $b_i(\cdot)$ sont des fonctions non linéaires, $\delta_i(\cdot)$ étant le terme de perturbations inconnues dues aux variations des paramètres du modèle et aux perturbations externes, tel que : $\|\delta_i(\cdot)\| \leq d_i, d_i > 0, \forall_i = 1, \dots, n$.

Le principe de la commande backstepping est donné par la Figure 4.1. Tout d'abord, nous calculons la première commande virtuelle à partir de l'erreur de poursuite $e_1 = y_{ref} - y$, qui va être utilisée au second étage comme signal de référence pour l'état suivant. Nous répéterons l'opération jusqu'à arriver au n^{ime} étage qui nous permet de générer la commande qui va être appliquée au système.

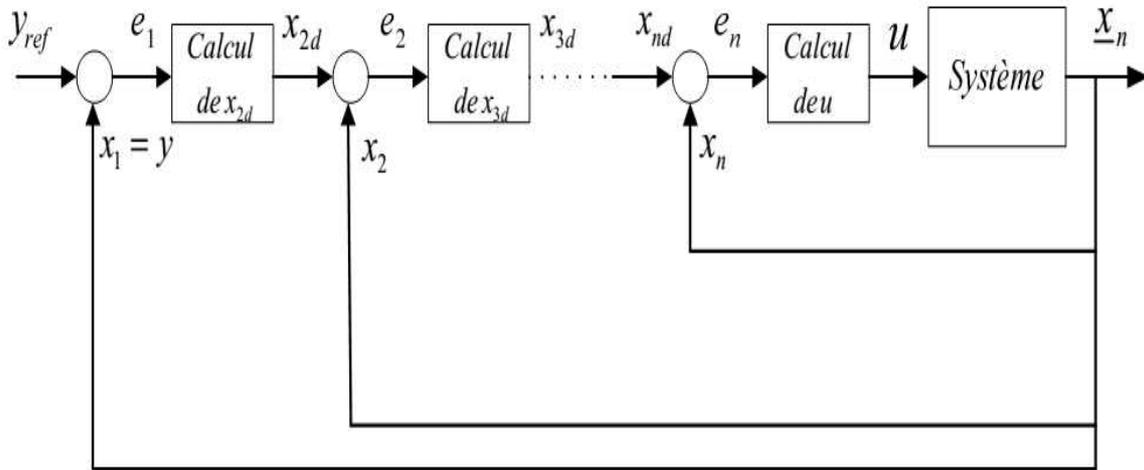


Figure 4.1 Schéma illustratif de la commande backstepping

4.1.2 Conception de la loi de commande

La méthode du backstepping permet de construire une loi de commande qui garantie en tout temps, la stabilité du produit procédé et contrôleur. L'écriture des états sous forme paramétrique pur met en évidence le sous-système du procédé. Pour chacune de ses parties, il faut trouver à l'aide d'une fonction de Lyapunov, une commande qui permet de stabiliser le sous-système. Pour ce faire, l'état précédent est considéré comme une variable manipulable. L'ordre du sous-système est ensuite augmenté et le développement précédent recommencer. A la fin, une loi de commande est obtenue pour le système. Voici en quelques étapes comment il faut procéder.

CHAPITRE 4

– 1^{re} étape :

Il faut que le système puisse suivre une trajectoire donnée. Cela correspond à faire la conception d'un contrôleur de poursuite, en plus de celui de la régulation.

Une trajectoire de référence y_{ref} (Figure 4.1), est donc posée. De cette spécification, une erreur en poursuite est engendrée :

$$e_1 = y_{ref} - x_1 \quad (4.2)$$

et sa dérivée s'écrit :

$$\dot{e}_1 = \dot{y}_{ref} - \dot{x}_1 \quad (4.3)$$

avec $\dot{x}_1 = x_2$

$$\dot{e}_1 = \dot{y}_{ref} - x_2 \quad (4.4)$$

La fonction candidate de Lyapunov est donnée par :

$$v_1 = \frac{1}{2}e_1^2 \quad (4.5)$$

la fonction v_1 est une fonction de Lyapunov qui représente, en quelque sorte, l'énergie de l'erreur. Or si cette fonction est toujours positive et que sa dérivée est toujours négative, alors l'erreur va être stable et tendre vers zéro. La dérivée de la fonction s'écrit comme suit :

$$\dot{v}_1 = e_1\dot{e}_1 \quad (4.6)$$

$$\dot{v}_1 = e_1(\dot{y}_{ref} - x_2) \quad (4.7)$$

Afin que la dérivée de la fonction du Lyapunov soit toujours négative, il faut que la dérivée de v_1 prenne la forme $\dot{v}_1 = -\alpha_1 e_1^2$, où α_1 est un paramètre de conception positif, introduit par la méthode du backstepping qui doit toujours être positive et non nul afin de respecter les critères de stabilité de la fonction de Lyapunov. De plus, ce paramètre permet d'agir sur la dynamique de régulation celui-ci relié à la perte d'énergie du système. Pour satisfaire les conditions mentionnées ci-haut, il faut que :

$$\dot{y}_{ref} - x_2 = -\alpha_1 e_1 \quad (4.8)$$

d'où

$$x_2 = \dot{y}_{ref} + \alpha_1 e_1 \quad (4.9)$$

L'équation précédente indique la valeur que doit prendre l'état x_2 pour que la fonction de Lyapunov soit stable. Cependant, il est impossible d'agir directement sur l'état x_2 .

CHAPITRE 4

La notion x_{2d} (Figure 4.1) sera donc utilisée pour indiquer la valeur souhaitée (déterminée) de l'état.

Voici la valeur souhaitée obtenue de l'état et de sa dérivée.

$$x_{2d} = \dot{y}_{ref} + \alpha_1 e_1 \quad (4.10)$$

$$\dot{x}_{2d} = \ddot{y}_{ref} + \alpha_1 \dot{e}_1 \quad (4.11)$$

– 2^{me} étape :

Malheureusement, il n'est pas possible d'agir directement sur l'état x_2 , il est donc peu probable que cet état suit exactement cette trajectoire, c'est pourquoi un autre terme d'erreur est introduit :

$$e_2 = x_{2d} - x_2 \quad (4.12)$$

$$e_2 = \dot{y}_{ref} + \alpha_1 e_1 - x_2 \quad (4.13)$$

$$e_2 = \dot{y}_{ref} - \dot{x}_1 + \alpha_1 e_1 \quad (4.14)$$

$$e_2 = \dot{e}_1 + \alpha_1 e_1 \quad (4.15)$$

$$\dot{e}_1 = e_2 - \alpha_1 e_1 \quad (4.16)$$

et sa dérivée

$$\dot{e}_2 = \ddot{y}_{ref} + \alpha_1 \dot{e}_1 - \dot{x}_2 \quad (4.17)$$

$$\dot{e}_2 = \ddot{y}_{ref} + \alpha_1 e_2 - \alpha_1^2 e_1 - f x_1 - bu \quad (4.18)$$

la fonction de Lyapunov, cette fois-ci est augmentée d'un autre terme qui vient prendre en considération l'erreur possible sur l'état x_2 . Voici la nouvelle fonction candidate.

$$v_2 = \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} e_2^2 \quad (4.19)$$

en effectuant la dérivée de cette fonction et en utilisant (4.16) et (4.18), la relation suivante est trouvée :

$$\dot{v}_2 = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 \quad (4.20)$$

$$\dot{v}_2 = e_1 (e_2 - \alpha_1 e_1) + e_2 (\ddot{y}_{ref} + \alpha_1 e_2 - \alpha_1^2 e_1 - f x_1 - bu) \quad (4.21)$$

Pour que les critères de Lyapunov soient respectés, il faut que

$$\dot{v}_2 = -\alpha_1 e_1^2 - \alpha_2 e_2^2 \quad (4.22)$$

CHAPITRE 4

De cette façon la fonction v_1 respecterait en tous points les critères de Lyapunov. La loi de commande déduite fait en sorte que v_2 soit toujours positif et que \dot{v}_2 soit toujours négatif, peu importe les valeurs que peuvent prendre les états. Après le calcul, on trouve la commande u comme suite :

$$u = b^{-1} (\alpha_1 (1 - \alpha_1^2) + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + f x_1 + \ddot{y}_{ref}) \quad (4.23)$$

4.2 Application de la commande backstepping au robot parallèle Biglide

Rappelons que les équations dynamiques inverse du robot parallèle Biglide sont données par :

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_a + \frac{1}{2}(m - \lambda_1 + \lambda_2) & f_1(P) \\ m_a + \frac{1}{2}(m - \lambda_2 + \lambda_1) & f_2(P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (gC(y)(m + \lambda_1 + \lambda_2))/2y \\ (-gC(y)(m + \lambda_1 + \lambda_2))/2y \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Le modèle dynamique directe du robot Biglide dans l'espace cartésien s'écrit sous la forme suivante :

$$\ddot{P} = M^{-1}(P)[\Gamma - N(P, \dot{P})\dot{P}] \quad (4.25)$$

Pour appliquer la méthode Backstepping, la représentation d'état du modèle est donné par :

$$\dot{x}_2 = \ddot{P} = M^{-1}(P)[\Gamma - N(P, \dot{P})\dot{P}] \quad (4.26)$$

telque :

$$\dot{x}_1 = x_2 = \dot{P}$$

– 1^{re} étape :

Nous avons comme trajectoires de référence $P = [x \ y]^T$ à faire poursuivre par le procédé. Cela va engendrer une erreur en poursuite :

$$e_1 = x_{1d} - x_1 \quad (4.27)$$

La dérivée par rapport au temps s'écrit sous la forme,

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_{1d} - \dot{x}_1 \quad (4.28)$$

CHAPITRE 4

La fonction candidate de Lyapunov est donnée par :

$$v_1 = \frac{1}{2}e_1^2 \quad (4.29)$$

La fonction v_1 est une fonction de Lyapunov qui représente l'énergie de l'erreur. Or, si cette fonction est toujours définie positive et que sa dérivée est toujours négative, alors l'erreur va être stable et tend vers zéro. La dérivée de la fonction s'écrit comme suit :

$$\dot{v}_1 = e_1\dot{e}_1 \quad (4.30)$$

$$\dot{v}_1 = e_1(\dot{x}_{1d} - \dot{x}_2) \quad (4.31)$$

et

$$\dot{v}_1 = -\alpha_1 e_1^2 \quad (4.32)$$

avec α_1 est définie positive.

En utilisant (4.31) et (4.32) on obtient :

$$x_2 = \dot{x}_{1d} + \alpha_1 e_1 \quad (4.33)$$

C'est une commande virtuelle et cette commande va être utilisée comme une référence de trajectoire dans la 2^{me} étape $x_2 = x_{2d}$

– 2^{me} étape :

$$e_2 = x_{2d} - x_2 \quad (4.34)$$

$$e_2 = \dot{x}_{1d} + \alpha_1 e_1 - \dot{x}_2 \quad (4.35)$$

$$e_2 = \dot{x}_{1d} - \dot{x}_1 + \alpha_1 e_1 \quad (4.36)$$

$$e_2 = \dot{e}_1 + \alpha_1 e_1 \quad (4.37)$$

$$\dot{e}_1 = e_2 - \alpha_1 e_1 \quad (4.38)$$

$$\dot{e}_2 = \alpha_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} - \ddot{x}_2 \quad (4.39)$$

La fonction de Lyapunov, cette fois-ci, est augmentée d'un autre terme qui vient prendre en considération l'erreur possible sur l'état x_2 . Voici la nouvelle fonction candidate, représentée

CHAPITRE 4

par l'équation (4.40)

$$v_2 = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 \quad (4.40)$$

En dérivant cette fonction et en substituant les dynamiques d'erreur (4.38) et (4.39), la relation suivante est trouvée :

$$\dot{v}_2 = e_1(e_2 - \alpha_1 e_1) + e_2(\alpha_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} - \dot{x}_2) \quad (4.41)$$

$$\dot{v}_2 = -\alpha_1 e_1^2 + e_2(\alpha_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} - \dot{x}_2 + e_1) \quad (4.42)$$

Pour que le sous système soit stable il faut que $\dot{v}_2 < 0$ d'après l'équation (4.42) il faut que : $(\alpha_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} - \dot{x}_2 + e_1)$ soit égale a $(-\alpha_2 e_2)$ et on trouve :

$$\dot{v}_2 = -\alpha_1 e_1^2 - \alpha_2 e_2^2 \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2 > 0.$$

Après calcul on trouve :

$$\dot{x}_2 = \alpha_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} + e_1 + \alpha_2 e_2 \quad (4.43)$$

D'après l'équation (4.26) on trouve :

$$M^{-1}(x_1) (\Gamma - N(x_1, x_2)x_2) = \alpha_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} + e_1 + \alpha_2 e_2 \quad (4.44)$$

la commande Γ est donnée par l'équation suivante :

$$\Gamma = N(x_1, x_2)x_2 + M(x_1)(\alpha_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} + e_1 + \alpha_2 e_2) \quad (4.45)$$

tel que :

$\Gamma = [\Gamma_1 \Gamma_2]^T$ est le vecteur de commande (signal d'entrée)

$x_1 = [x, y]^T$ est le vecteur de position.

$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{1x} & 0 \\ 0 & \alpha_{1y} \end{pmatrix}$ est une matrice positif qui représente les gains du contrôleur.

$\alpha_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{2x} & 0 \\ 0 & \alpha_{2y} \end{pmatrix}$ est une matrice positif qui représente les gains du contrôleur.

4.2.1 Résultats de simulation de la commande backstepping

la Figure 4.2 montre le schéma bloc de la commande backstepping du robot Biglide. Les résultats de la commande backstepping obtenus a travers les essais de la simulation sont présentés et comparés avec les résultats de la commande par mode glissant.

CHAPITRE 4

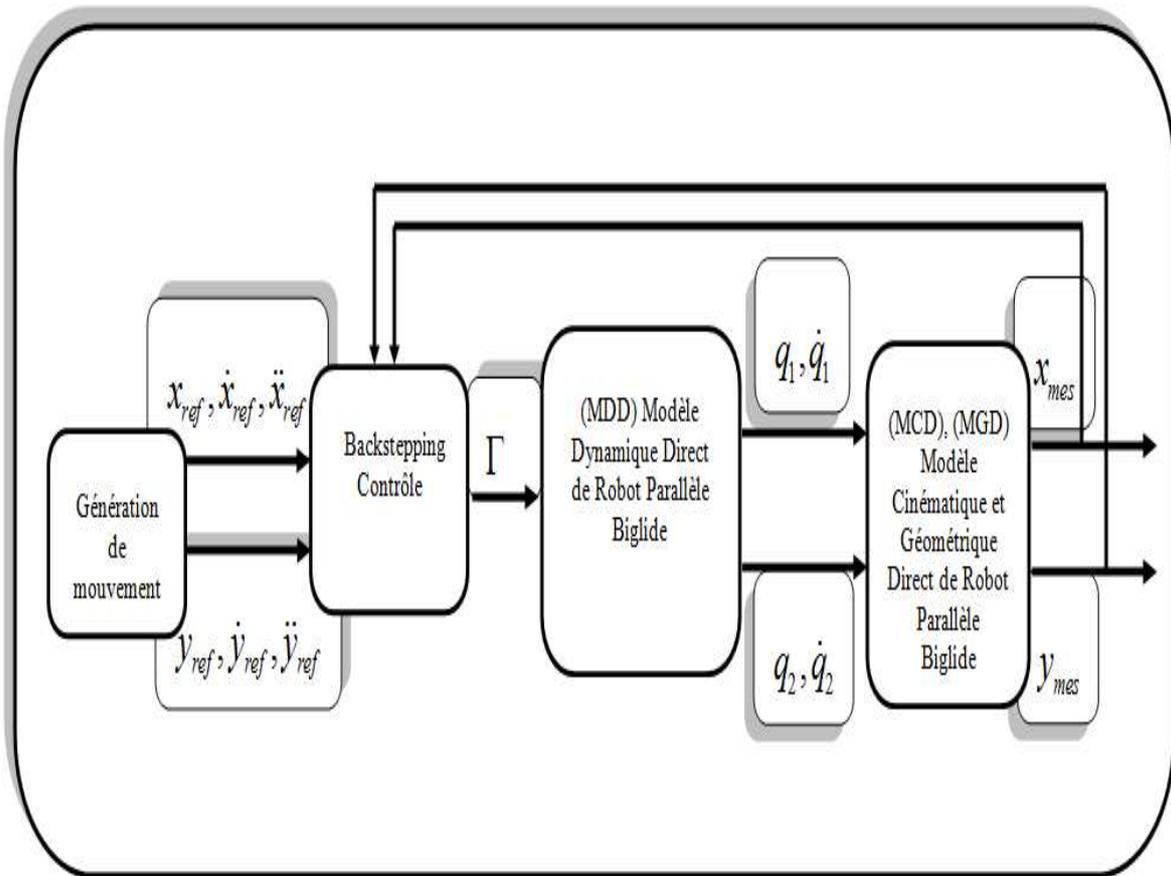


Figure 4.2 Schéma bloc de la commande backstepping appliquée au robot parallèle Biglide .

Nous nous intéressons dans cette partie, aux tests de la commande backstepping. Nous reprenons les mêmes tests effectués par le contrôleur mode glissant utilisé dans le chapitre précédent. Nous traitons dans cette partie une étude comparative entre deux contrôleurs robustes.

Dans le même contexte, nous testons numériquement la robustesse de commande retrouvée pour assurer le suivi de trajectoire face à des variations paramétriques dynamiques dues à l'influence de la masse de l'organe terminal du robot parallèle Biglide. Et la dynamique non modélisée comme le coefficient de friction Strickbeck et le coefficient de friction Coulomb qui apparaissent dans le modèle dynamique.

CHAPITRE 4

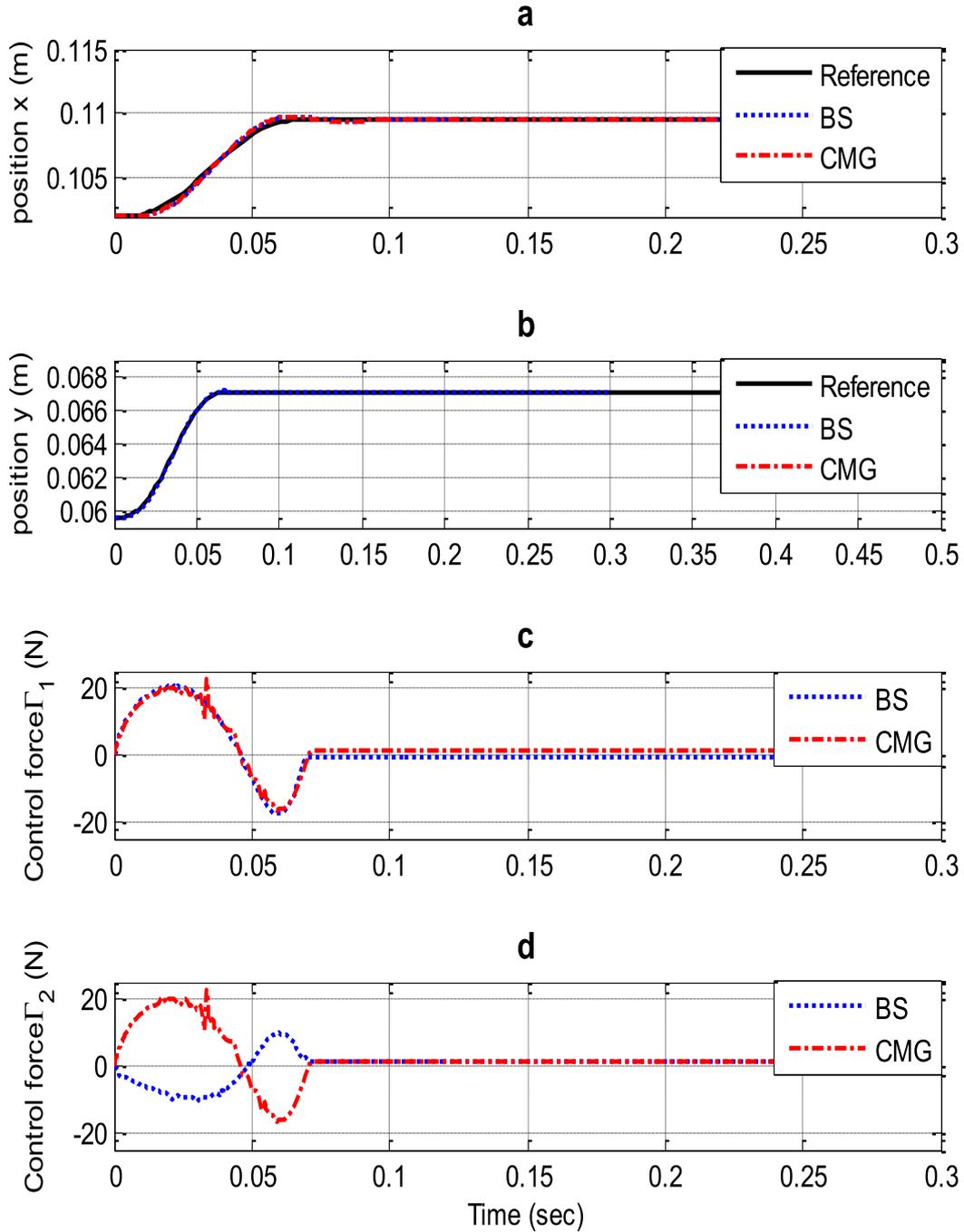


Figure 4.3 Réponse pour une trajectoire en haut avec $\Delta m = 0kg$

CHAPITRE 4

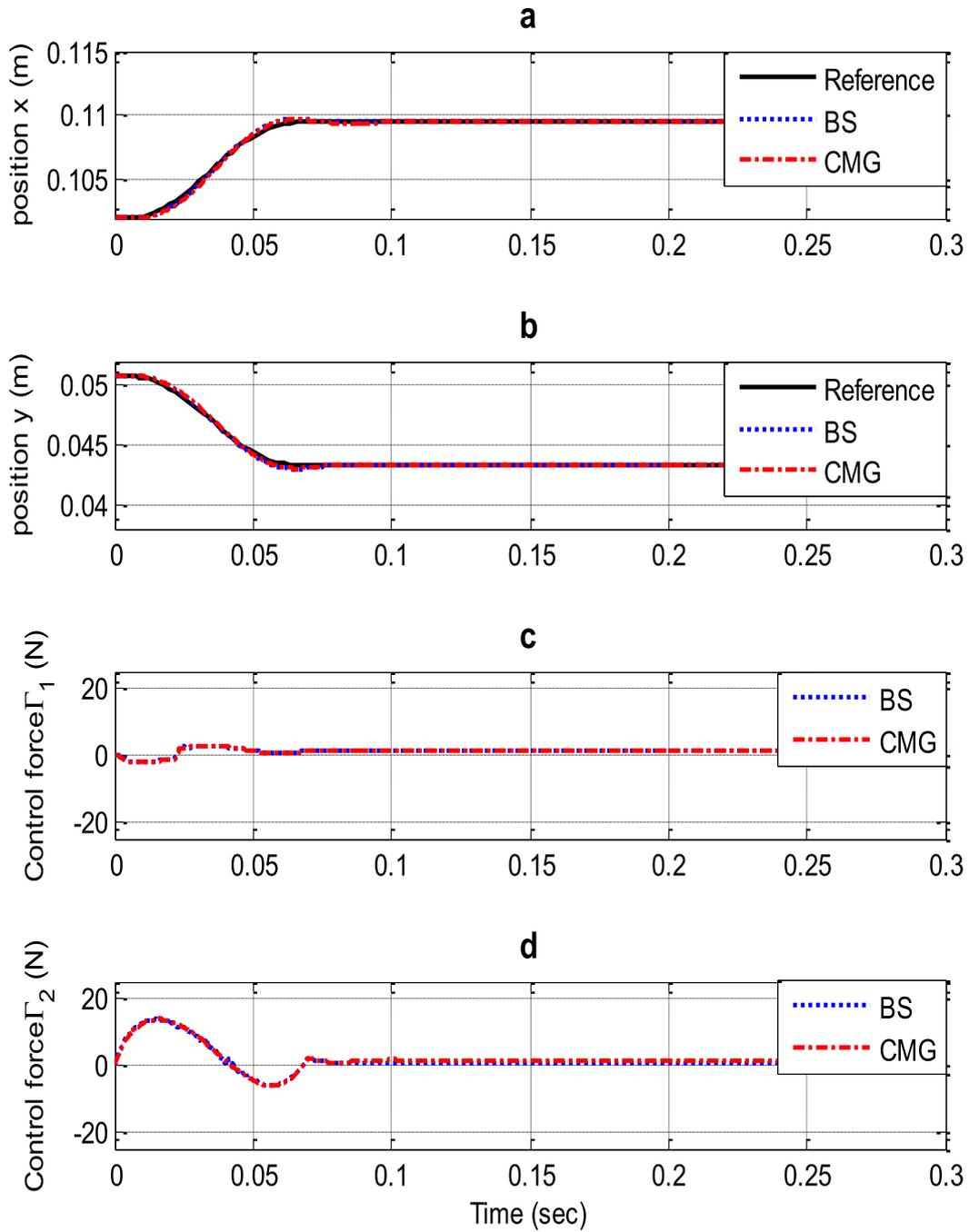


Figure 4.4 Réponse pour une trajectoire en bas avec $\Delta m = 0kg$

CHAPITRE 4

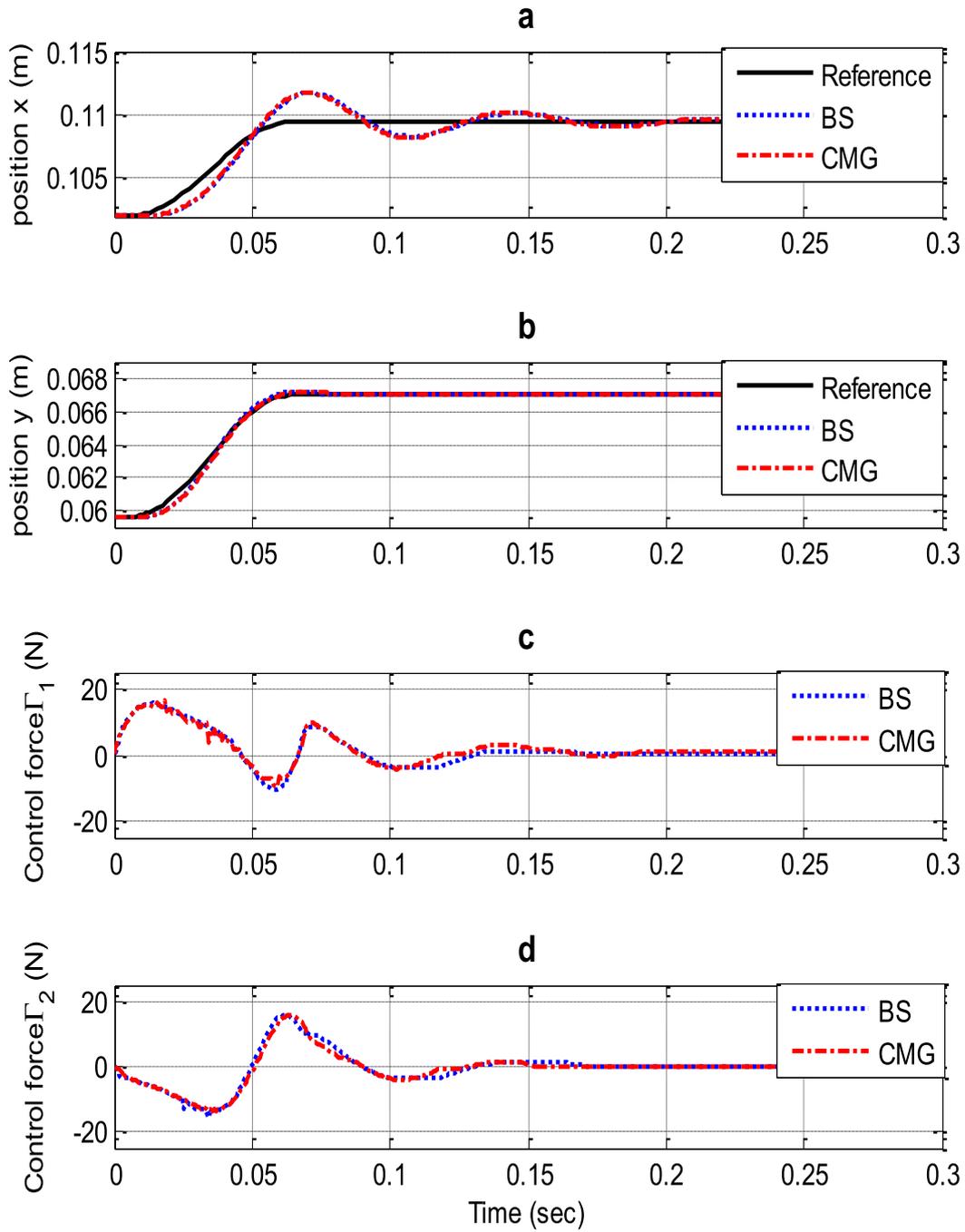


Figure 4.5 Réponse pour une trajectoire en haut avec $\Delta m = 0.816kg$

CHAPITRE 4

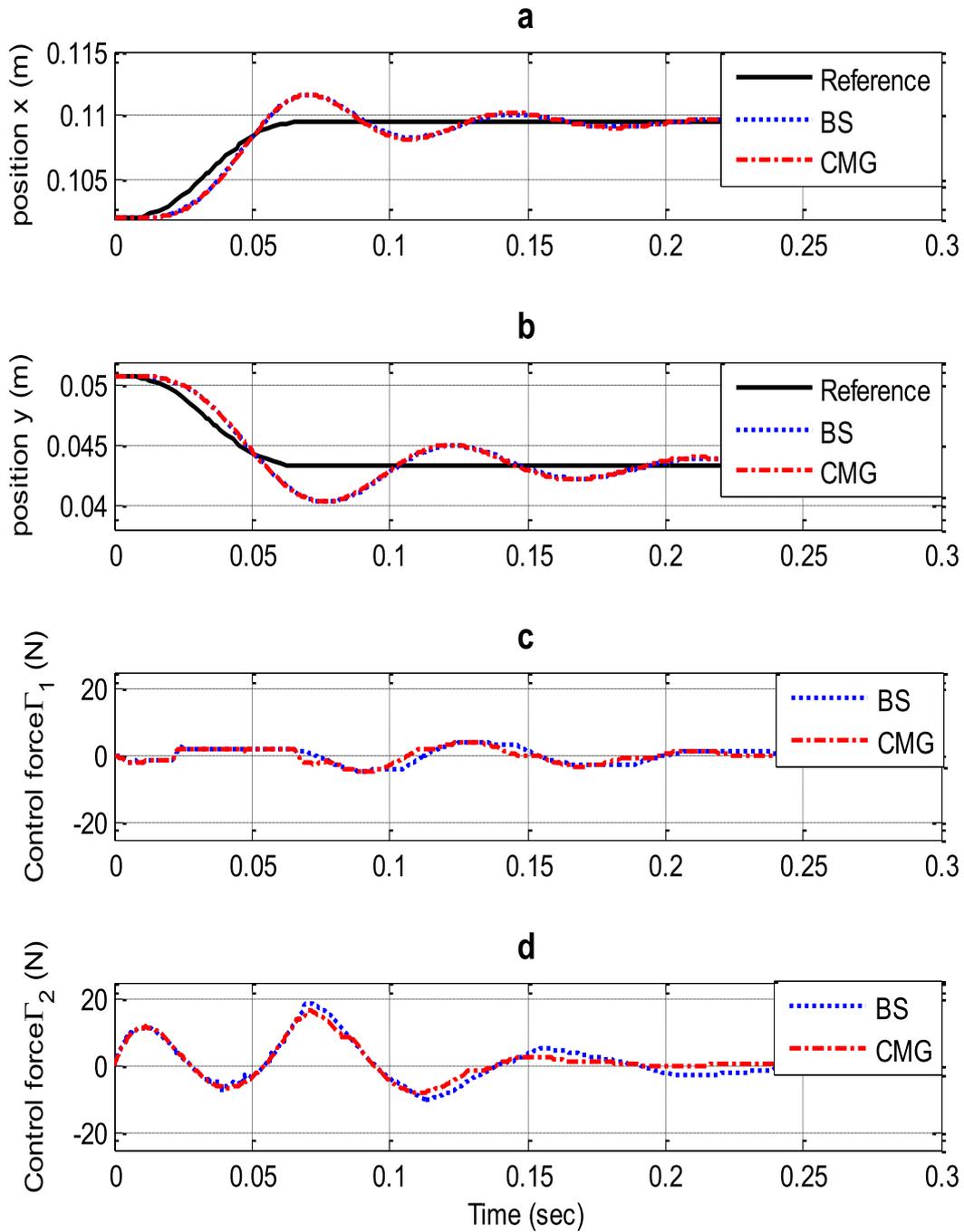


Figure 4.6 Réponse pour une trajectoire en bas avec $\Delta m = 0.816kg$

CHAPITRE 4

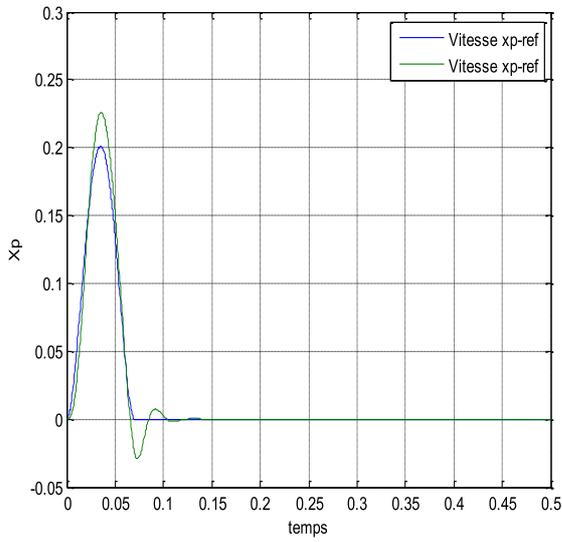


Figure 4.7 Réponse de vitesse pour une trajectoire en haut sur l'axe x, $\Delta m = 0kg$

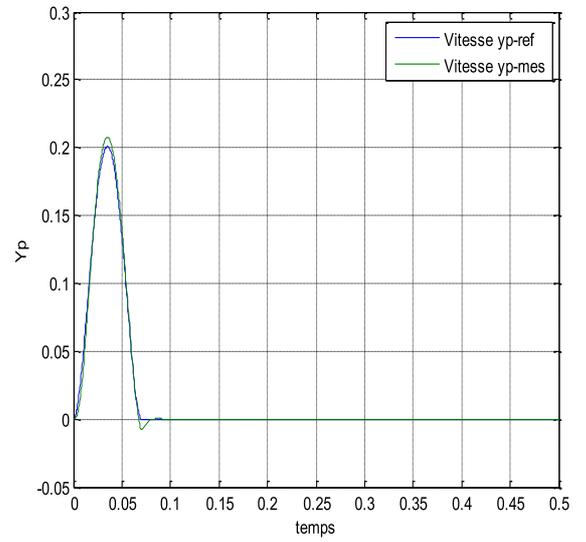


Figure 4.8 Réponse de vitesse pour une trajectoire en haut sur l'axe y, $\Delta m = 0kg$

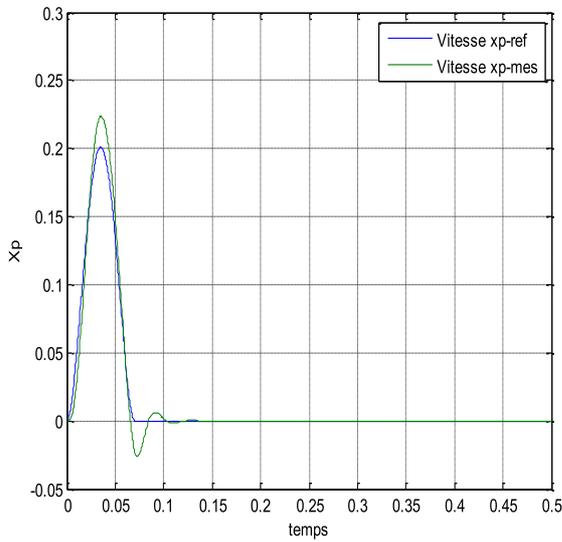


Figure 4.9 Réponse de vitesse pour une trajectoire en haut sur l'axe x, $\Delta m = 0kg$

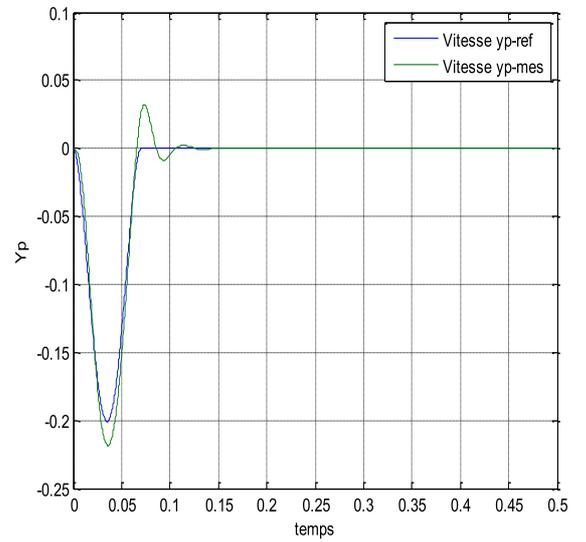


Figure 4.10 Réponse de vitesse pour une trajectoire en haut sur l'axe y, $\Delta m = 0kg$

CHAPITRE 4

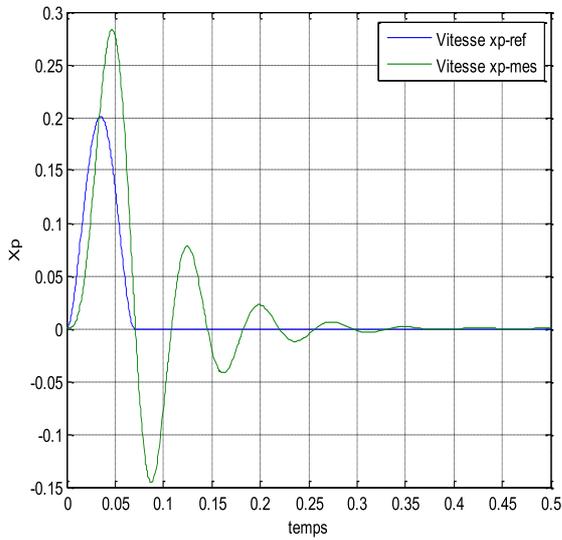


Figure 4.11 Réponse de vitesse pour une trajectoire en haut sur l'axe x, $\Delta m = 0.816kg$

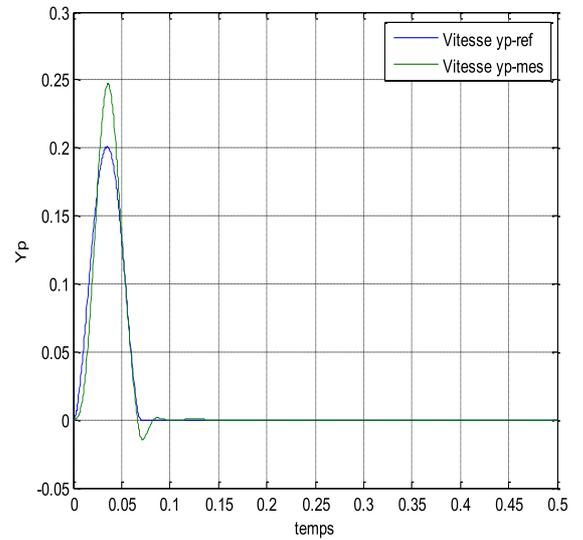


Figure 4.12 Réponse de vitesse pour une trajectoire en haut sur l'axe y, $\Delta m = 0.816kg$

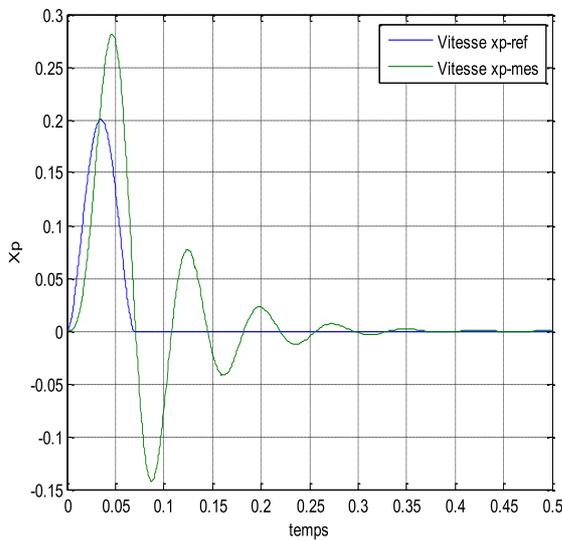


Figure 4.13 Réponse de vitesse pour une trajectoire en bas sur l'axe x, $\Delta m = 0.816kg$

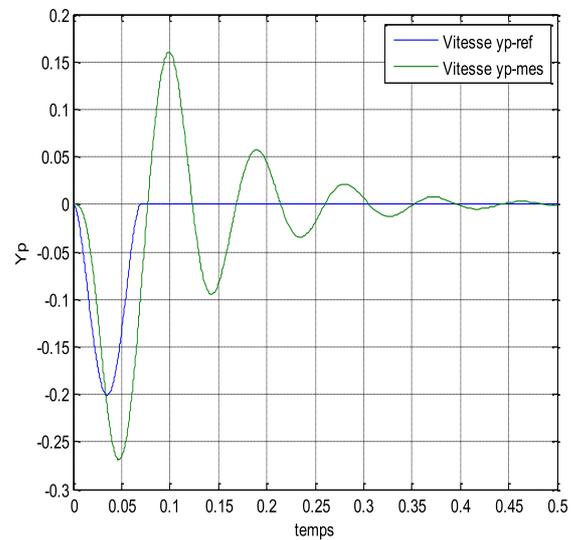


Figure 4.14 Réponse de vitesse pour une trajectoire en bas sur l'axe y, $\Delta m = 0.816kg$

CHAPITRE 4

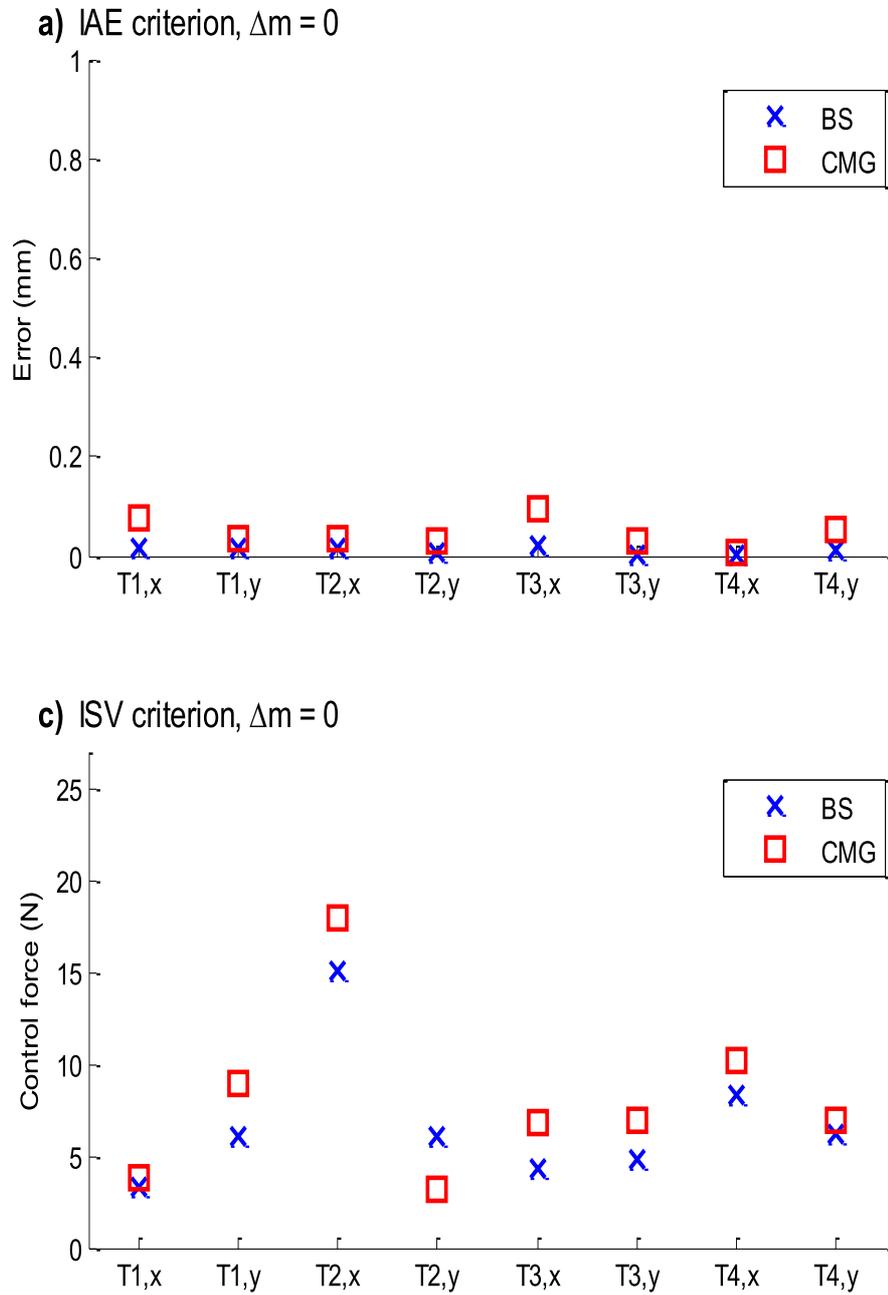


Figure 4.15 (a)-(c) Critères de performance (erreur de position et signal d'entrée de la commande) calculée pour tous les déplacements ($T1$ et $T4$) sur axes x et y , $\Delta m = 0kg$.

CHAPITRE 4

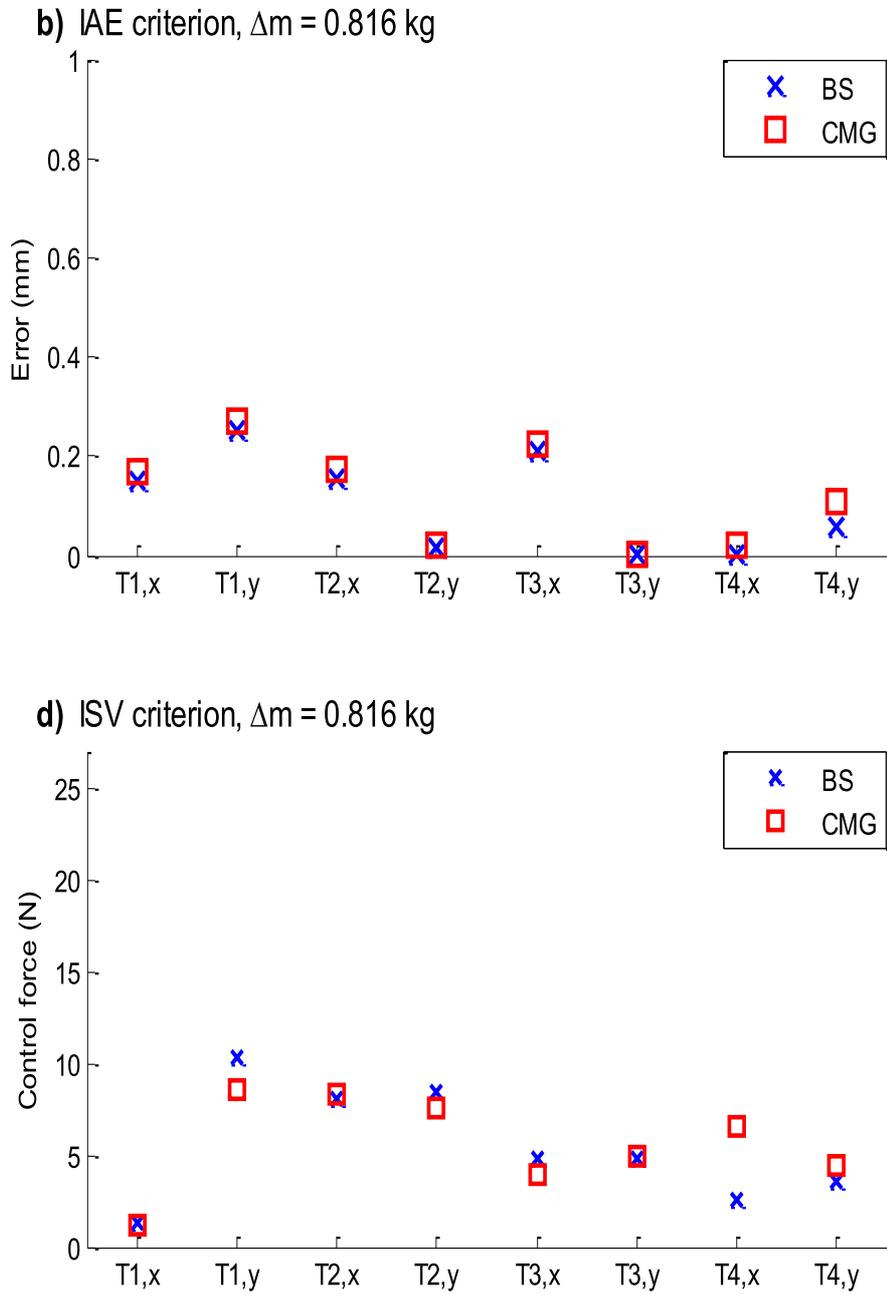


Figure 4.16 (b)-(d) Critères de performance (erreur de position et signal d'entrée de la commande) calculés pour tous les déplacements ($T1$ et $T4$) sur axes x et y , $\Delta m = 0.816$ kg.

CHAPITRE 4

4.2.2 Résultats et Discussion

La Figure 4.7, Figure 4.8, Figure 4.9 et Figure 4.10 représentent les résultats de la vitesse de la plate-forme mobile de robot Biglide avec $\Delta m = 0kg$.

La Figure 4.11, Figure 4.12, Figure 4.13 et Figure 4.14 représentent les résultats de la vitesse de la plate-forme mobile de robot Biglide avec $\Delta m = 0.816kg$.

les différents vitesses de la plate-forme mobile sont montrés dans les Figure 4.7, Figure 4.8, Figure 4.9 et Figure 4.10 pour une valeur de $\Delta m = 0kg$, et les Figure 4.11, Figure 4.12, Figure 4.13 et Figure 4.14 pour une valeur de $\Delta m = 0.816kg$.

Dans le premier cas, Figure 4.3 et Figure 4.4, où $\Delta m = 0kg$, les deux contrôleurs montrent une bonne capacité de réponse.

Dans le cas, Figure 4.5 et Figure 4.6, où $\Delta m = 0.816kg$, le contrôleur backstepping présente les meilleurs résultats par rapport à la commande par mode glissant présentant certaines oscillations dues à la variation de la masse de l'effecteur (variation paramétrique) et la dynamique non modélisé des frottements.

Les Figure 4.15 et Figure 4.16 confirment les résultats précédents et montrent bien clairement la comparaison entre la commande par mode glissant et la commande backstepping. D'après ces figures, on voit clairement que cette loi de commande est la mieux adaptée et la plus robuste par rapport à la commande par mode glissant.

4.3 Application de la commande backstepping au manipulateur parallèle de Gough-Stewart

Le modèle dynamique directe du manipulateur de Gough-Stewart dans l'espace cartésien s'écrit sous la forme suivante :

$$\ddot{P} = M(P)^{-1}[J^T\Gamma - C(P, \dot{P})\dot{P} - G(P)] \quad (4.46)$$

J^T Représente la matrice jacobienne transposée.

$\ddot{P} = [\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, \ddot{\gamma}]^T$ Représente le vecteur d'accélération de la plate-forme mobile.

Pour appliquer la méthode Backstepping, la représentation d'état du modèle est donné par :

$$\dot{x}_2 = \ddot{P} = M(P)^{-1}[J^T\Gamma - C(P, \dot{P})\dot{P} - G(P)] \quad (4.47)$$

telque :

CHAPITRE 4

$$\dot{x}_1 = x_2 = \dot{P}$$

$\dot{P} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}]^T$ Représente le vecteur de la vitesse de la plateforme mobile.

– 1^{ère} étape :

Nous avons comme trajectoires de référence $P = [x, y, z, \alpha, \beta, \gamma]^T$ à faire poursuivre par le procédé. Cela va engendrer une erreur en poursuite :

$$e_1 = x_{1d} - x_1 \quad (4.48)$$

La dérivée dans le temps s'écrit sous la forme,

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_{1d} - \dot{x}_1 \quad (4.49)$$

La fonction candidate de Lyapunov est donnée par :

$$v_1 = \frac{1}{2}e_1^2 \quad (4.50)$$

La fonction v_1 est une fonction de Lyapunov qui représente, en quelque sorte, l'énergie de l'erreur. Or, si cette fonction est toujours définie positive et que sa dérivée est toujours négative, alors l'erreur va être stable et tend vers zéro. La dérivée de la fonction s'écrit comme suit :

$$\dot{v}_1 = e_1 \dot{e}_1 \quad (4.51)$$

$$\dot{v}_1 = e_1(\dot{x}_{1d} - \dot{x}_2) \quad (4.52)$$

et

$$\dot{v}_1 = -\alpha_1 e_1^2 \quad (4.53)$$

avec α_1 est défini positif.

En utilisant (4.52) et (4.53) on obtient :

$$x_2 = \dot{x}_{1d} + \alpha_1 e_1 \quad (4.54)$$

C'est une commande virtuelle et cette commande va être utilisée comme une référence de trajectoire dans la 2^{ème} étape $x_2 = x_{2d}$

CHAPITRE 4

– 2^{me} étape :

$$e_2 = x_{2d} - x_2 \quad (4.55)$$

$$e_2 = \dot{x}_{1d} + \alpha_1 e_1 - x_2 \quad (4.56)$$

$$e_2 = \dot{x}_{1d} - \dot{x}_1 + \alpha_1 e_1 \quad (4.57)$$

$$e_2 = \dot{e}_1 + \alpha_1 e_1 \quad (4.58)$$

$$\dot{e}_1 = e_2 - \alpha_1 e_1 \quad (4.59)$$

$$\dot{e}_2 = \alpha_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} - \dot{x}_2 \quad (4.60)$$

La fonction de Lyapunov, cette fois-ci, est augmentée d'un autre terme qui vient prendre en considération l'erreur possible sur l'état x_2 . Voici la nouvelle fonction candidate, déduite de (4.61)

$$v_2 = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 \quad (4.61)$$

En dérivant cette fonction et en substituant les dynamiques d'erreur (4.59) et (4.60), la relation suivante est trouvée :

$$\dot{v}_2 = e_1(e_2 - \alpha_1 e_1) + e_2(\alpha_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} - \dot{x}_2) \quad (4.62)$$

$$\dot{v}_2 = -\alpha_1 e_1^2 + e_2(\alpha_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} - \dot{x}_2 + e_1) \quad (4.63)$$

Pour que le sous système soit stable il faut que $\dot{v}_2 < 0$ d'après l'équation (4.63) il faut que : $(\alpha_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} - \dot{x}_2 + e_1)$ soit égale a $(-\alpha_2 e_2)$ et on trouve :

$$\dot{v}_2 = -\alpha_1 e_1^2 - \alpha_2 e_2^2 \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2 > 0.$$

Après calcul on trouve :

$$\dot{x}_2 = \alpha_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} + e_1 + \alpha_2 e_2 \quad (4.64)$$

D'après l'équation (4.47) on trouve :

$$M(x_1)^{-1}[J^T \Gamma - C(x_1, x_2)x_2 - G(x_1)] = \alpha_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} + e_1 + \alpha_2 e_2 \quad (4.65)$$

la commande Γ comme suite :

$$\Gamma = J^{-T} (C(x_1, x_2)x_2 + G(x_1) + M(x_1)(\alpha_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} + e_1 + \alpha_2 e_2)) \quad (4.66)$$

CHAPITRE 4

telque :

$\Gamma = [\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \Gamma_5 \Gamma_6]^T$ est le vecteur de commande (signal d'entrée)

$x_1 = [x, y, z, \alpha, \beta, \gamma]^T$ est le vecteur de position de la plate-forme mobile.

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{1x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{1y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{1z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{1\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{1\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{1\gamma} \end{pmatrix}$$

α_1 est une matrice positif qui représente les gains du contrôleur.

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{2x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{2y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{2z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{2\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{2\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{2\gamma} \end{pmatrix}$$

α_2 est une matrice positif qui représente les gains du contrôleur.

4.3.1 Simulation

Nous nous intéressons dans cette partie, aux tests de la commande backstepping appliqué au manipulateur de Gough-Stewart, Figure 4.17. Nous reprenons les mêmes tests effectués par le contrôleur à mode glissant avec et sans perturbation utilisée dans le chapitre précédent.

4.3.2 Résultats et Discussion

Nous avons fait les tests de simulation avec la loi de commande Backstepping sur la plate-forme de Gough-Stewart, les résultats de simulation obtenus sont donnés par les figures Figure 4.18, Figure 4.19 et Figure 4.20. Dans le cas sans perturbation, nous constatons qu'à

CHAPITRE 4

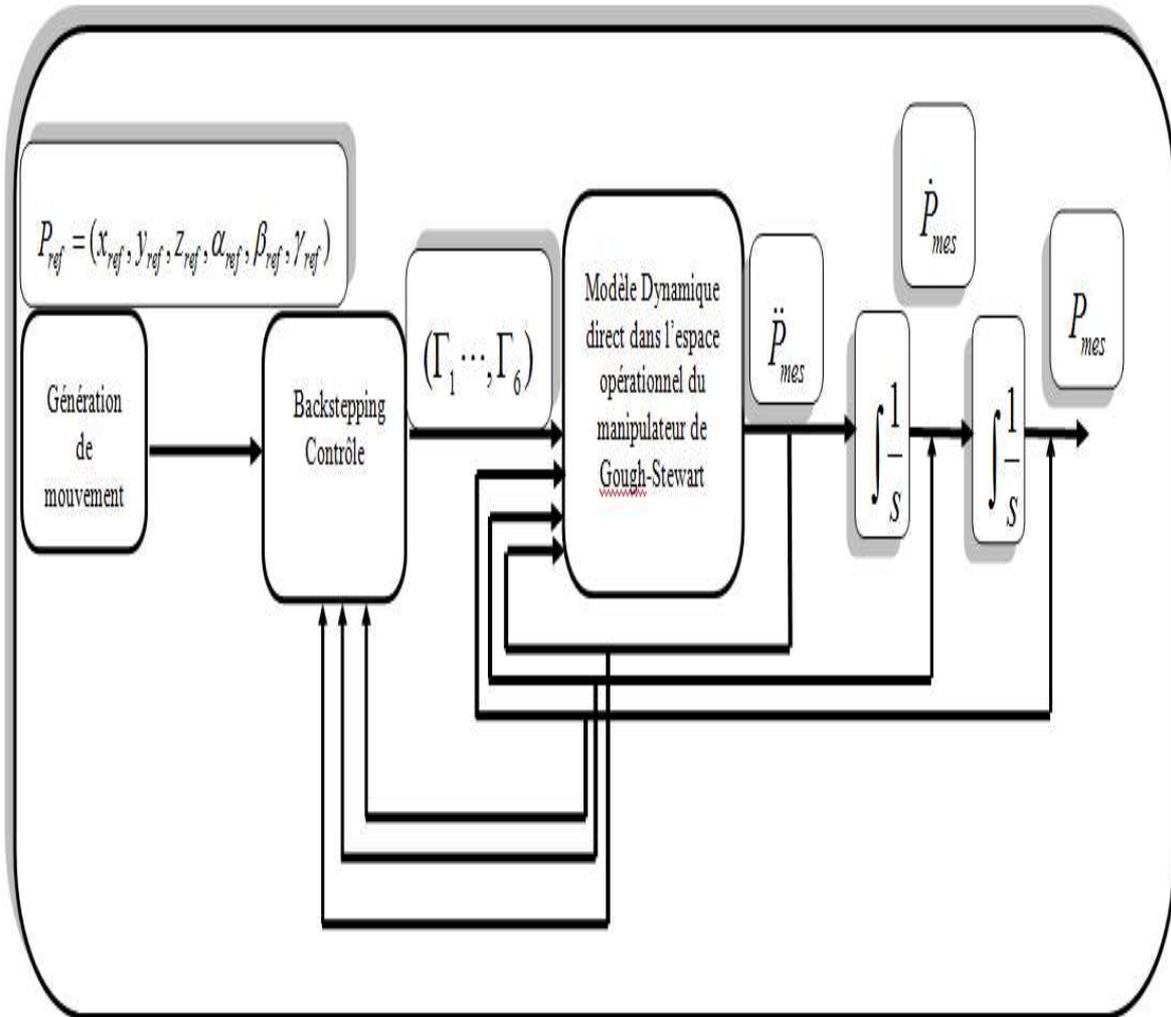


Figure 4.17 Schéma bloc de la commande backstepping appliquée au manipulateur de Gough-Stewart.

chaque fois, la sortie rejoint bien sa référence et avec des erreurs acceptables illustrés dans les figures, Figure 4.21, Figure 4.22 et Figure 4.23 .

Les figures, Figure 4.24, Figure 4.28 et Figure 4.26 illustrent le déplacement de la plateforme mobile avec perturbation suivant les 3 axes z , x , y . Nous remarquons dans ce cas que La commande backstepping présente les meilleurs résultats par rapport à la commande par mode glissant.

On voit bien clairement que la commande backstepping est la mieux adaptée et la plus robuste par rapport à la commande par mode glissant.

CHAPITRE 4

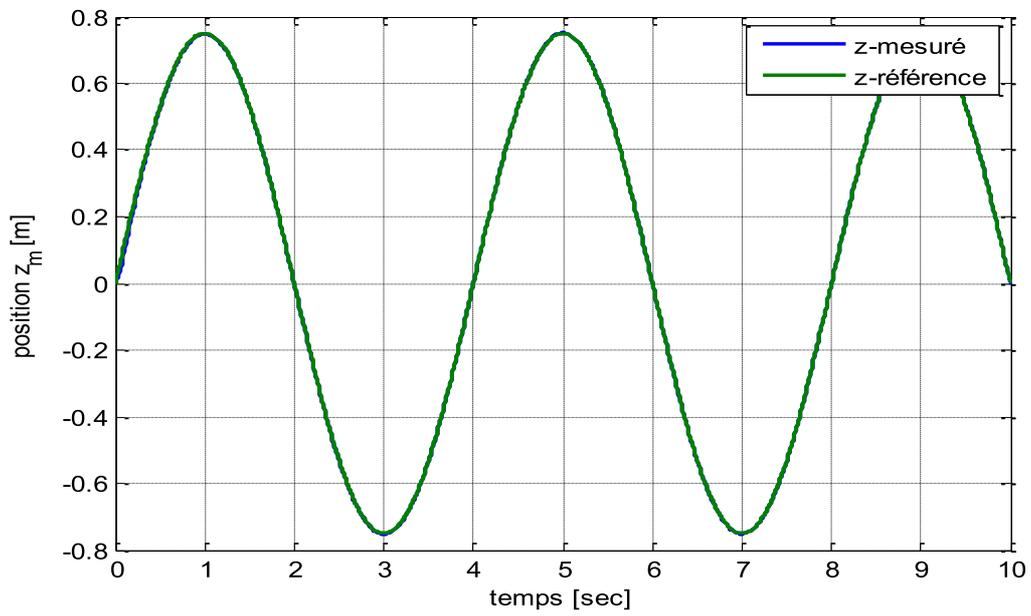


Figure 4.18 Réponse avec une translation de la plat-forme mobile selon l'axe Z

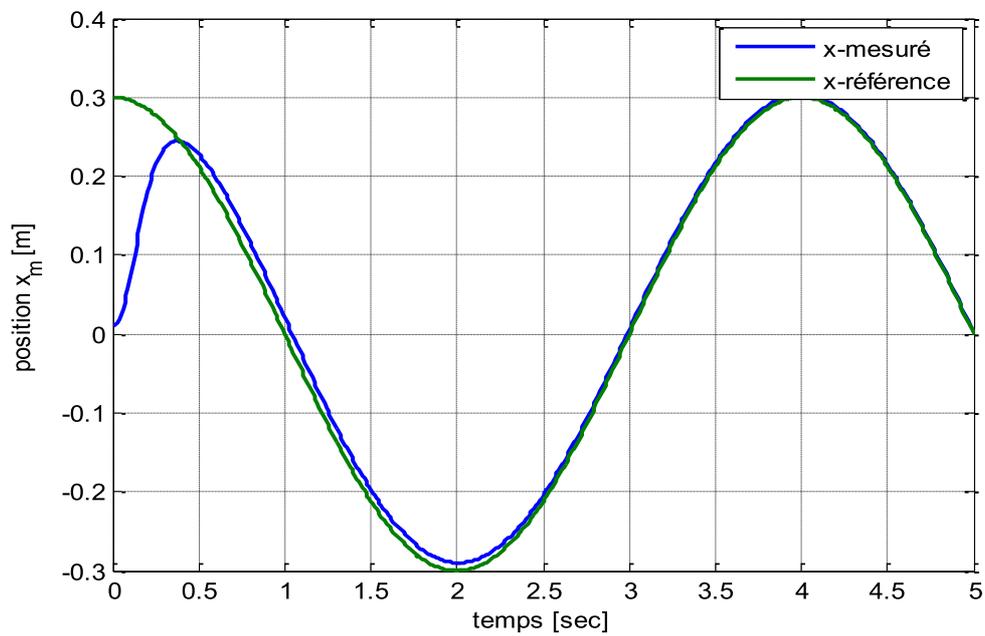


Figure 4.19 Réponse avec une translation de la plat-forme mobile selon l'axe X

CHAPITRE 4

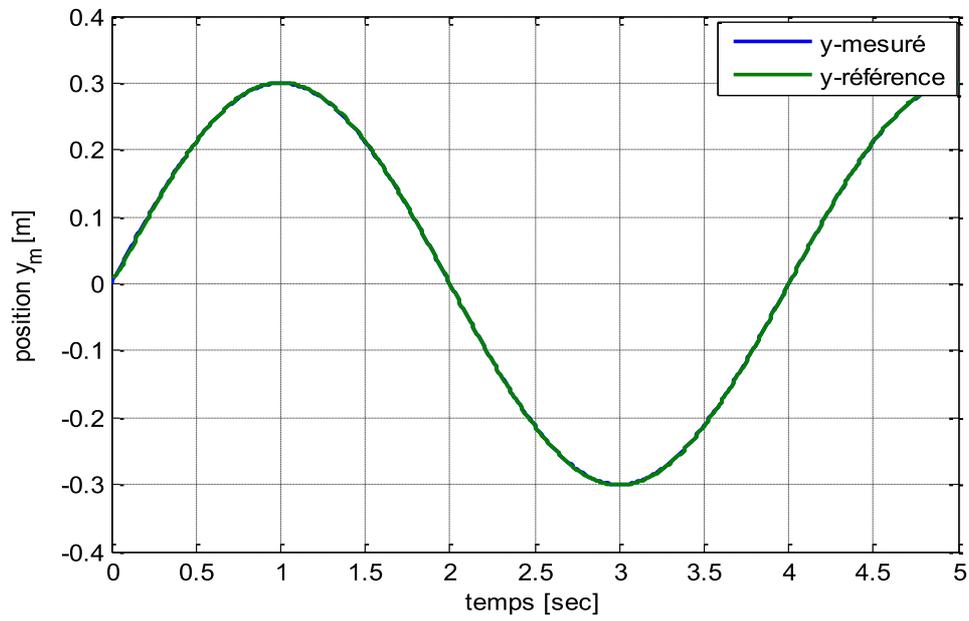


Figure 4.20 Réponse avec une translation de la plat-forme mobile selon l'axe Y

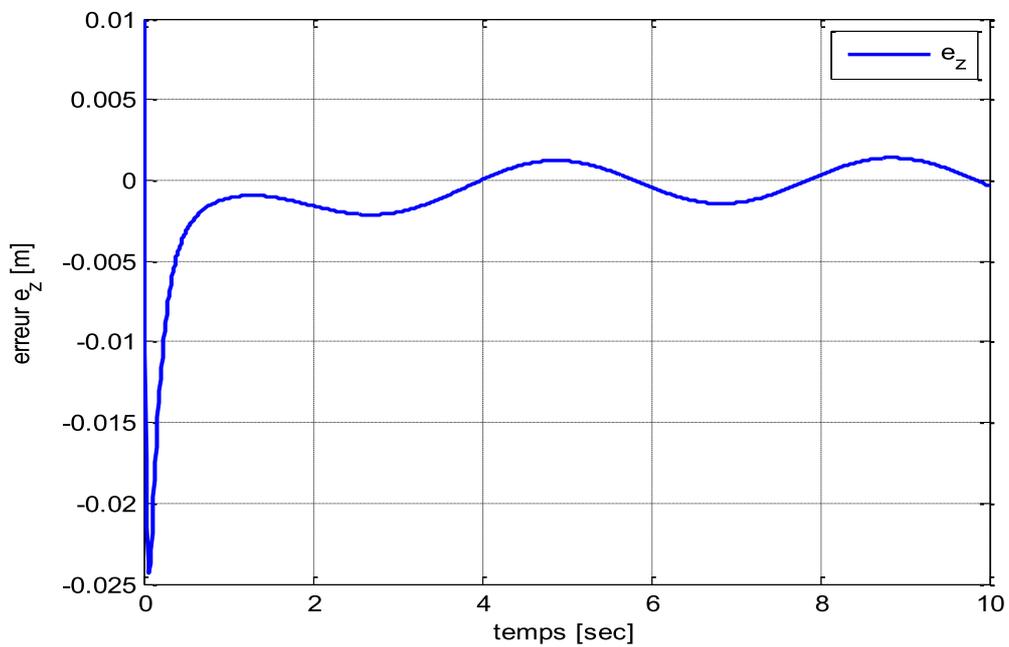


Figure 4.21 Erreur de position de la plat-forme mobile selon l'axe Z

CHAPITRE 4

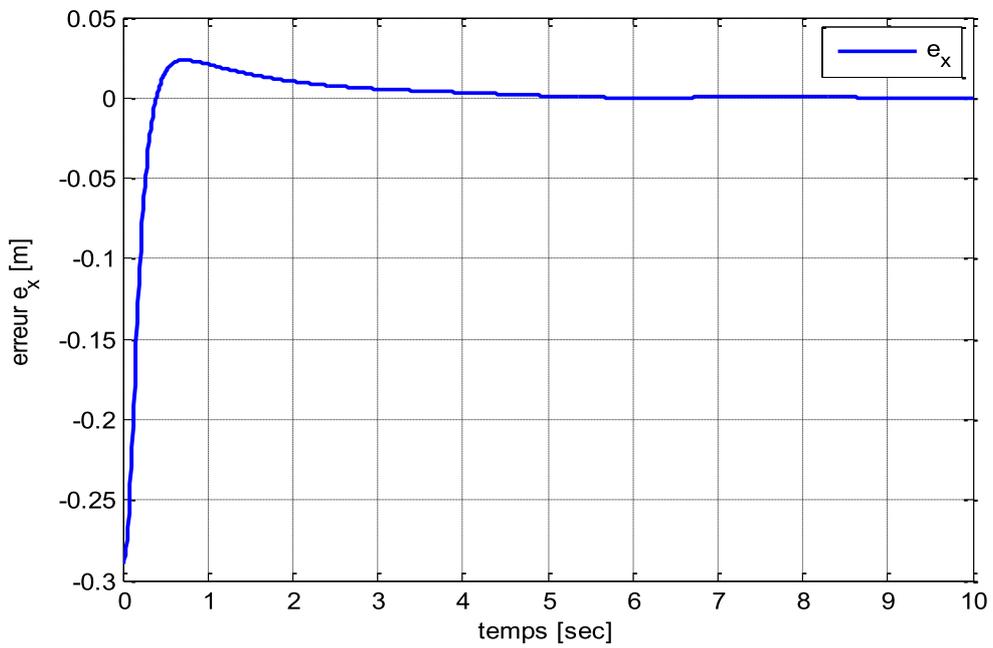


Figure 4.22 Erreur de position de la plat-forme mobile selon l'axe X

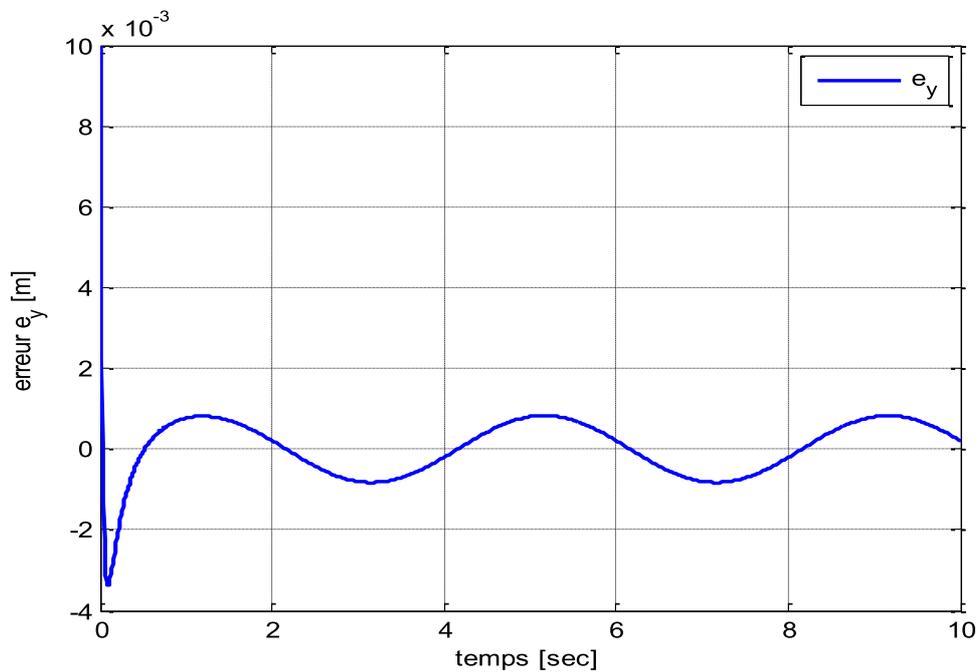


Figure 4.23 Erreur de position de la plat-forme mobile selon l'axe Y

CHAPITRE 4

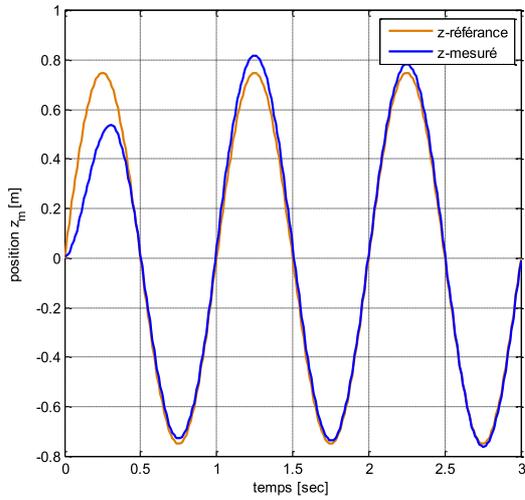


Figure 4.24 Réponse du contrôleur backstepping, une translation de l'effecteur selon l'axe Z avec perturbation

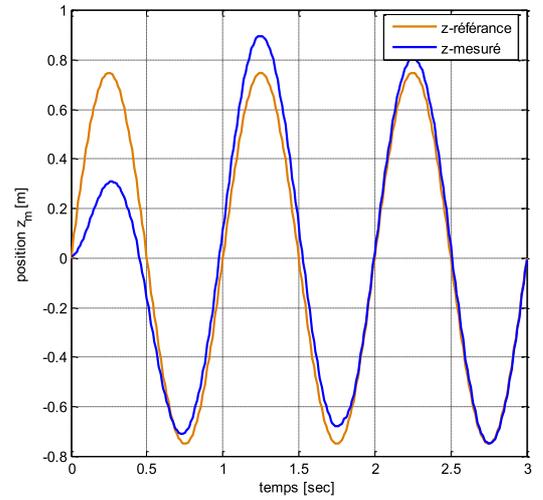


Figure 4.25 Réponse du contrôleur par mode glissant, une translation de l'effecteur selon l'axe Z avec perturbation

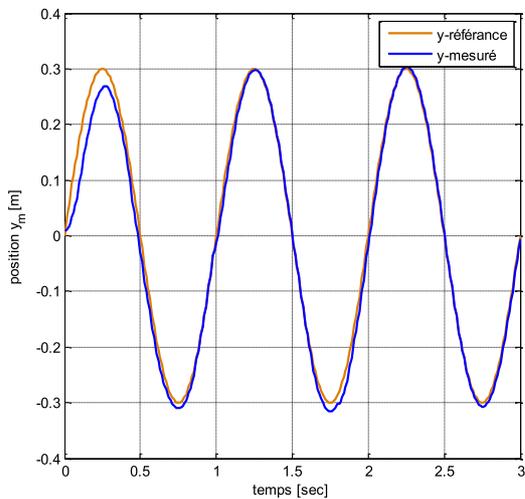


Figure 4.26 Réponse du contrôleur backstepping, une translation de l'effecteur selon l'axe Y avec perturbation

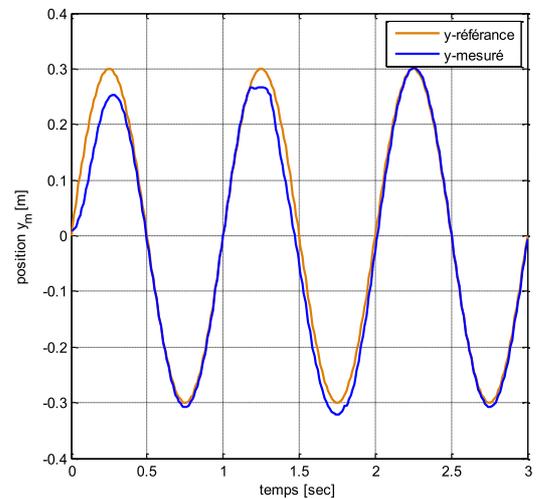


Figure 4.27 Réponse du contrôleur par mode glissant, une translation de l'effecteur selon l'axe Y avec perturbation

CHAPITRE 4

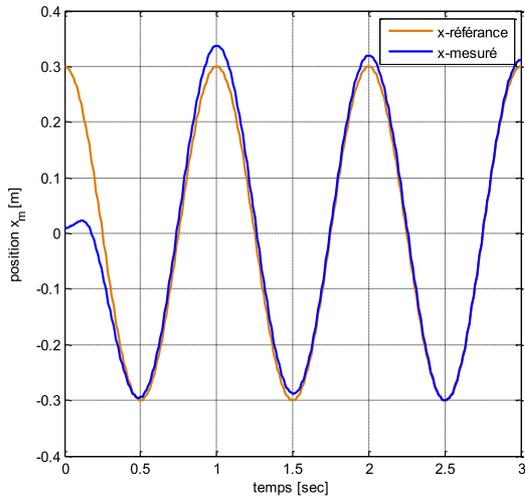


Figure 4.28 Réponse du contrôleur backstepping, une translation de l'effecteur selon l'axe X avec perturbation

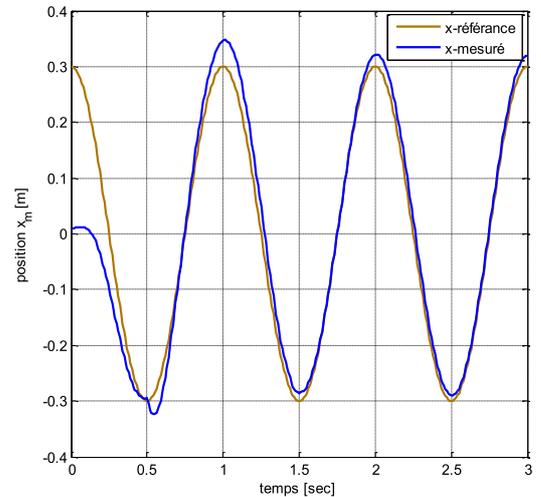


Figure 4.29 Réponse du contrôleur par mode glissant, une translation de l'effecteur selon l'axe X avec perturbation

4.3.3 Étude comparative entre la commande par mode glissant et la commande backstepping

Les résultats obtenus à travers les tests de simulation sur les deux manipulateurs parallèles (Plate-forme de Gough-Stewart et Robot Biglide) que nous avons effectués, ont permis de faire une étude comparative entre la commande backstepping et la commande par mode glissant. Concernant le cas du robot parallèle Biglide, les deux lois de commandes appliquées ont donné des résultats satisfaisants avec un bon suivi des quatre trajectoires données.

Concernant les tests de la robustesse effectués sur les deux manipulateurs parallèles, la commande backstepping a prouvé sa robustesse vis-à-vis des variations paramétriques dues à la dynamique non modélisée (robot Biglide) et à la perturbation ajoutée (plate-forme de Gough-Stewart). Les résultats obtenus précédemment, Figure 4.24, Figure 4.26 et Figure 4.28 confirment et montrent que la commande backstepping est la plus robuste par rapport à la commande par mode glissant.

CHAPITRE 4

4.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une contribution à la commande backstepping appliquée aux deux manipulateurs parallèle, un manipulateur parallèle plan à deux degrés de liberté (Biglide) et un manipulateur parallèle spatial à six degrés de liberté (Gough-Stewart) dans l'espace cartésien (espace de la tâche).

Cette loi de commande basée sur la technique du backstepping donne des résultats satisfaisants. Néanmoins, ces performances ne peuvent être atteintes que dans le cas d'une bonne connaissance du modèle dynamique utilisé.

Les résultats de simulation ont confirmé les bonnes performances du contrôleur utilisé, qui assure sous certaines conditions la poursuite de la trajectoire.

Cinquième partie

**CONCLUSION GÉNÉRALE ET
PERSPECTIVE**

4.5 Conclusion Générale et Perspective

Dans ce manuscrit de thèse, nous avons présenté les travaux de recherche réalisés dans le contexte de contribution à la modélisation et la commande non linéaire des robots parallèles dans l'espace opérationnelle.

Dans ce mémoire, nous avons donné des généralités sur les manipulateurs à architecture parallèles, où nous avons parlé sur leurs modèles géométrique et cinématique. Une grande partie du mémoire a été consacrée à la dynamique de ces manipulateurs parallèles qui a été déduite par la méthode de Lagrangien.

On peut diviser nos travaux dans cette thèse en deux principales parties :

Dans la première partie nous avons effectué la synthèse d'une loi de commande à structure variable tel que le mode glissant sur deux type des robots parallèles, plate-forme de Gough-Stewart et le robot parallèle plan Biglide. Dans ce type de commande, l'approche non linéaire traitée, présente l'avantage de se rapprocher du système réel sans passer nécessairement par le modèle linéaire. Cette commande a donnée des résultats intéressants concernant la poursuite de la trajectoires.

Pour le test de la robustesse, une variation paramétrique (la masse de l'effecteur et une perturbation) été considérée. Dans le cas du robot Biglide nous avons montré la robustesse de cette loi de commande par rapport à des incertitudes paramétriques ce qui provoque une présence de quelque oscillations dans la réponse du système dûes à la variation de la masse de l'organe terminal et la dynamique non modélisée.

Dans le cas du manipulateur de gough-Stewart nous avons montré la robustesse de cette loi de commande par rapport à une perturbation ajouté ce qui provoque une présence de quelques variations dans la réponse du système.

Dans la deuxième partie la commande non linéaire par backstepping a été appliquée aux robots parallèles Biglide et au manipulateur de Gough-Stewart. Pour réduire les oscillations et l'effet de la perturbation, une autre commande non linéaire a été proposée à savoir un régulateur de type backstepping. Ce régulateur est basé sur une récente méthodologie faisant appel à la fonction de Layapunov. La synthèse a conduit à un contrôleur non linéaire globalement asymptotiquement stable. Cette loi de commande basée sur la technique du backstepping donne des résultats satisfaisants. Néanmoins, ces performances ne peuvent être atteintes que dans le cas d'une bonne connaissance du modèle dynamique utilisé.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Finalement, la commande non linéaire dans l'espace Cartésien nous a permis d'utiliser un signal de commande directement égal à l'accélération cartésienne \ddot{P} . Ainsi, il y a diminution du recours aux transformations directes numériques. Ensuite, la commande dans l'espace cartésien utilise une mesure directe de la pose de l'effecteur est donc directement liée à la mesure, et non au modèle géométrique direct.

Les résultats obtenus à ce propos sont assez motivant pour lancer une concrétisation pratique de ces commandes.

4.6 Améliorations futures

Comme perspectives, nous proposons les directions de recherches suivantes :

- Réaliser une commande adaptative directe en utilisant les mêmes lois de commande citée précédemment.
- Valider les lois de commande sur un procédé expérimental (Biglide et la plate-forme de Gough-Stewart).

Sixième partie
BIBLIOGRAPHIE

RÉFÉRENCES

- [1] Motion simulator actuator joint, May 4 1971. US Patent 3,577,659.
- [2] H Abdellatif and B Helmann. Learning control for accuracy enhancement of parallel kinematic machines. In *The fifth Chemnitz Parallel Kinematics Seminar*, pages 443–456, 2006.
- [3] O Akhrif and GL Blankenship. Robust stabilization of feedback linearizable systems. In *Decision and Control, 1988., Proceedings of the 27th IEEE Conference on*, pages 1714–1719. IEEE, 1988.
- [4] Suguru Arimoto. Stability and robustness of pid feedback control for robot manipulators of sensory capability. In *Robotics Research, 1st Int. Symp.*, pages 783–799. MIT Press, 1984.
- [5] Lotfi Baghli. *Contribution à la commande de la machine asynchrone, utilisation de la logique floue, des réseaux de neurones et des algorithmes génétiques*. PhD thesis, Université Henri Poincaré-Nancy I, 1999.
- [6] Dheeman Basu and Ashitava Ghosal. Singularity analysis of platform-type multi-loop spatial mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 32(3) :375–389, 1997.
- [7] Lotfi Beji, Azgal Abichou, and M Pascal. Tracking control of a parallel robot in the task space. In *Robotics and Automation, 1998. Proceedings. 1998 IEEE International Conference on*, volume 3, pages 2309–2314. IEEE, 1998.
- [8] ZM Bi and Sherman YT Lang. Kinematic and dynamic models of a tripod system with a passive leg. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 11(1) :108–111, 2006.
- [9] John Brewer. Kronecker products and matrix calculus in system theory. *IEEE Transactions on circuits and systems*, 25(9) :772–781, 1978.
- [10] Etienne Burdet, Marcel Honegger, and Alain Codourey. Controllers with desired dynamic compensation and their implementation on a 6 dof parallel manipulator. In *Intelligent Robots and Systems, 2000.(IROS 2000). Proceedings. 2000 IEEE/RSJ International Conference on*, volume 1, pages 39–45. IEEE, 2000.
- [11] Massimo Callegari and Matteo Tarantini. Kinematic analysis of a novel translational platform. *Journal of Mechanical Design*, 125(2) :308–315, 2003.
- [12] Hee-Byoung Choi, Olivier Company, François Pierrot, Atsushi Konno, T Shibukawa, and Masaru Uchiyama. Design and control of a novel 4-dofs parallel robot h4. In *Robotics and Automation, 2003. Proceedings. ICRA '03. IEEE International Conference on*, volume 1, pages 1185–1190. IEEE, 2003.

RÉFÉRENCES

- [13] R Clavel. Une nouvelle structure de manipulateur parallèle pour la robotique légère. *Automatique-productique informatique industrielle*, 23(6) :501–519, 1989.
- [14] Alain Codourey and Etienne Burdet. A body-oriented method for finding a linear form of the dynamic equation of fully parallel robots. In *Robotics and Automation, 1997. Proceedings., 1997 IEEE International Conference on*, volume 2, pages 1612–1618. IEEE, 1997.
- [15] David Corbel. *Contribution à l'amélioration de la précision des robots parallèles*. PhD thesis, Université Montpellier II-Sciences et Techniques du Languedoc, 2008.
- [16] E-M Dafaoui, Yacine Amirat, Jean Pontnau, and Christian Francois. Analysis and design of a six-dof parallel manipulator, modeling, singular configurations, and workspace. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 14(1) :78–92, 1998.
- [17] Bhaskar Dasgupta and Prasun Choudhury. A general strategy based on the newton–euler approach for the dynamic formulation of parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 34(6) :801–824, 1999.
- [18] Bhaskar Dasgupta and TS Mruthyunjaya. Closed-form dynamic equations of the general stewart platform through the newton–euler approach. *Mechanism and machine theory*, 33(7) :993–1012, 1998.
- [19] Bhaskar Dasgupta and TS Mruthyunjaya. A newton-euler formulation for the inverse dynamics of the stewart platform manipulator. *Mechanism and Machine Theory*, 33(8) :1135–1152, 1998.
- [20] Hakan Elmali and Nejat Olgac. Robust output tracking control of nonlinear mimo systems via sliding mode technique. *Automatica*, 28(1) :145–151, 1992.
- [21] Randy A Freeman and Petar V Kokotovic. *Robust nonlinear control design : state-space and Lyapunov techniques*. Springer, 2008.
- [22] Fathi H Ghorbel, Olivier Chételat, Ruvinda Gunawardana, and Roland Longchamp. Modeling and set point control of closed-chain mechanisms : theory and experiment. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 8(5) :801–815, 2000.
- [23] Clement Gosselin and Jorge Angeles. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 6(3) :281–290, 1990.
- [24] Clkment M Gosselin. Parallel computational algorithms for the kinematics and dynamics of parallel manipulators. In *Robotics and Automation, 1993. Proceedings., 1993 IEEE International Conference on*, pages 883–888. IEEE, 1993.
- [25] VE Gough. Contribution to discussion of papers on research in automobile stability, control and tyre performance. In *Proc. Auto Div. Inst. Mech. Eng*, volume 171, pages 392–394, 1956.

RÉFÉRENCES

- [26] TNE Greville. Some applications of the pseudoinverse of a matrix. *SIAM review*, 2(1) :15–22, 1960.
- [27] Hamidreza Hajimirzaalian, Hasan Moosavi, and Mehdi Massah. Analyzing and simulating the inverse and the direct dynamics of parallel robot stewart platform. In *Computer and Network Technology (ICCNT), 2010 Second International Conference on*, pages 136–141. IEEE, 2010.
- [28] F Hao and J-P Merlet. Multi-criteria optimal design of parallel manipulators based on interval analysis. *Mechanism and machine theory*, 40(2) :157–171, 2005.
- [29] Hideki Hashimoto, Hajime Yamamoto, Shigekazu Yanagisawa, and Fumio Harashima. Brushless servo motor control using variable structure approach. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, 24(1) :160–170, 1988.
- [30] Marcel Honegger, Roberto Brega, and G Schweiter. Application of a nonlinear adaptive controller to a 6 dof parallel manipulator. In *Robotics and Automation, 2000. Proceedings. ICRA '00. IEEE International Conference on*, volume 2, pages 1930–1935. IEEE, 2000.
- [31] Zhiming Ji. Study of the effect of leg inertia in stewart platforms. Robotics and Automation, 1993. Proceedings., 1993 IEEE International Conference on, 1993.
- [32] W Khalil and D Murareci. Kinematic analysis and singular configurations of a class of parallel robots. *Mathematics and computers in simulation*, 41(3) :377–390, 1996.
- [33] Wisama Khalil and Sébastien Besnard. Self calibration of stewart-gough parallel robots without extra sensors. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 15(6) :1116–1121, 1999.
- [34] Wisama KHALIL and Etienne DOMBRE. Bases de la modélisation des robots.
- [35] Wisama Khalil and Etienne Dombre. *Modélisation, identification et commande des robots*. Hermès science publ., 1999.
- [36] Wisama Khalil and Etienne Dombre. *Modeling, identification and control of robots*. Butterworth-Heinemann, 2004.
- [37] Wisama Khalil and Sylvain Guegan. A novel solution for the dynamic modeling of gough-stewart manipulators. In *ICRA*, pages 817–822, 2002.
- [38] Wisama Khalil and Ouarda Ibrahim. General solution for the dynamic modeling of parallel robots. *Journal of intelligent and robotic systems*, 49(1) :19–37, 2007.
- [39] Pradeep K Khosla and Takeo Kanade. Real-time implementation and evaluation of the computed-torque scheme. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 5(2) :245–253, 1989.

RÉFÉRENCES

- [40] Hag Seong Kim, Young Man Cho, and Kyo-II Lee. Robust nonlinear task space control for 6 dof parallel manipulator. *Automatica*, 41(9) :1591–1600, 2005.
- [41] Daniel E Koditschek. Natural motion for robot arms. 1984.
- [42] Petar V Kokotovic. The joy of feedback : nonlinear and adaptive. *IEEE Control Systems Magazine*, 12(3) :7–17, 1992.
- [43] Miroslav Krstic, Ioannis Kanellakopoulos, and Peter V Kokotovic. *Nonlinear and adaptive control design*. Wiley, 1995.
- [44] Sébastien Krut, Michel Benoit, H Ota, and François Pierrot. I4 : A new parallel mechanism for scara motions. In *Robotics and Automation, 2003. Proceedings. ICRA '03. IEEE International Conference on*, volume 2, pages 1875–1880. IEEE, 2003.
- [45] IMM Lammerts, FE Veldpaus, MJG Van de Molengraft, and JJ Kok. Adaptive computed reference computed torque control of flexible robots. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 117(1) :31–36, 1995.
- [46] Se-Han Lee, Jae-Bok Song, Woo-Chun Choi, and Daehie Hong. Position control of a stewart platform using inverse dynamics control with approximate dynamics. *Mechatronics*, 13(6) :605–619, 2003.
- [47] Mustapha Litim, Benyamine Allouche, Abdelhafid Omari, Antoine Dequidt, and Laurent Vermeiren. Sliding mode control of biglide planar parallel manipulator. In *Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO), 2014 11th International Conference on*, volume 2, pages 303–310. IEEE, 2014.
- [48] GF Liu, XZ Wu, and ZX Li. Inertia equivalence principle and adaptive control of redundant parallel manipulators. In *Robotics and Automation, 2002. Proceedings. ICRA '02. IEEE International Conference on*, volume 1, pages 835–840. IEEE, 2002.
- [49] Jinkun Liu and Xinhua Wang. *Advanced sliding mode control for mechanical systems*. Springer.
- [50] Kai Liu, John M Fitzgerald, and Frank L Lewis. Kinematic analysis of a stewart platform manipulator. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 40(2) :282–293, 1993.
- [51] Kai Liu, Frank Lewis, Guy Lebret, and David Taylor. The singularities and dynamics of a stewart platform manipulator. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 8(3) :287–308, 1993.
- [52] Min-Jie Liu, Cong-Xin Li, and Chong-Ni Li. Dynamics analysis of the gough-stewart platform manipulator. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 16(1) :94–98, 2000.

RÉFÉRENCES

- [53] O Ma and J Angeles. Architecture singularities of platform manipulators. In *Robotics and Automation, 1991. Proceedings., 1991 IEEE International Conference on*, pages 1542–1547. IEEE, 1991.
- [54] Sofiane Mahieddine Mahmoud. *Contribution à la commande par mode de glissement des systèmes mécatroniques*. PhD thesis, Valenciennes, 2007.
- [55] Oren Masory, Jian Wang, and Hanqi Zhuang. On the accuracy of a stewart platform. ii. kinematic calibration and compensation. In *Robotics and Automation, 1993. Proceedings., 1993 IEEE International Conference on*, pages 725–731. IEEE, 1993.
- [56] J-P Merlet. *Parallel robots*, volume 74. Springer, 2001.
- [57] J-P Merlet. Solving the forward kinematics of a gough-type parallel manipulator with interval analysis. *The International Journal of robotics research*, 23(3) :221–235, 2004.
- [58] J-P Merlet. *Parallel robots*, volume 128. Springer, 2006.
- [59] JP Merlet. Les robots parallèles, traité des nouvelles technologies. *édition Hermès*, 1990.
- [60] Joseph Moerschell. Réglage par mode de glissement du couple de moteurs asynchrones. 1993.
- [61] Andreas Muller. Consequences of geometric imperfections for the control of redundantly actuated parallel manipulators. *Robotics, IEEE Transactions on*, 26(1) :21–31, 2010.
- [62] Vincent Nabat, María de la O RODRIGUEZ, O Company, Sebastien Krut, and F Pierrot. Par4 : very high speed parallel robot for pick-and-place. In *Intelligent Robots and Systems, 2005.(IROS 2005). 2005 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 553–558. IEEE, 2005.
- [63] Charles C Nguyen and Farhad J Pooran. Dynamic analysis of a 6 dof ckcm robot end-effector for dual-arm telerobot systems. *Robotics and Autonomous Systems*, 5(4) :377–394, 1989.
- [64] So-Ryeok Oh, Kalyan K Mankala, Sunil K Agrawal, and James S Albus. Dynamic modeling and robust controller design of a two-stage parallel cable robot. *Multibody System Dynamics*, 13(4) :385–399, 2005.
- [65] JAMES E OWINNETT. Amusement device, January 20 1931. US Patent 1,789,680.
- [66] Flavien Paccot. *Contribution à la commande dynamique référencée capteurs de robots parallèles*. PhD thesis, Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II, 2009.
- [67] Flavien Paccot, N Andreff, and P Martinet. Some issues on dynamic control of parallel kinematic machines. In *International Conference on Advanced Robotics (ICAR'07)*, 2007.

RÉFÉRENCES

- [68] Frank C Park and Jin Wook Kim. Manipulability and singularity analysis of multiple robot systems : A geometric approach. In *Robotics and Automation, 1998. Proceedings. 1998 IEEE International Conference on*, volume 2, pages 1032–1037. IEEE, 1998.
- [69] V Pollard and L Willard. Position-controlling apparatus, June 16 1942. US Patent 2,286,571.
- [70] Willard Lacey Georg Pollard Jr. Spray painting machine, August 27 1940. US Patent 2,213,108.
- [71] Zhen Qi, John E Mcinroy, and Farhad Jafari. Trajectory tracking with parallel robots using low chattering, fuzzy sliding mode controller. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 48(3) :333–356, 2007.
- [72] Claude Reboulet and Thierry Berthomieu. Dynamic models of a six degree of freedom parallel manipulators. In *Advanced Robotics, 1991. 'Robots in Unstructured Environments', 91 ICAR., Fifth International Conference on*, pages 1153–1157. IEEE, 1991.
- [73] Jaouad Sefrioui and Clément M Gosselin. Singularity analysis and representation of planar parallel manipulators. *Robotics and Autonomous Systems*, 10(4) :209–224, 1992.
- [74] Sridhar Seshagiri and Hassan K Khalil. On introducing integral action in sliding mode control. In *Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on*, volume 2, pages 1473–1478. IEEE, 2002.
- [75] Sridhar Seshagiri and Hassan K Khalil. Robust output feedback regulation of minimum-phase nonlinear systems using conditional integrators. *Automatica*, 41(1) :43–54, 2005.
- [76] Jean-Jacques E Slotine. Sliding controller design for non-linear systems. *International Journal of control*, 40(2) :421–434, 1984.
- [77] Jean-Jacques E Slotine, Weiping Li, et al. *Applied nonlinear control*, volume 199. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [78] Zuoshi Song, Jianqiang Yi, Dongbin Zhao, and Xinchun Li. A computed torque controller for uncertain robotic manipulator systems : Fuzzy approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 154(2) :208–226, 2005.
- [79] Boris Mayer St-Onge. *Étude et représentation des lieux de singularité de la plate-forme de Gough-Stewart*. 1997.
- [80] Boris Mayer St-Onge and Clément M Gosselin. Singularity analysis and representation of the general gough-stewart platform. *The International Journal of Robotics Research*, 19(3) :271–288, 2000.
- [81] Doug Stewart. A platform with six degrees of freedom. *Proceedings of the institution of mechanical engineers*, 180(1) :371–386, 1965.

RÉFÉRENCES

- [82] Michael Stock and Karol Miller. Optimal kinematic design of spatial parallel manipulators : application to linear delta robot. *Journal of Mechanical Design*, 125(2) :292–301, 2003.
- [83] Yu Xin Su, Bao Yan Duan, B Peng, and RD Nan. A real-coded genetic optimal kinematic design of a stewart fine tuning platform for a large radio telescope. *Journal of Robotic Systems*, 18(9) :507–516, 2001.
- [84] Jiri Tlustý, John Ziegert, and Shannon Ridgeway. Fundamental comparison of the use of serial and parallel kinematics for machines tools. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 48(1) :351–356, 1999.
- [85] Umesh Avadhut Tol, Jean-Philippe Clerc, and Gloria J Wiens. Micro/macro approach for dexterity enhancement of pkm’s. In *Workshop on Fundamentals Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, pages 34–39, 2002.
- [86] Lung-Wen Tsai. Kinematics of a three-dof platform with three extensible limbs. In *Recent advances in robot kinematics*, pages 401–410. Springer, 1996.
- [87] Lung-Wen Tsai. Solving the inverse dynamics of a stewart-gough manipulator by the principle of virtual work. *Journal of Mechanical design*, 122(1) :3–9, 2000.
- [88] Spyros Tzafestas, Minos Kotsis, and Triantafyllos Pimenides. Observer-based optimal control of flexible stewart parallel robots. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 34(4) :489–503, 2002.
- [89] Vadim Utkin, Jürgen Guldner, and Ma Shijun. *Sliding mode control in electro-mechanical systems*, volume 34. CRC press, 1999.
- [90] Vadim Ivanovich Utkin. *Sliding modes and their application in variable structure systems*. Mir publishers, 1978.
- [91] I UTKIN VADIM. Survey paper variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic control*, 22(2), 1977.
- [92] Laurent Vermeiren, Antoine Dequidt, Mohamed Afroun, and Thierry-Marie Guerra. Motion control of planar parallel robot using the fuzzy descriptor system approach. *ISA transactions*, 51(5) :596–608, 2012.
- [93] Andrés Vivas and Philippe Poignet. Predictive functional control of a parallel robot. *Control Engineering Practice*, 13(7) :863–874, 2005.
- [94] R-J Wai, Y-C Huang, Z-W Yang, and C-Y Shih. Adaptive fuzzy-neural-network velocity sensorless control for robot manipulator position tracking. *Control Theory & Applications, IET*, 4(6) :1079–1093, 2010.

RÉFÉRENCES

- [95] Huapeng Wu, Heikki Handroos, Janne Kovanen, Asko Rouvinen, Petri Hannukainen, Tanja Saira, and Lawrence Jones. Design of parallel intersector weld/cut robot for machining processes in iter vacuum vessel. *Fusion engineering and design*, 69(1) :327–331, 2003.
- [96] Zi-Jiang Yang, Kouichi Miyazaki, Shunshoku Kanae, and Kiyoshi Wada. Robust position control of a magnetic levitation system via dynamic surface control technique. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 51(1) :26–34, 2004.
- [97] ZY Yang, T Huang, X Xu, and JE Cooper. Variable structure control of high-speed parallel manipulator considering the mechatronics coupling model. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 34(9-10) :1037–1051, 2007.
- [98] Bing Zhou and Yan Xu. Robust control of a 3-dof hybrid robot manipulator. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 33(5-6) :604–613, 2007.
- [99] Hanqi Zhuang, Jiahua Yan, and Oren Masory. Calibration of stewart platforms and other parallel manipulators by minimizing inverse kinematic residuals. *Journal of Robotic Systems*, 15(7) :395–405, 1998.

Septième partie

ANNEXES

ANNEXE A

Modèle géométrique inverse de manipulateur de Gough-Stewart de type TSSM

A.1 Modélisation géométrique inverse de manipulateur parallèle de Gough-Stewart de type TSSM

La plate-forme du Gough-Stewart que nous avons utilisé dans notre travail est de type TSSM Figure A.1.

Les coordonnées géométriques de la base (voir la Figure A.2) sont données par [50] :

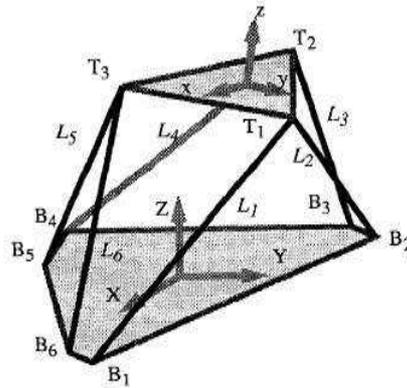


Figure A.1 Plate-forme de Gough-Stewart de type TSSM [27]

$$\begin{cases} B_{x1} = \frac{\sqrt{3}}{6}(2b + d) \\ B_{y1} = \frac{1}{2}d \\ B_{z1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_{x2} = -\frac{\sqrt{3}}{6}(b - d) \\ B_{y2} = \frac{1}{2}(b + d) \\ B_{z2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_{x3} = -\frac{\sqrt{3}}{6}(b + 2d) \\ B_{y3} = \frac{1}{2}b \\ B_{z3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_{x4} = -\frac{\sqrt{3}}{6}(b + 2d) \\ B_{y4} = -\frac{1}{2}b \\ B_{z4} = 0 \end{cases}$$

ANNEXES

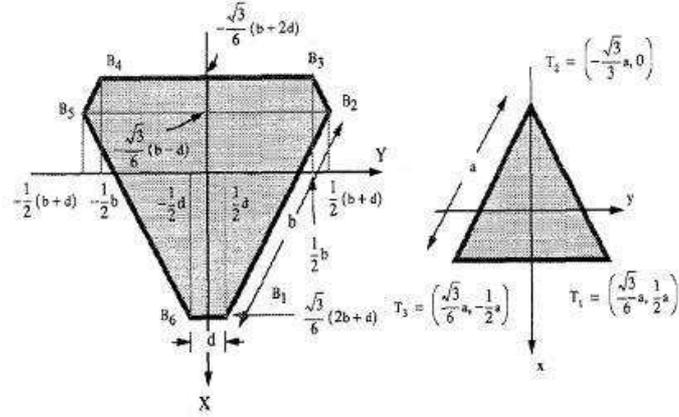


Figure A.2 Dimension physique de la base et de la plate-forme mobile[27]

$$\begin{cases} B_{x5} = -\frac{\sqrt{3}}{6}(b-d) \\ B_{y5} = -\frac{1}{2}(b+d) \\ B_{z5} = 0 \\ B_{x6} = -\frac{\sqrt{3}}{6}(2b+d) \\ B_{y6} = -\frac{1}{2}d \\ B_{z6} = 0 \end{cases}$$

Les coordonnées géométriques de plate-forme mobile (voir la Figure A.2) sont données par [50] :

$$\begin{cases} x_{T1} = \frac{\sqrt{3}}{6}a \\ y_{T1} = \frac{1}{2}d \\ z_{T1} = 0 \\ x_{T2} = -\frac{\sqrt{3}}{6}a \\ y_{T2} = 0 \\ z_{T2} = 0 \\ x_{T3} = \frac{\sqrt{3}}{6}a \\ y_{T3} = -\frac{1}{2}a \\ z_{T3} = 0 \end{cases}$$

En utilisant la transformation homogène, les coordonnées de la partie mobile de la plate-forme de Gough-Stewart sont données dans le repaire de base par :

$$P_{x1} = x + \frac{a}{\sqrt{3}} [\sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma + 60^\circ) + \cos(\beta) \cos(\gamma + 60^\circ)]$$

ANNEXES

$$\begin{aligned}
 P_{y1} &= y + \frac{a}{\sqrt{3}} [\cos(\alpha) \sin(\gamma + 60^\circ)] \\
 P_{z1} &= z + \frac{a}{\sqrt{3}} [\sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\gamma + 60^\circ) - \sin(\beta) \cos(\gamma + 60^\circ)] \\
 P_{x2} &= x - \frac{a}{\sqrt{3}} [\sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma) + \cos(\beta) \cos(\gamma)] \\
 P_{y2} &= y - \frac{a}{\sqrt{3}} [\cos(\alpha) \sin(\gamma)] \\
 P_{z2} &= z - \frac{a}{\sqrt{3}} [\sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\gamma) - \sin(\beta) \cos(\gamma)] \\
 P_{x3} &= x + \frac{a}{\sqrt{3}} [\sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma - 60^\circ) + \cos(\beta) \cos(\gamma - 60^\circ)] \\
 P_{y3} &= y + \frac{a}{\sqrt{3}} [\cos(\alpha) \sin(\gamma - 60^\circ)] \\
 P_{z3} &= z + \frac{a}{\sqrt{3}} [\sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma - 60^\circ) - \sin(\beta) \cos(\gamma - 60^\circ)]
 \end{aligned}$$

Pour calculer la longueur des jambes L_i en fonction de la pose de l'effecteur (position et orientation de l'organe terminal $P = [x, y, z, \alpha, \beta, \gamma]^T$) nous avons utilisé la relation suivante :

$$L_i = \left\| \overrightarrow{A_i B_i} \right\| = \left\| \overrightarrow{A_i O} + \overrightarrow{OC} + R \overrightarrow{C B_i^h} \right\| \quad (\text{A.1})$$

Telque

$$L_i = \sqrt{(P_{xi} - B_{xi})^2 + (P_{yi} - B_{yi})^2 + (P_{zi} - B_{zi})^2} \quad (\text{A.2})$$

Finalement le modèle géométrique inverse de manipulateurs parallèle de Gough-Stewart est donné par :

$$L_1 = \sqrt{\left(P_{x1} - \frac{d}{2\sqrt{3}} - \frac{db}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(P_{y1} - \frac{d}{2} \right)^2 + (P_{z1})^2} \quad (\text{A.3})$$

$$L_2 = \sqrt{\left(P_{x1} - \frac{d}{2\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(P_{y1} - \frac{d}{2} - \frac{b}{2} \right)^2 + (P_{z1})^2} \quad (\text{A.4})$$

$$L_3 = \sqrt{\left(P_{x2} + \frac{d}{\sqrt{3}} + \frac{b}{2\sqrt{3}} \right)^2 + \left(P_{y2} - \frac{b}{2} \right)^2 + (P_{z2})^2} \quad (\text{A.5})$$

$$L_4 = \sqrt{\left(P_{x2} + \frac{d}{\sqrt{3}} + \frac{b}{2\sqrt{3}} \right)^2 + \left(P_{y2} + \frac{b}{2} \right)^2 + (P_{z2})^2} \quad (\text{A.6})$$

ANNEXES

$$L_5 = \sqrt{\left(P_{x3} - \frac{d}{2\sqrt{3}} - \frac{b}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(P_{y3} + \frac{d}{2}\right)^2 + (P_{z3})^2} \quad (\text{A.7})$$

$$L_6 = \sqrt{\left(P_{x3} - \frac{d}{2\sqrt{3}} - \frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(P_{y3} + \frac{d}{2}\right)^2 + (P_{z3})^2} \quad (\text{A.8})$$

ANNEXE B

Modèle dynamique de robot Biglide

B.1 Modélisation dynamique de robot parallèle plan Biglide

Cette Annexe présente le modèle dynamique complet de robot Biglide à 2ddl utilisé dans la simulation numérique. Le modèle dynamique des articulations est donné par [92] :

$$\Gamma = M_a \ddot{q}_a + b \dot{q}_a + \Gamma_t + \Gamma_f \quad (\text{B.1})$$

Où $q_a = [q_{a1} q_{a2}]^T$, $M_a = \text{diag}(m_a m_a) Z$, $\Gamma_f = [\Gamma_{f1} \Gamma_{f2}]^T Z$.

le modèle des articulations élastiques est donné par :

$$\Gamma_t = k_t (q_a - q) + b_t (\dot{q}_a - \dot{q}) \quad (\text{B.2})$$

le modèle de frottement (Stribeck friction) est donné par :

$$\Gamma_{fi} = \begin{cases} [\Gamma_{fc} + (\Gamma_{fs} - \Gamma_{fc}) e^{-(\dot{q}_{ai}/v_s)^2}] \text{sign}(\dot{q}_{ai}) \text{ if } |\dot{q}_{ai}| > 0 \text{ (slip)} \\ \min(|\Gamma_i - \Gamma_{ti}|, \Gamma_{fs}) \text{sign}(\Gamma_i - \Gamma_{ti}) \text{ if } \dot{q}_{ai} = 0 \text{ (stick)} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Où

m_a : représente la masse de l'articulation prismatique .

k_t : représente la raideur de l'articulation prismatique.

b_t est le coefficient d'amortissement de l'articulation prismatique.

Γ_{fs} représente les frottements secs.

Γ_{fc} représente les frottements de coulomb.

v_s représente le coefficient de la vitesse de glissement.

le modèle dynamique de l'effecteur est présenté par :

$$\Gamma_t = \hat{M}(P) \ddot{P} + \hat{N}(P, \dot{P}) \dot{P} \quad (\text{B.4})$$

$$\hat{M}(P) = \begin{pmatrix} m_{L1} + \frac{1}{2}(m - \lambda_1 + \lambda_2) & f_1(P) \\ m_{L2} + \frac{1}{2}(m - \lambda_2 + \lambda_1) & f_2(P) \end{pmatrix}$$

Où

ANNEXES

$$f_1(P) = [(2m_{L1} - 3\lambda_1 - \lambda_2)y^2 + mC(y)^2 + J_1 + J_2]/(2C(y) \cdot y)$$

$$f_2(P) = [(2m_{L1} - 3\lambda_1 - \lambda_2)y^2 + mC(y)^2 + J_1 + J_2]/(2C(y) \cdot y)$$

$$\hat{N}(P, \dot{P}) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \dot{P} + p(y)$$

$$\begin{cases} r_{11} = r_{21} \\ r_{12} = -[(2m_{L1} - 3\lambda_1 - \lambda_2)y^2 + (2m_{L1} - 3\lambda_1 - \lambda_2)C(y)^2 + J_1 + J_2]\dot{y}/(2C(y)^3) \\ r_{22} = [(2m_{L2} - 3\lambda_2 - \lambda_1)y^2 + (2m_{L2} - 3\lambda_2 - \lambda_1)C(y)^2 + J_1 + J_2]\dot{y}/(2C(y)^3) \end{cases}$$

Où m_{Li} est la masse des deux segments de robot Biglide.

$$m_i = m_a + m_{Li}, i = 1, 2.$$

les paramètres du modèle dynamique du robot Biglide utilisés dans la simulation sont présentés dans le tableau suivant [92] :

Tableau B.1 Les paramètres du modèle dynamique de robot parallèle Biglide

Paramètres	Valeurs
la longueur des segments (m)	
a	0.07
Mass (kg)	
m	0.034
$m1$	0.8040
$m2$	0.7940
les premiers moments (kgm)	
ms_1	0.0045
ms_2	0.0043
les deuxièmes moments des segments(kgm^2)	
J_1	222.643×10^{-4}
J_2	2.539×10^{-4}
l'accélération gravitationnelle (ms^2)	
g	9.81
paramètres additionnels	
dans la modèle de simulation la masse (kg)	
λm	0.816

B.2 Interpolation polynomiale de degré cinq

Le recours au calcul polynomial constitue un outil très pratique pour le calcul du mouvement. Les méthodes d'interpolation polynomiale les plus fréquemment rencontrées sont l'interpolation par des polynômes de degré trois et cinq. Nous présentons l'interpolation polynomiale de degré cinq qui assure la continuité du mouvement en position, vitesse et accélération. On dit alors que le mouvement est de classe C^2 [34]. Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$q(0) = q^i, q(t_f) = q^f, \dot{q}(0) = 0, \dot{q}(t_f) = 0, \ddot{q}(0) = 0, \ddot{q}(t_f) = 0 \quad (\text{B.5})$$

et, en utilisant la forme polynomiale suivante :

$$q(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 \quad (\text{B.6})$$

les paramètres de la trajectoire que nous avons utilisé dans la simulation sont présentés dans le tableau suivant [92] :

ANNEXES

Tableau B.2 les paramètres de la trajectoire

Parameters	Values
Trajectoire en bas (T1)	0.07
Origine	
x	0.0102
y	0.0508
Destination	
x	0.1095
y	0.0433
Trajectoire en Haut (T2)	
Origine	
x	0.102
y	0.0596
Destination	
x	0.1095
y	0.0671
Trajectoire à Droite (T3)	
Origine	
x	0.0904
y	0.0567
Destination	
x	0.0798
y	0.0576
Trajectoire à Gauche (T4)	
Origine	
x	0.1316
y	0.0515
Destination	
x	0.1316
y	0.0621

ANNEXE C

Étude de la stabilité

C.1 Théorie de Lyapunov

Dans cette section nous définissons la notion de la stabilité au sens de Lyapunov, et nous passons en revue les principaux outils utilisables pour prouver la stabilité d'un système non linéaire. Cette section est inspirée essentiellement des travaux de Khalil auquel nous avons basé sur les preuves des théorèmes de stabilité.

On considère le système non linéaire d'écrit par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{C.1}$$

Où f est une fonction définie de $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^n$, $x \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur d'état du système.

Un état x_e du système est un point d'équilibre stable s'il satisfait :

$$f(x_e) = 0 \tag{C.2}$$

Les propriétés de stabilité de ce point d'équilibre sont caractérisées par la définition ci-dessous.

C.2 Définition (Stabilité au sens de Lyapunov)

Un point d'équilibre $x = x_e$ du système (C.1) est :

- Un état d'équilibre stable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$\|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon, \dots \forall t \geq 0$$

- Un état d'équilibre asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$$

- Un état d'équilibre globalement asymptotiquement stable (GAS) si pour tout état initial

ANNEXES

$x(0) \in \mathfrak{R}^n$ il est stable et :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e, \forall x(0)$$

On introduit maintenant quelques concepts usuels de fonctions de Lyapunov.

C.2.1 Définition

Une fonction scalaire $V(x)$ est définie positive dans une boule de \mathfrak{R}^n de rayon K si :

- $V(x) > 0, \forall x \neq 0 \text{ et } x \in \mathfrak{R}^n / \|x\| < K$
- $V(x) = 0 \text{ pour } x = 0$

La fonction scalaire $V(x)$ est définie négative dans une boule de \mathfrak{R}^n de rayon K si :

- $V(x) < 0, \forall x \neq 0 \text{ et } x \in \mathfrak{R}^n / \|x\| < K$
- $V(x) = 0 \text{ pour } x = 0$

La fonction scalaire $V(x)$ est semi-définie positive si $V(x) \geq 0$