REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE

UNIVERSITE DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE D'ORAN MOHAMED BOUDHIAF

FACULTE DE GENIE MECANIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

PHYSIQUE I

Polycopie de cours de 1èr Année Licence

Fait par :

Abdellah EL AZZIZI

Maître de Conférence B

I-1 Généralité sur la statique : Notions de point matériel, solide et force :

Si un corps est au repos, cela signifie que les actions (force) extérieures agissant sur lui s'équilibrent en donnant une résultante nulle ; on dit qu'il est en équilibre statique. Lorsque le corps a une forme et une masse négligeables, on l'appelle point matériel.

I-1.1 Point matériel :

Suffisamment petit pour que l'on puisse concentrer sa masse dans un seul point de l'espace, un tel corps est appelé point matériel. Souvent le mot particule est aussi utilisé pour désigner un point matériel. La grandeur et la forme d'un corps considéré comme tel, n'interviennent pas dans le traitement des problèmes en mécanique.

I-1.2 Solide matériel :

Un corps solide (rigide) est considéré comme l'ensemble d'un grand nombre de points matériels. Dans ce cas, sa forme et sa grandeur doivent être prises en compte dans le traitement des problèmes de mécanique.

I-1.3 Force :

Une force est toute action extérieure à un corps, capable soit à distance, soit par contact, de modifier son état de repos (le mettre en mouvement) ou son état de mouvement (augmenter ou diminuer sa vitesse ou encore changer sa trajectoire).

I-2 Statique du solide :

Dans ce qui suit, lorsque l'on parle de corps, il s'agira toujours de corps rigide (non déformable).Certes, il subit des déformations sous l'effet d'actions extérieures, mais compte tenu de sa rigidité et de sa solidité, ces déformations demeurent non apparentes ; autrement dit le corps conserve sa forme initiale.

I-2.1 Représentation vectorielle d'une force :

La force représente en générale l'action d'un corps sur un autre. Pour la définir, on devra préciser sa grandeur F, son orientation (direction et sens) et son point d'application A (fig I-1). Ce sont les trois principales caractéristiques d'une force.

Fig I-1 : Caractéristique d'une force

I-2.2 Moment d'une force par rapport à un point et par rapport à un axe :

I-2.2.1 Moment par rapport à un point :

Soit F une force représentée par le vecteur AB et o un point quelconque dans l'espace ; le vecteur F et le point o définissent un plan qui peut être vertical (Fig I-2)

Fig I-2 : Principe du mouvement d'une force par rapport à un point

On définit alors le moment de la force F représentée par le vecteur AB (Fig I-2), par rapport au point o, comme étant le produit vectoriel illustré par l'expression suivante :

$$M_0F = OA \times AB \qquad \text{(I-1)}$$

En sachant par ailleurs que OA = OH + HA,

Et avec HA // AB et OH $\perp$ AB, il vient :

$$|M_0F| = OH \cdot F \qquad \text{(I-2)}$$

Ce moment est aussi définit comme étant le moment de F par rapport à un axe passant par le point 0 et perpendiculaire au plan contenant F ; dans ce cas de figure, c'est le vertical.

I-2.2.2 Moment par rapport à un axe :

Soit une force F et un axe (Δ) quelconque comme l'indique la figure I-3.

Fig I-3 : Principe du moment d'une force par rapport à un axe

Le moment de la force F par rapport à l'axe (Δ) est définit tel que, pour tout 0 appartenant à (Δ), on a le produit vectoriel vérifié :

$$M_{(\Delta)}\, F = OA \times F \qquad \text{(I-3)}$$

On décompose le vecteur OA en écrivant OA = OH + HA, il vient :

$$|M_{(\Delta)}\ F| = OH\ .\ F \qquad \text{(I-4)}$$

I-2.3 Torseurs :

Caractéristiques - Equivalence - Torseurs des forces extérieures à un solide :

Les torseurs ont un rôle analogie à celui des vecteurs. Ils peuvent être utilisés pour représenter des actions mécaniques. Dans ce cas, ils permettent une représentation et une description très détaillée des efforts de contact au niveau des liaisons usuelles (encastrement, pivot, lissière,.)

Avant d'entamer cette notion de torseurs proprement dite, il est souhaitable de comprendre d'abord l'équivalence statique des systèmes de forces.

I-3.3.1 Système de forces statiquement équivalents :

Deux systèmes (ou plusieurs) de forces sont dits statiquement équivalents s'ils ont même somme vectorielle et même moment en tout point. Citons- en quelques exemples :

Exemple 1 : Une force F et ses composantes F_1 et F_2

Fig I-4 : Système de forces équivalent à une force et ses composantes

Exemple 2 : Un couple et deux forces égales et opposées (Fig I-5)

Fig I-5 : Systèmes de forces équivalents à un couple et deux forces égales et opposées

Exemple 3 : Système d'une force F quelconque appliquée en un point donné, équivalent à une force et un couple (FigI-6) :

Fig I-6 : Systèmes d'une force, équivalent à une force et un couple

Exemple 4 : Généralisation de l'exemple précédent :

Un système de n forces (F_1 ; F_2, F_3, …F_n) est statiquement équivalent en tout point de l'espace, à un système composé de ;

- La somme vectorielle $S = \sum_i^n$ Fi

Et

- du moment (couple) $M_AS = \sum_i^n M \quad F$

Limitons le nombre de forces à n = 3 par exemple, la figure I-7 ci-dessous illustre cette équivalence statique.

Fig I-7 : Système de plusieurs forces, équivalent à la somme et au moment de ces forces

I-2.3.2 Définition d'un tenseur d'actions mécaniques :

C'est un ensemble constitué de deux grandeurs :

- Une force S (ou une somme vectorielle résultante) indépendante du point A choisi,

- Un couple M_A (ou moment résultant) qui est fonction du point A choisi. On écrit un torseur comme suit :

Torseur en A : $[T]_A$ = ensemble {Force S , Couple M_A S } (I-5)

S et M_A sont appelés éléments réducteurs du torseur $(T)_A$.

L'écriture d'un tenseur en point A des actions mécaniques de contact exercées par un solide 1 sur un solide 2 est :

$$[T_{1/2}] = \{ S_{1/2} , M^{1/2} \}_A \qquad \text{(I-6)}$$

I-2.3.3 Ecriture en un point B d'un torseur complément connu en un point A :

L'écriture d'un torseur en un point A de l'espace, est statiquement équivalent à l'écriture en n'importe quel autre point.

Ecriture du torseur connu en A : $[T]_A$ { S_A , M_AS}$_A$, Il vient :

Ecriture du torseur au point B :

$$[T]_B = \{\ S_B = S_A = S,\ \ M_BS_B = M_AS_A + BA \times S\} \qquad \text{(I-7)}$$

Cette relation est illustrée dans la figure I-8 ci-après :

Fig I-8 : Ecriture en un point B d'un torseur connu en un point A

M_A et M_B désignent respectivement les moments des torseurs aux point A et B.

M_AS et M_BS désignent respectivement les moments de la force S aux points A et B.

La somme S des efforts, à la même valeur en tout point, le moment résultant M_A est obtenu par la relation :

$$M_B = M_A + BA \times S = M_A + M_BS \qquad \text{(I-8)}$$

Exemple : Un tourillon d'arbre (Fig I-9)

On donne : S= 100saN.m et M_A = 10daN.m , le torseur $[T] = \{\ S\ ,\ M_A\}$ est connu en A. On doit donc déterminer sa valeur en B. La force S reste entendue inchangée.

On écrit :

$M_B = M_A + BA \times S$

$$= \begin{array}{c} 10 \\ 0 \\ 0 \end{array} + \begin{array}{ccc} i & j & k \\ -0.1 & -0.004 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{array} = \begin{array}{c} 10 \\ 0 \\ 0 \end{array} + \begin{array}{c} -4 \\ 10 \\ 0 \end{array} = \begin{array}{c} 6 \\ 10 \\ 0 \end{array}$$

Il vient : MB = $\sqrt{6^2 + 10^2} = 11.66\ daN.m$

I-2.3.4 Opération sur les torseurs :

I-2.3.4.1 Somme des torseurs :

La somme de n torseurs n'est possible que s'ils sont tous écrits au même point. Soient les torseurs suivants écrits tous même point A :

$[T_1] = [S_1, M_{1A}]_A$; $[T_2] = [S2, M_{2A}]_A$;$[T3] = [S_3, M_{3A}]_A$; …$[T_i] = [S_i, M_{iA}]$

Leurs Somme s’écrit:

$$[T] = \sum_1^n [Ti] = \begin{cases} \sum_i S\,\mathrm{i} \\ \sum_i M\mathrm{iA} \end{cases} \qquad \text{(I-9)}$$

I-2.3.4.2 Produit d’un torseur et d’un scalaire :

Soit a un scalaire qu’il fait multiplier par un torseur $[T]_A = \{S_A, M_AS\}_A$, on écrit : $a.[T] = a.\{SA , M_AS\}_A = \{ a.S_A , a.M_AS\}_A$ (I-10)

I-2.3.4.3 Egalité des torseurs :

Deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ sont égaux si leurs forces et leurs moments respectifs sont égaux. On écrit :

$$S_1 = S_2 \text{ et } M_1 = M_2 \qquad \text{(I-11)}$$

I-2.3.5 Cas particuliers des torseurs :

I-2.3.5.1 Torseur couple [C] :

C’est le cas où la somme S des forces extérieures est nulle, alors le torseur [T] équivaut au moment M et on écrit :

$$[T]_A = [C] = \{O, M\}_A \qquad \text{(I-12)}$$

Cette écriture est valable quelque soit le point A puisque dans ce cas, on a toujours la relation $M_A + BA \times S = M_A + O$, Vérifiée.

On retrouve ainsi la propriété fondamentale d’un couple C, d’avoir la même valeur en tout point de l’espace (fig I-10)

Fig I-10 : Equivalence d’un torseur couple à un couple C

I-2.3.5.2 Glisseur :

C’est le cas où le torseur se traduit à une somme S non nulle et à un moment MA nul. Soit l’écriture suivante :

$$[T]_A = [G] = \{S , O\}_A \qquad \text{(I-13)}$$

Le support de S est appelé axe du glisseur.On peut qualifier ce dernier aussi comme une équivalence à la somme des forces résultantes de toutes les forces extérieures.

On veut écrire maintenant le glisseur en un autre point éloigné de A. Soit I ce point comme indiqué sur la figure I-11.

Fig I-11 : Ecriture d'un glisseur en un autre point

On écrit alors :

$$[G] = \{S, O\}_A = \{S\ ,\ M_I = O + IA \times S\}_I \qquad \text{(I-14)}$$

Remarque: Dans le cas d'un glisseur, on a toujours la relation $M_IS = 0$ qui représente le produit scalaire entre le moment M_I du glisseur au point I et le vecteur somme S, vérifiée. Ceci étant car MI est perpendiculaire à ,S (fig I-11).

I-2.3.5.3 Torseur nul :

C'est tout simplement un torseur où la somme S des forces extérieures ainsi que le moment M en un point A donné, sont tous les deux nuls. On écrit :

$$[O] = \{\ 0, 0\}_A \qquad \text{(I-15)}$$

I-2.3.6 Condition d'équilibre d'un solide sous l'action de « n» torseurs :

Un solide G sous l'action de n torseurs, est en équilibre si la somme de ces torseurs est égales au torseur nul en un point ; soit I ce point comme le montre la relation(I-16) ci-dessous.

$$[T_{I/G}]_I + [T_{2/G}]_I + [T_{3/G}]_I + \ldots[T_{i/G}]_I + \ldots + [T_{n/G}]_I = [0] \quad \text{(I-16)}$$

I-2.4 Principe de l'action et la réaction :

I-2.4.1 Définition : Lorsqu'un corps A subit une force d'action, cela signifie que cette action émane d'un autre corps B ; soit par contact, soit à distance. Sous l'action de B, A réagit par une autre force opposée à celle de B. Cette force est appelée force de réaction.

D'où le principe : « Les forces d'action et de réaction qui se manifestent entre deux corps, ont la même grandeur, la même ligne d'action(support) mais des sens opposés». La figure I-12 illustre bien ce principe, où $F_{B/A}$ est la force d'action du corps B sur le corps A et $R_{A/B}$ est la force de réaction du corps A sur le corps B.

Fig I-12 : Principe d'action et de réaction entre deux corps A et B

Exemple 1 : Un boulet métallique de masse m, posé dans le creux d'une main (Fig I-13). Il exerce une action qui est son poids $P = mg$ sur la main qui réagit avec une action opposée à P ; soit $R_{main/boulet} = -P$

Exemple 2 : Traction d'un ressort (Fig I-14) : En exerçant une force de traction F sur un ressort, celui-ci réagit en même temps par une autre force R égale en module et opposée en sens à F.

Fig I-15 : Traction d'un ressort

I.2.5 Exercices d'applications :

Exercice N°01 :

Une console comportant deux barres AB et AC (voir fig I-15)

AB et AC sont supposées articulées en B et C et assemblées en A par un boulon assimilé à un point matériel. On suspend en A une charge

 P = 500 Kg. On admet que les forces exercées par les barres sur le boulon sont dirigées suivant les axes de ces barres.

Déterminer l'intensité de chacune de ces forces ainsi que leurs sens respectifs.

Solution :

Ecrivons l'équation d'équilibre des forces extérieures agissant sur le système :

$\sum F_{Ext} = 0$

Soit : $P + F_{AB} + F_{AC} = 0$

La résultante R de FAB et FAC est donc directement opposée à P comme indique la figure I-16 ci-dessous.

La résultante R est représentée par le vecteur AD directement opposé au vecteur AE qui représente la charge P.

La décomposition de R suivant les supports de BA et de CA, donne naissance aux forces F_{AB} et F_{AC} dont les vecteurs représentatifs respectifs sont AH et AG.

Le calcul des composantes F_{AB} et F_{AC},de R peut se faire graphiquement ou algébriquement .

- Graphiquement : Il suffit de construire la figure I-16 en choisissant l'échelle convenable sachant par hypothèse AB = 1.50m, BC = 0.75m et p = 500Kg ≈500daN.

On peut alors mesurer directement sur la figure les valeurs des intensités de F_{AB} et F_{AC} .

- Algébriquement : Considérons le triangle AGD en posant : FAB = AH = GD = AD/ tgα et FAC = AG =AD/tg α

Par ailleurs on a (figI-18):tg α = BC/BA = 0.75/1.50 = 0.25 → α = 26°30'

→ sin α = 0.446

Avec AD = R = P = 500Kg, il vient enfin :

FAB = 500/0.5 = 1000daN et FAC = 500/0.446 = 1121daN

Exercice N°2 :

Un cylindre repose sur un plan incliné comme indique la figure ci-dessous (fig I-17). Il est en équilibre sous l'action de son poids P,de la traction T du ressort dynamométrique qui l'empêche de rouler et de la réaction N du plan . Celle-ci est supposée perpendiculaire au plan incliné (les frottements sont négligeables).

Calculer les forces N et T. On donne P = 20daN et $\alpha = 30°$

Solution :

Reprenons le système de la figure I-17 ci-dessus auquel, on lie le repère oxy, tel que l'origine O est au centre du cylindre 5figI-18).

La condition d'équilibre du cylindre est vérifiée par la relation :

$\sum F_{EXT} = 0 \leftrightarrow P + N + T = 0$

En projetant cette relation sur les axes ox et oy, il vient :

Sur ox : $P\sin\alpha = 0$ (a)

Sur oy : $-P\cos\alpha + N = 0$ (b)

De (a) on tire $t = P\sin\alpha = 20\sin 30° = 10$daN

De (b) on tire $N = P\cos\alpha = 20\cos 30° = 17.32$daN

I-3 Centre de Gravité :

I-3.1 Définition du centre de gravité :

La force d'attraction qu'exerce le globe terrestre sur un corps solide est tout simplement le poids P de ce corps. Le point d'application de cette force P appelé centre de gravité du solide (fig I-19)

Remarques :

- En réalité P est la résultante des forces ΔP_i de tous les éléments constituant le corps
- Si le corps est homogène, son centre de gravité est confondu avec son centre géométrique.

Fig I-19 : Centre de gravité d'un corps solide

I-3.2 Calcul du centre de gravité d'un corps solide :

I-3.2.1 Cas d'une surface :

Considérant plaque homogène, d'épaisseur constante e [m]. La grandeur du poids ΔP d'un élément de surface dA de la plaque est donnée par l'expression :

$$\Delta P = \omega.e.dA \ \ [Kg] \qquad (I\text{-}18)$$

Où $\omega = \rho g$ est le poids spécifique de la plaque $[Kg/m^2S]$

dA est la section élémentaire $[m^2]$

Le poids total P de la plaque est à la somme des poids de tous les éléments constituant la plaque.

Soit :

$$P = \sum \Delta P_i \qquad (I\text{-}19)$$

ω et e étant tous les deux constants (I-19) peut encore s'écrire :

$$P = \sum \omega \ . \ e \ .dA$$

En posant $A = \sum dA_i$ qui est l'aire totale de la plaque, égale à la somme de toutes les surfaces élémentaires. Il vient :

$$P = \ \omega \ . \ e \ .dA \qquad (I\text{-}20)$$

Pour situé le centre de gravité de la plaque, il faut chercher ses coordonnées dans un repère préalablement choisi. Puisqu'il s'agit d'une surface, un repère oxy conviendrait mieux.

Soit X_G et Y_G les coordonnées du centre de gravité G de la plaque dans le repère choisi.

Ecrivons la somme des moments des poids élémentaires ΔP_i par rapport aux axes x et y. Cette somme n'est autre que le moment résultant de P par rapport à ces mêmes axes.

$$M \ P_{/x} = y_G \ . \ P = \sum M \ \Delta P_{i/x} = \sum y_i \ . \ \Delta P_i \qquad (a)$$

et (I-21)

$$M\ P/y = x_G\ .\ P = \sum M\ \Delta P_{i/y} = \sum x_i\ .\ \Delta P_i \qquad (b)$$

Si l'on augmente indéfiniment le nombre d'éléments,le poids de la plaque peut s'écrire :

$$P = \int \Delta P \qquad (I\text{-}22)$$

Les relations (I-21) auront une autre forme:

$$M\ P_{/x} = y_G\ .P = \int y\ \Delta P \qquad (c)$$

et (I-23)

$$M\ P_{/y} = x_G\ .\ P = \int x\ .\ \Delta P \quad (d)$$

Des relations (I-21) ou (I-23) , on peut calculer les coordonnées de G, sachant le poids total P de la plaque et les poids élémentaires ΔP_i

I-3.2.2. Cas d'une courbe :

Les mêmes équations utilisées pour les surfaces, seront appliquées dans le cas des courbes. Un fil par exemple dont l'axe appartient au plan xoy.

On peut remarquer (Fig I-20) que le centre de gravité ne se trouve pas nécessairement à l'intérieur du fil. Cela dépend bien entendu de la courbe du fil. Si le fil n'était pas une courbe, son centre de gravité serait à l'intérieur sur son axe.

Fig I-20 : Centrede gravité d'un fil

Si le fil n'était pas homogène, il serai donc constitué de plusieurs éléments. Le poids d'un élément de longueur ΔL [m] et de poids spécifique ω [Kg/M^2S^2] est donné par :

$$\Delta P = \omega\ .\ a\ .\ \Delta L \qquad (I\text{-}24)$$

Avec a [m^2] la section du fil supposée constante

.Pour un fil homogène, le centre de gravité G (appelé aussi centroïde) coïncide avec celui de la ligne géométrique,C, qui définit ce fil (fig I-21).

Fig I-21 : Centre de gravité d'un fil homogène d'épaisseur négligeable

Ainsi, pour un fil et d'épaisseur négligeable, on écrit : les équations suivantes :

$$x_G = 1/L \int xdL$$

et (I-25)

$$y_G = 1/L \int ydL$$

Qui représente respectivement suivant les axes x et y, les coordonnées du centre de gravité d'un fil homogène d'épaisseur négligeable.

Le tableau I-2 ci-après présente les positions du centre de gravité de quelques courbes usuelles.

Tableau I-2 Centre de gravité de quelques courbes usuelles

I-3.2.3 Cas de surface non homogène :

Une surface non homogène est une surface composée de plusieurs surfaces élémentaires homogènes. Souvent, une plaque d'épaisseur négligeable est considérée comme telle.

En effet, pour connaître le centre de gravité d'une plaque non homogène, il faut d'abord connaître ceux des surfaces homogènes qui la composent. Ces surfaces élémentaires n'ont pas nécessairement des géométries identiques.

Soit G le centre de gravité recherché de la plaque et ses coordonnées sont x_G et y_G dans le plan xoy (Fig I-22).

Fig I-22: Centre de gravité d'une plaque composée

On détermine les coordonnées x_G et y_G du centre de gravité, respectivement à partir des coordonnées x_{G1}, x_{G2}, …et y_{G1}, y_{G2}, …des centres de gravités des surfaces élémentaires composant la plaque. Pour cela, il faut exprimer le moment du poids total P de la plaque par rapport à l'axe des y, pour calculer x_G et, par rapport à l'axe des x, pour calculer

y_G. Les poids P_i élémentaires ainsi que leurs coordonnées correspondantes sont supposés connus.

On écrit en posant $P = \sum_i Pi$ qui exprime le poids total de la plaque, résultant de la somme des poids P_i de toutes les surfaces élémentaires.

$$M/y = \sum_i My\ Pi$$

et (I-26)

$$M/x = \sum_i Mx\ Pi$$

Ou encore en valeurs absolues :

$$|M\ y\ P| = \sum_i x\ Gi\ .Pi$$

et (I-27)

$$|M\ x\ .P| = \sum_i yGi\ .Pi$$

Si la plaque était homogène et d'épaisseur négligeable, son centre de gravité G serait confondu avec son centre géométrique C. Il est tout à fait évident que pour les surfaces élémentaires A_1, A_2, …(homogènes), les centres de gravités sont confondus avec les centres géométriques

(Fig I-23). Dans ce cas, les coordonnés x_c et y_c du centre géométrique C (centroïde) de la plaque, se calculent à partir des moments statiques, respectivement par rapport à y et par rapport à x, de la surface composée de la plaque.

Fig I-23 : Centre de gravité d'une plaque composée homogène

On écrit en posant $A = \sum_i Ai$ qui exprime l'aire résultante de la somme de toutes les aires A_i des surfaces élémentaires composant la plaque.

$$M_{st/y}\ .\ A = \sum_i Msty\ .Ai$$

et (I-28)

$$M\ st/x\ .\ A = \sum_i M\ stx\ .Ai$$

Ou encore e

$$|M\ st\ .A| = \sum_i M\ st\ .Ai = x_c\ .\ A$$

et (I-29)

$$|M\ stx\ .A\ | = \sum_i M\ stx\ .Ai = y_c\ .\ A$$

Remarque : Les moments statiques des surfaces, comme les moments des forces ; peuvent être positifs ou négatifs. Par exemple, une surface qui aurait son centre de gravité G (son centroïde C) du côté négati de l'axe y, aurait un moment statique négatif par rapport à cet axe. Aussi, par convention, l'aire d'un évidemment doit être affecté d'un signe moins.

I-3.2.4 Cas d'un volume :

Le corps en question ici et dans l'espace (Fig I-24) ; toutes les coordonnées x_G , y_G et z_G du entre de gravité G suivant les trois axes x,y et z sont calculés.

Fig I-24 : Centre de gravité d'un volume

A partir de la figure I-24.a ci-dessus, on peut écrire les relations suivantes, exprimant les moments du poids du corps, respectivement par rapport à l'axe z et par rapport à l'axe x.

$$x_P = \sum_i M\ .Piz = \sum_i xGi\ .Pi$$

et (I-31)

$$z_G = \sum_i M\ .P\ ix = \sum_i zGi\ .Pi$$

en faisant subir maintenant au corps une rotation de 90° comme le montre la figure I-24.b, il vient :

$$y_G\ .\ P = \sum_i M\ .Pix = \sum_i yGi\ .Pi$$

et (I-32)

$$x_G\ .\ P = \sum_i M\ .Piy = \sum_i xGi\ .Pi$$

qui exprime respectivement les moments du poids du corps par rapport aux axes x et y.

Une deuxième rotation de 90° de la figure I-36.b, donne naissance aux relations suivantes qui expriment respectivement les moments du poids du corps par rapport aux axes y et z (Fig I-24.c).

$$z_G \, . \, P = \sum_i M \, . Piy = \sum_i zGi \, . Pi$$

et (I-33)

$$y_G \, . \, P = \sum_i M \, . Piz = \sum_i yGi \, . Pi$$

Des relations (I-31), (I-32) et (I-33), on peut calculer les coordonnées du centre de gravité G du corps sachant bien entendu le poids P du corps ainsi que les positions des G_i et les poids P_i des corps élémentaires composant ce corps.

Si le corps est homogène et de masse volumique ρ, la grandeur du poids P_i de chaque i ^{ème} élément s'exprime en fonction du volume élémentaire dV_i de cet élément.

On écrit :

$$P_i = \rho \; g \; dV \qquad \text{(I-34)}$$

Donc le poids total P s'exprime lui aussi en fonction du volume total V du corps.

Ainsi :

$$P = \rho \; g \; V \qquad \text{(I-35)}$$

Ou encore :

$$x_G \, . \, P = x_G \, . \, \rho \; g \; V \qquad \text{(I-36)}$$

En combinant la relation (I-36) avec les relations (I-31), (I-32) et (I-33), on peut écrire :

$$x_G \, . \, \rho.g.V = \sum_i xGi \, . \rho gVi \qquad \text{(a)}$$

$$y_G \, . \, \rho.g.V = \sum_i yGi \, . \rho gVi \qquad \text{(b)} \qquad \text{(I-37)}$$

$$z_G \, . \, \rho. \, G.V = \sum_i zGi \, . \rho gVi \qquad \text{(c)}$$

Ce qui nous ramène à :

$$x_G . V = \sum_i xGi\ dVi \qquad (a)$$

$$y_G . V = \sum_i Gi\ dVi \qquad (b) \qquad (I\text{-}38)$$

$$z_G . V = \sum_i zGi\ dVi \qquad (c)$$

Remarque: Les relations (I-38) s'utilisent si le corps est non homogène.

Comme le corps est homogène, les relations (I-38) s'écrivent :

$$x_G .V = \int xdV \qquad (a)$$

$$y_G .V = \int ydV \qquad (b) \qquad (I\text{-}39)$$

$$z_G .V = \int zdV \qquad (c)$$

Les équations $\int xdV$, $\int ydV$ et $\int zdV$ sont appelées moments statiques du volume V, respectivement par rapport aux plans yoz, zox et xoy. Dans ce cas, les coordonnées de G sont confondues avec celles du centroïde C du corps.

Les relations (I-39) deviennent alors :

$$x_C .V = \int xdV \qquad (a)$$

$$y_C .V = \int ydV \qquad (b) \qquad (I\text{-}40)$$

$$z_C .V = \int zdV \qquad (c)$$

Comme on peut bien le constater dans ces relations, dV est l'élément de volume et x, y et z sont les paramètres d'intégrations ou encore les coordonnées du centroïde du volume élémentaire.

Remarque :

- Si le volume (corps homogène)possède deux plans de symétrie, son centre de gravité se trouve sur leur droite d'intersection. En choisissant par exemple l'axe x comme étant cette droite, on peut écrire : $y = z = 0$. x_G sera alors la seule coordonnée à déterminer.
- Si le volume (corps homogène) possède trois plans de symétrie, son centre de gravité se trouve confondu avec l'origine des axes O. On peut écrire : $x = y = z = 0$. Dans ce cas les coordonnées du centroïde C sont : $x_C = y_C = z_C = 0$

Le tableau I- ci-après montre les centres de gravité de quelques volumes de corps homogènes.

I-3.2.5 Application des théorèmes de Pappus et Guldin dans le calcul du centre de gravité :

I-3.2.5.1 Rappels de quelques définitions :

- Surface de révolution : C'est une surface engendrée par une courbe plane autour d'un axe fixe (Fig I-25).

Fig I-25 : Surface de révolution

- Volume de révolution : C'est un volume engendré par une surface plane autour d'un axe fixe (Fig I-26)

Fig I-26 : Volume de révolution

Enoncés des théorèmes :

1er Théorème : « L'aire d'une surface de révolution ets obtenue en multipliant la longueur de la courbe plane génératrice par la distance parcourue par le centre de gravité (centroïde pour courbe homogène) de la courbe lors de la rotation autour d'un axe fixe».

L'aire A de la surface s'écrit alors (Fig I-27) :

$$A = L \,.\, C_G = L \,.\, 2\pi .\, Gg \qquad \text{(I-41)}$$

L est la longueur de la courbe plane génératrice

$C_G = 2\,\pi\,.\,Gg$ est la distance par courue par G lors de la révolution autour de x'x (circonférence de rayon Gg).

Fig I-27 Principe du 1er théorème de Guldin

Le centre de gravité tourne dans un plan perpendiculaire à x'x comme indique dans la figure ci-dessus. Soit y'y l'axe perpendiculaire à x'x et appartenant au dit plan et considérons que la quantité gC_G qui est le rayon de la circonférence engendrée par la rotation de G, appartient à l'axe y'y.

Avec ces considérations, on peut déterminer intégralement l'aire totale A engendrée par la rotation de courbe de longueur L.

En effet, soit dL un élément de la longueur L de la courbe génératrice en rotation autour de l’axe x'x. L’aire dA (Fig I-28) que doit donc engendrer dL est exprimé par : fig I-28 : Elément d’aire dA

$$dA = 2\,\pi y dL \qquad \text{(I-42)}$$

$$A = \int dA = \int_0^L 2\,\pi\, y\, dL = 2\,\pi\, y_G\, L \qquad \text{(I-43)}$$

y_G étant la coordonnée du centre de gravité. Il vient :

$$A = 2\,\pi y_G L \qquad \text{(I-44)}$$

Il est claire que pour une courbe homogène, le centre de gravité G est confondu avec le centre géométrique C et on écrit dans ce cas :

$$A = 2\pi y_C L \qquad \text{(I-45)}$$

La quantité $2\pi y_C$. L est la distance par courue par le centroïde C de la courbe lors de sa rotation autour d l’axe x'x.

2ème Théorème : « Le volume de révolution est égal au produit de l’aire d’une surface par la distance parcourue par le centre de gravité (ou centroïde pour surface homogène) de la surface lors de la rotation autour d’un axe fixe»

Considérons en effet un élément dA de la surface génératrice A en rotation autour de l’axe x'x comme le montre la figure I-29 ci-après.

Fig I-29 : Principe du2ème théorème de Guldin

Le volume élémentaire dV engendré par dA est égal à :

$$dV = 2\pi y dA \qquad \text{(I-46)}$$

Alors le volume total engendré par la surface A est :

$$V = \int dV = \int 2\pi y dA = 2\pi \int y dA$$

$$V = 2\,\pi y_G A \qquad \text{(I-47)}$$

Pour une surface homogène, G est confondu avec C et on peut écrire :

$$V = 2\,\pi y_C A \qquad \text{(I-48)}$$

I-3.3 Exercices d’applications :

Déterminer en fonction du rayon r et de l’angle θ, les coordonnées du centre de gravité G ou du centroïde C de l’arc de cercle homogène montré sur la figure I-30 ci-dessous. Calculer ensuite ces coordonnées si θ= 45° et r = 30 cm.

Fig I-30

Solution :

En regardant le schéma de la figure, on constate que l’arc de cercle possède une symétrie par rapport àl’axe x. Ce qui nous permet d’écrire que :

$y_G = y_C = 0$

Quant à la coordonnée xg, procédons comme suit :

Puisque l’arc est homogène, on va intégrer sur toute la longueur de l’arc.

Considérons l’arc élémentaire tel que (Fig I-31)

$dL = r\, d\alpha$

La longueur L de l’arc est égale à :

$L = \int dL = \int_{-\theta}^{+\theta} r d\,\alpha = 2r\,\theta$

Calculons le moment statique dela courbe L par rapport à y. Il vient

$\int xdL = x_G \,.\, L = x_C \,.\, L$

En substituant l’expression de L dans la dernière relation, on obtient :

$x_G = x_C = \int xdL/L = \int_{-\theta}^{+\theta} x\, r d\,\alpha/2r\,\theta$

En posant x= r.cosα, en sachant que α évolue de – θ à + θ. Il vient :

$x_G = x_C = \int_{-\theta}^{+\theta} (r\cos\alpha).\, r d\alpha/\, 2r\,\theta = r^2 \int_{-\theta}^{+\theta} \cos\alpha d\,\alpha/2r\,\theta = r/2\,\theta\, [\sin\theta]$

d’où $x_G = xC = r\sin\theta/\,\theta$

A.N Avec r = 30 cm = 0.3m et $\theta = 45° = \pi/4$ rad, on trouve après calcul :

$x_G = x_C = 0.27$ m = 27 cm.

ExerciceN°2 :

Soit la surface représentée par la figure I-32 ci-dessous. Déterminer les coordonnées du centre de gravité de la surface supposée homogène. Calculer ensuite ces coordonnées si l'on donne a = 2 cm , b = 8 cm

Fig I-32

Solution :

La surface étant homogène, on peut donc déterminer x_C et y_C par intégration :

$x_C \cdot A = \int x dA$ (a)

et

$y_C \cdot A = \int y dA$ (b)

dA est élément de surface telle que :

$A = \int dA$

Qui représente l'aire totale de la surface. On peut écrire cette aire aussi par l'expression suivante (Fig I-47) :

$A = \int y dx$ (c)

y évolue ici dans l'intégrale en fonction de x ; soit y(x).

Avant de procéder au calcul de l'aire A, éliminons k dans la fonction

$y(x) = k\,x^2$, pour le remplacer par a et b qui sont connus.

D'après le schéma de la figure I-33,

on pose :

$x = a$ et $y = b \Leftrightarrow y = b = ka^2 \Rightarrow k = b/a^2$

Ce qui nous permet d'écrire alors :

$y(x) = b/a^2 .x^2$ (d)

en substituant l'expression de y(x) donnée par la relation (d), dans la relation (c), il vient :

$A = \int_0^a \frac{b}{a2} . x2 \, dx$

D'où

$A = \frac{ab}{3}$ (e)

Reprenons maintenant la relation (a) donnant le moment statique de la surface d'aire A par rapport à l'axe y et effectuons l'intégration de 0 à a en utilisant au passage les relations (c) et (d). Il vient :

$x_C . A = \int_0^a x . y dx = \frac{a2b}{4}$ (f)

On en fera de même pour le moment statique de A par rapport à l'axe x. Il vient :

$y_C . A = \int_0^a y . y dx = \frac{a.b2}{10}$ (g)

Des relations (f) et (g), on tire donc :

$x_C = \frac{3a}{4}$ et $y_C = \frac{a.b2}{10.A}$

Avec $A = \frac{a.b}{3}$ (relation (e), il vient alors :

$x_C = \frac{3a}{4}$ et $y_C = \frac{3b}{10}$

A.N :

$x_C = 1.50$ cm

$y_C = 2.40$ cm

Remarques :

- Pour situer donc la position de C, il suffit de reporter ses coordonnées en respectant le repère xoy choisi.

- ❖ On obtient le même résultat en calculant le moment statique de l'aire A de la surface par rapport à l'axe x.

Exercice N°3 :

Soit la surface A de la plaque homogène représentée par le schéma de la figure I-34 ci-dessous. Calculer les coordonnées du centre de gravité G de la plaque supposée d'épaisseur négligeable.

Fig I-34

Solution :

La plaque étant d'épaisseur négligeable ; on va la présenter sous le schéma de la figure I-35 ci-dessous, en la décomposant en trois surfaces élémentaires homogènes A_1, A_2 et A_3 de géométries connues, accessibles u calculs. Procédons comme pour le caqs de l'exercice précédent. On doit d'abord calculer les coordonnées des centres de gravité (centroïdes) des surfaces élémentaires A_1, A_2 et A_3 ainsi que les valeurs de leurs aires respectives A_i .

Fig I-35

Utilisons là aussi le tableau I-1, ilvient :

Centroïde C_1 (A_1 est rectangle)

$x_{C1} = \frac{1}{2}\,LI = \frac{1}{2}\,c$; $y_{C1} = OK + \frac{KL}{2} = a + \frac{b}{2}$ et $A_1 = b.c$ (a)

Centroïde C_2 (A_2 est triangle)

$x_{C2} = \frac{1}{2}\,KJ = \frac{1}{3}\,c$; $y_{C2} = \frac{2}{3}\,OK = \frac{2}{3}\,a$ et $A_2 = \frac{OK.KJ}{2} = \frac{a.c}{2}$ (b)

Centroïde C_3 (A3 est demi-cercle sans matière)

$x_{C3} = c - \frac{4r}{3\pi}$; $y_{C3} = a + \frac{1}{2}b$ et $A_3 = -\frac{\pi r2}{2}$ (c)

L'aire totale A de la surface est donnée par l'expression suivante :

$$A = \sum_i Ai = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A = \frac{c(2b+a)-\pi r2}{2} \qquad \text{(d)}$$

Les moments statiques de l'aire totale a de la surface par rapport aux axes x et y sont respectivement :

Moment statique de A par rapport à l'axe x :

$$M_{STA/x} = y_C.A = \sum_i yci.Ai \qquad \text{(e)}$$

Moment statique de A par rapport à l'axe y :

$$M_{STA/y} = x_C.A = \sum_i xci.Ai \qquad \text{(f)}$$

En utilisant donc les résultats des relations (a), (b), (c) et (d) dans les relations (e) et (f), on obtient :

$$x_C = \frac{\sum_i xci.Ai}{A} = \frac{\left(\frac{1}{2}c\right)bc+\left[\left(\frac{1}{3}c\right)\frac{a.c}{2}\right]+[(c-\frac{4r}{3\pi})(-\frac{\pi r2}{2})]}{\frac{c(2b+a)-\pi r2}{2}} =$$

$$= \frac{2ac(8a+3b)-3\pi br2(2a+b)}{6[c(2b+a)-\pi r2]}$$

A.N :

x_C = 29.389 mm

y_C = 100.342 mm

Exercice N°4 (Application du théorème de Guldin) :

Soit la demi-circonférence de rayon R = 10 cm, représentée par l'arc de cercle de la figure I-36 ci-dessous. Cet arc de cercle tourne autour de l'axe x en engendrant par sa rotation une surface de forme sphérique. Déterminer dans le repère xoy donné, la position du centre de gravité G de la demi-circonférence, en utilisant pour cela le premier théorème de Guldin.

Fig I-36

Solution :

A première vue, on constate que $x_G = 0$ (symétrie par rapport à l'axe y) ;

Il reste à déterminer y_G. Le centre de gravité G de la demi-circonférence est donc porté par y.

Rappelons en effet, que le 1er théorème de Guldin est défini par la relation suivante (Fig I-37) :

Fig I-37

$A = 2\pi y_G L$ (a)

Avec : $L = \pi R$ (b)

qui stipule : « L'aire de la sphère est égale au produit de la longueur L de la demi-circonférence de rayon R, par le périmètre décrit par la rotation du centre de gravité G de cette demi-circonférence autour de l'axe x»

La surface de la sphère A est aussi dans la littérature par la relation :

$A = 4\pi R^2$ (c)

Des relations (a), (b) et (c), on tire alors :

$y_G = \frac{2R}{\pi}$

Remarque :

On trouve bien ce résultat donné déjà au tableau I-2.

A.N: $x_G = 0$ cm et $y_G = 6.369$ cm

Exercice N°5 : (application du 2ème théorème de Guldin)

Soit la surface semi-circulaire, homogène et de rayon R = 20 cm, illustrée dans la figure I-38 ci-dessous. Cette tourne autour de l'axe x en engendrant par sa rotation un volume de forme sphérique. Déterminer dans le repère oxy donné, la position du centre de gravité G de la surface semi-circulaire, en utilisant pour cela le 2ème théorème de Guldin.

Fig I-38

Solution :

La surface étant homogène, son centre de gravité est confondu avec son centroïde C. On calculera alors les coordonnées de C ; soit x_C et y_C.

A première vue, on constate que xC = 0, en raison de la symétrie de la surface par de la demi-surface est donc porté par y.

Rappelons en effet, que le 2ème théorème du Guldin est définit par la relation suivante (Fig I-39).

Fig I-39

$V = 2\pi y_C A$ (a)

Qui stipule « Le volume de la sphère pleine est égale au produit de l'aire de la demi-surface circulaire de rayon R, par le périmètre du cercle décrit par la rotation du centre de gravité G (centroïde dans le cas de surface homogène) de cette surface autour de l'axe x»

Avec :

$A = \pi R^2/2$ (b)

Le volume de la sphère A est aussi dans la littérature par la relation :

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (c)

Des relations (a), (b) et (c), on tire alors :

$y_C = \frac{4R}{3\pi}$

Remarque : On trouve bien ce résultat déjà au tableau I-2.

A.N :

$x_C = 0$ cm et $y_C = 8.492$ cm

I-4 Force de contact entre solides :

I-4.1 Frottement et adhérence :

L'adhérence et le frottement sont deux phénomènes distincts mais voisins, dont l'importance est très grande dans le domaine de construction

Mécanique. Ils peuvent être utiles comme ils peuvent être évités suivant que leurs effets sont utiles ou nuisibles dans chaque particulier.

- **Le frottement :** On place un corps A de poids p sur un plan (S). Ensuite on fait subir à ce corps une force F (Fig I-40), de direction parallèle à celle du plan (S). Si le corps A s'anime d'un mouvement relatif par rapport à (S), on dit qu'il y'a frottement entre le corps A et le plan (S).

Fig I-40

- **L'adhérence :** Lorsqu'un corps B de poids P ne se déplace pas sur un plan (S), autrement dit demeure immobile en lui faisant subir une force f, on dit qu'il y'a adhérence.

I-4.2 Angle de frottement et angle d'adhérence :

I-4.2.1 Expérience :

A) Description du dispositif expérimental :

Le dispositif expérimental pour définir l'adhérence et le frottement est représenté dans la figure (I-41). On y dispose d'un plan horizontal (S) que l'on vient suspendre à deux fils verticaux U et V, tous les deux liés au plancher du banc d'essais. Sur le pan (S), on pose un corps B de poids P. Un rapporteur gradué en radians (ou en degrés) est fixé en haut au coin du plancher, pour vérifier l'horizontalité du plan (S) et aussi mesurer les angles d'inclinaison des fils U et V par rapport à la verticale.

Fig I-4: Dispositif expérimental définissant l'adhérence et le frottement

B) Conduite de l'expérience :

1°) Avant l'intervention de la force F :

Le corps B (Fig I-42) est donc en équilibre sous l'action de son poids P et de la réaction R du plan (S) tel que P + R = 0. Dans ce cas les fils U et V sont tous les deux verticaux.

Fig I-42 : Etat d'équilibre avant la force F

U_0 et V_0 les actions respectives des tensions des fils sur le plan (S)

2°) Après introduction de la force F :

Si on augmente progressivement la force F, on constate que le corps B reste immobile et ne manifeste aucun mouvement, il y'a alors adhérence entre ce corps et le plan (S) et les fils U et V continuent à s'incliner par rapport à la verticale, à mesure que F augmente elle aussi (Fig I-43).

Fig I-43 : Etat d'équilibre après intervention de la force F

La condition d'équilibre du corps B est assurée sous l'action du poids P su corps, de la réaction R su plan (S) sur B et de la force F, telle que : F+ P + R = 0

3°) Rupture de l'adhérence :

La force F continue à augmenter, B reste toujours immobile et l'angle α augmente aussi. Lorsque α atteint une certaine valeur, soit α_1 cette valeur, le corps B se met à glisser sur le plan (S). Dans ce cas, l'adhérence est rompue et l'angle α commence à diminuer jusqu'à une valeur α_2 inférieure à α_1, où il reste stabilisé même sile corps B continue à s'accélérer sur (S).

On définit ainsi l'angle d'adhérence et l'angle de frottement comme suit :

- **Angle d'adhérence (Fig I-44) :**
  La valeur maximale atteinte par l'angle α lorsque le corps B reste immobile et à laquelle il se met à glisser sur le plan (S), étant α_1. On note par φ_a l'angle d'adhérence qui est égal à α_1.

Fig I-44 Définition de l'angle d'adhérence

- **Angle de frottement (Fig I-45) :**
  C'est la valeur de l'angle α pendant laquelle le corps b se déplace sur le plan (S). On note par φ_f l'angle de frottement qui est égal à α_2.

Fig I-45 : Définition de l'angle de frottement

Remarque : Généralement on a toujours $\varphi_a > \varphi_f$ avec une légère différence.

I-4.3 Coefficient d'adhérence et coefficient de frottement :

A)- Coefficient d'adhérence : Il est défini comme étant le rapport entre la force d'adhérence F_a sur la réaction

$N_{(S)/B}$ du plan sur le corps B. On écrit :

$$\mu_a = \frac{Fa}{N\ (S)/B} \qquad \text{(I-49)}$$

B)-Coefficient de frottement : Il est définit comme étant le rapport entre la force de frottement F_f sur la réaction $N_{(S)/B}$ du plan sur le corps B. On écrit :

$$\mu_f = \frac{Ff}{N\ (S)/B} \qquad \text{(I-50)}$$

Les relations entre les angles d'adhérence et de frottement et leurs coefficients correspondants sont données comme suit :

$$\operatorname{tg} \varphi_a = \mu_a \qquad \text{(I-51)}$$

$$\text{tg } \varphi_f = \mu_f \qquad \text{(I-52)}$$

I-4.4 Glissement d'un corps solide sur un plan incliné :

Considérons un corps B au repos sur une table inclinable. Le corps est soumis à l'action de son poids P et à la réaction R de la table.

Si la table est horizontale , la réaction R exercée par elle sur le corps B, est perpendiculaire à leur surface de contact et s'équilibre avec le poids P du corps (Fig I-46)

Fig I-46 : Glissement d'un corps sur un plan horizontal

Si maintenant on fait incliner la table d'un petit angle θ de manière que B reste immobile sur la table, la ligne d'action de la réaction R tournera du même angle θ par rapport à la perpendiculaire au plan qui est la table et continuera à s'opposer au poids P du corps B (Fig I-47). La réaction R de la table sur le corps b aura dans ce cas deux composantes, une composante normale N, perpendiculaire au plan incliné et une composante tangentielle T, parallèle au plan incliné.

Fig I-47 : Adhérence d'un corps sur un plan incliné

Les composantes N et T de R sont liées au poids P du corps par les relations suivantes :

$$N = P \cos \theta$$

et (I-53)

$$T = P \sin \theta$$

Tant que le corps B demeure immobile sur le plan incliné, il y'a toujours adhérence.

On continue à incliner la table, l'angle θ augmente bien entendu et le mouvement du corps B est imminent. Lorsque θ atteint donc une valeur maximale θ_{max} , à laquelle B commence à se déplacer librement sur le plan incliné suivant l'axe x, l'adhérence est rompue et son angle φ_a est égal à cette valeur maximale de θ (Fig I-48).

Fig I-49 : Limite de l'adhérence du corps B sur le plan incliné

Les relations (I-53) deviennent dans ce cas :

$$N = P \cos \varphi_a$$

et (I-54)

$$T = P \sin \varphi_a$$

Le coefficient d'adhérence est donné par :

$$\mu_a = \operatorname{tg} \varphi_a = \frac{T}{N} \qquad \text{(I-55)}$$

Au moment où le corps B commence à se déplacer sur le plan incliné, l'angle d'adhérence φ_a chute à une valeur φ_f appelée angle de frottement (Fig I-50).

Alors, s'il y'a déplacement du corps B sur le plan incliné, le frottement remplace l'adhérence et la nouvelle réaction R aura une nouvelle composante tangentielle F_f qui vient remplacer T, appelée aussi force de frottement.

Fig I-50 : Rupture de l'adhérence entre B et le plan incliné

Le coefficient de frottement est donné parla relation :

$$\mu_f = \operatorname{tg} \varphi_f = \frac{\mathrm{Ff}}{N} \qquad \text{(I-56)}$$

I-4.4.1 Glissement d'un corps sur un plan incline soumis à une troisième force:

Le corps B est soumis à une troisième force F qui vient s'ajouter à son poids P et à la réaction du plans R (Fig I-53).

Fig I-53 : Corps glissant sur un pan incliné et soumis à une troisième force

La majorité des problèmes traitant le phénomène de frottement appartiennent à l'un des trois groupes suivants :

1er groupe : On doit connaître toutes les forces appliquées sur le corps ainsi que le coefficient de frottement et nous devons déterminer si le corps reste au repos ou s'il se met en mouvement.

2ème groupe : On doit connaître toutes les forces et on sait que le mouvement est imminent. Nous devons dans ce cas déterminer la valeur du coefficient de frottement, donc la force de frottement.

3ème groupe : On connaît la valeur du coefficient de frottement et on sait que le mouvement est imminent dans une direction déterminée. Nous devons calculer la grandeur et la direction d'une des forces appliquées sur le corps B.

I-4.5 Exercices d'applications :

Exercice N°1 :

Un corps B de poids P = 40 daN, au repos sur un plan horizontal (H) comme le montre la figure I-54 ci-dessous. Si l'on fait subir à ce corps une force F pour le faire déplacer sur le plan (H), calculer cette force dans les deux cas suivants :

Fig I-54

a) Adhérence de B sur (H), $\mu_a = 0.25$
b) Frottement de B sur (H), $\mu_f = 0.20$

Solution :

a) Calcul de la force F dans le cas de l'adhérence :

Le schéma de la figure I-55 ci-dessous nous illustre ce cas, où l'on voit apparaître l'angle d'adhérence φ_a. Il faut noter ici que le corps B ne se déplace pas sur le plan (H).

Fig I-55

F_a et $N_{(H)/B}$ sont respectivement la force d'adhérence (composante tangentielle de R) et la composante normale au plan de la réaction R du plan horizontal sur B. S'il y a adhérence, cela signifie que le corps B est immobile, on peut écrire :

$$F = F_a \qquad (a)$$

Alors, on sait que le coefficient d'adhérence μ_a est lié à la force d'adhérence F_a et à l'angle d'adhérence φ_a par (cf relation (I-55)) :

$$\text{tg}\ \varphi_a = \frac{Fa}{N\ (H)/B} \qquad (b)$$

Par ailleurs, on pose (Fig I-56) :

$$N_{(H)/B} = P \qquad (c)$$

Des relations (a), (b) et (c), on tire alors :

$$F = F_a = \mu_a \,.\, P \qquad (d)$$

A.N : $F = 0.25 \,.\, 40 = 10$ daN

b) Calcul de la force F dans le cas de frottement :

Le schéma de la figure I-57 illustre ce cas, où l'on voit apparaître l'angle de frottement φ_f

Fig I-57

S'il y a frottement, cela signifie que le corps B est en mouvement sur le plan (H), on peut écrire :

$$F_a \leq F \qquad (e)$$

Ors on sait que le coefficient de frottement μ_f est lié à la force de frottement F_t et à l'angle de frottement φ_f par la relation :

$$\text{tag}\ \varphi_f = \mu_f = \frac{Ft}{N\ (H)/B} \qquad (f)$$

Des relations (e), (f) et (c), on tire :

$$F \geq F_f = \mu_f \,.\, P \qquad (g)$$

A.N: $F \geq 0.2 \,.\, 40 = 8$ daN

Exercice N°2 :

On applique une force F= 10 dan sur un corps B de poids P = 30 daN, reposant sur un plan incliné (Fig I-58 ci-dessous).

Fig I-58

1) Calculer la valeur la valeur de θ maximale à partir de laquelle le corps B reste toujours en équilibre.
2) Calculer la force d'adhérence Fa et la force de frottement Ft si l'on donne respectivement μ_a = 0.25 et μ_f = 0.2

Solution :

1) Valeur maximale de θ à partir de laquelle le corps B reste toujours en équilibre :

Le corps B doit être en équilibre, signifie qu'il y a adhérence entre lui et le plan incliné. La condition d'équilibre de B doit satisfaire la relation :

$$\sum_i Fext = 0 \qquad \text{(a)}$$

Qui représente la résultante nulle des forces extérieures agissant sur B (Fig I-59) :

Fig I-59

La relation (a) s'écrit :

$$\sum_i Fext = P + F = 0 \qquad \text{(b)}$$

En projetons sur les axes x et y, on a :

$$P_x - F = 0 \qquad \text{(c)}$$

et

$P_y + N_{(I/)/B} = 0$ (d)

On s’intéresse à la relation (c) puisque la projection de F sur l’axe y est nulle. Il faut rappeler par ailleurs que $\varphi_a = \theta_{max}$ dans le cas de l’adhérence. Il vient alors :

$$P \sin \theta_{max} - F = 0$$

$$\rightarrow \theta_{max} = \arcsin F/P \qquad \text{(e)}$$

A.N: $\theta_{max} = 19.47°$

2) Force d’adhérence F_a et force de frottement F_r :

Rappelons les formules définissant les coefficients d’adhérence μ_a et de frottement μ_f :

$$\mu_a = \frac{Fa}{N\ (I/)/B} = \text{tang}\ \varphi_f \rightarrow F_a = \mu_a \,.\, N_{(I/)/B} \qquad \text{(f)}$$

et

$$\mu_f = \frac{Fa}{N\ (I/)/B}\ \text{tg}\ \varphi_f \rightarrow F_t = \mu_f \,.\, N_{(I/)/B} \qquad \text{(g)}$$

Avec $N_{(I/)/B} = Py = P \cos \theta_{max}$, la relation (f) devient alors :

$$\mu_a = \frac{Fa}{N\ (I/)/B} = \text{tang}\varphi_f \rightarrow F_a = \mu_a \,.\, P\cos \theta_{max} \qquad \text{(h)}$$

Pour ce qui est de la relation (g), $N_{(I/)/B}$ change de valeur lorsque φ passe de $\varphi_a = \theta_{max}$ à φ_f , on écrit :

$$\mu_f = \frac{Ff}{N\ (I/)/B} = \text{tang}\ \varphi_f \rightarrow F_t = \mu_f \,.\, P\cos \varphi_f \qquad \text{(i)}$$

Avec $\varphi_f = \text{arctang}\ \mu_f = \text{arctang}\ 0.20 = 11.309°$

A.N

$F_a = 77.71$ N

$F_f = 58.83$ N

Exercice N°3 :

Un corps A de poids P = 20 daN, repose sur un plan incliné (i) d'un angle $\theta = 20°$ comme le montre la figure I-60 ci-dessous. Le corps A a tendance à se faire lisser vers le bas du plan par la force $F_1 = 20$ N. pour empêcher le corps de glisser sur le plan, on lui applique alors une autre force F faisant $\alpha = 30°$ avec le plan incliné.

1) Calculer la force F
2) Calculer la réaction R_N normale du plan sur le corps A

Solution :

1) Calcul de la force F (Fig I-61)

Si l'on veut empêcher le corps A de glisser sous l'action de la force F1, en lui appliquant F, cela signifie qu'il doit rester en équilibre statique sur le plan incliné (I).

Fig I-61

On écrit alors la condition d'équilibre de A sur (I) comme suit :

$$\sum_i Fext = 0 \qquad \text{(a)}$$

Ou encore :

$$\sum_i F + F1 + P + Rn = 0 \qquad \text{(b)}$$

En projetons sur l'axe des x, cela donne :

$$F_x - F_1 - P_x = 0 \qquad \text{(c)}$$

Soit :

$$F_x - F_1 - P.\sin\theta = 0 \qquad \text{(d)}$$

Il vient :

$$F_x = P.\sin\theta + F_1 \qquad \text{(e)}$$

En regardant le schéma de la figure , on peut aussi écrire :

$$F_x = F.\cos\alpha \qquad \text{(f)}$$

D'où en égalant les relations (e) et (f), on obtient :

$$F = P \frac{Sin\theta + F1}{Cos\alpha} \qquad \text{(g)}$$

A.N

F = 30.97 daN

2) Calcul de la reaction R_N:

On projette maintenant la relation (a) ou la relation (b) sur l'axe des y. Il vient :

$$F_y - P_y + R_N = 0 \qquad \text{(h)}$$

En posant : $F_y = F.\sin\alpha$ et $P_y = P.\mathrm{Cos}\,\theta$,

La relation (h) devient :

$$F.\mathrm{Sin}\,\alpha - P.\mathrm{Cos}\,\theta + R_N = 0 \qquad \text{(i)}$$

D'où:

$$R_N = P.\mathrm{Cos}\,\theta - F.\mathrm{Sin}\,\alpha \qquad \text{(j)}$$

A.N:

RN = 3.308 daN

II-1 Généralités:

L'objet de la cinématique consiste en l'étude des mouvements des corps en fonction du temps, sans tenir compte des causes qui les produits.

L'étude du mouvement d'un corps est l'étude des positions successives de ce corps par rapport à un repère pris comme référence (trièdre de référence ou référentiel). Il est nécessaire de préciser en cinématique le repère utilisé, car le mouvement en dépend. Un voyageur assis dans le wagon d'un train en mouvement par rapport à un repère lié au wagon, en est un exemple type.

II-2 Cinématique du point :

II-2.1 Rappels de quelques définitions :

II-2.1.1 Point matériel :

Comme nous l'avons défini en début du chapitre précédent, un corps dont on peut concentrer la masse dans un seul point de l'espace, un tel corps est appelé point matériel. Souvent le mot particule est aussi utilisé pour désigner un point matériel. La grandeur et la forme d'un corps considéré comme tel, n'interviennent pas dans le traitement des problèmes en mécanique. Il peut être aussi défini comme étant un élément de matière, de dimensions négligeables, que l'on assimile à point géométrique. Dans le cas d'un corps, ce point géométrique est rapporté au centre de gravité du corps si celui-ci est homogène.

II-2.1.2 Trajectoire :

C'est le lieu des positions successives occupées par le mobile M, à partir de l'origine O du référentiel choisi. La trajectoire peut être rectiligne (Fig II-1), curviligne (ouverte Fig II-2) ou bien fermée (Fig II-3).

Les trois figures

II-2.2 Origine des espaces :

La position origine ou l'origine des espaces d'un point mobile M, souvent représentée par la lettre O dans un repère tridimensionnel oxyz, indique l'endroit où toutes les coordonnées du mobile sont nulles ; $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. La position du mobile M est occupée par M_0 en cet endroit (Fig II-.4). Toutes les autres positions Mi du mobile M, auront leurs coordonnées x_i, y_i , et z_i qui seront définies (en unité de longueur) par rapport à celles de la position origine M_0.

Fig II-.4 : Définition de l'origine des espaces

Remarque : Dans certains cas particuliers, M0 n'est pas en 0. Dans ce cas alors, une au moins des coordonnées de M0 n'est pas nulle.

II-2.3 Origine du temps

N'instant origine ou l'origine du temps d'un mobile M, souvent représenté par la lettre t0 et souvent confondue avec l'origine des espaces, dans le repère tridimensionnel habituellement connu oxyz, est précisé en rapport avec une position définie du mobile dont on étudie le mouvement dans ce repère. Les différents instants ti se rapportant aux différentes positions Mi du mobile M, seront définis par rapport à l'instant origine t0. Si l'instant ti d'une position Mi du mobile M est postérieure à celui de sa position M0 à l'origine des temps, cet instant ti sera positif.

C'est-à-dire il sera accompagné du signe + . Si par contre maintenant ti est antérieure à celui de M0, ce temps ti sera négatif, c'est-à-dire il sera accompagné du signe - .

II-2.4 Vecteur position :

Si le mobile est en une position M, par rapport à sa position M0 d'origine confondu avec 0 (l'origine des axes dans le repère oxyz), on définit la position de M par le vecteur dit vecteur position que l'on désigne par OM (Fig II-5).

Fig II-5 : Vecteur position d'un mobile M dans l'espace

Le vecteur position OM est donc définit comme suit :

$$OM = x_M i + y_M j + z_M k \qquad \text{(II-1)}$$

On peut aussi écrire le vecteur OM comme suit :

$$OM = \begin{matrix} 0x\mathrm{M} \\ 0yM \\ 0zM \end{matrix} \qquad \text{(II-2)}$$

Où : $0x_M$, $0y_M$ et $0z_M$ sont les composantes (les projections) du vecteur OM, respectivement suivant les axes x, y et z.

II-2.5 Vecteur vitesse :

Soit un mobile M assimilé à un point matériel, décrivant une trajectoire (C) dans son mouvement par rapport à un repère oxyz choisi (Fig II-6). Le vecteur vitesse du mobile en une position M, est défini comme le vecteur U tangent à (C)en cette position.

Fig II-6 : Vecteur vitesse d'un mobile M sur une trajectoire (C)

Vecteur vitesse moyenne :

On calcul le vecteur vitesse moyenne U_{moy} en supposant que le mobile M effectue un déplacement d'une position M_1 au temps t_1, pour arriver à une position M_2au temps t_2 (Fig II-7) :

Fig II-7 : Principe de calcul du vecteur vitesse moyenne

Il vient en effet :

$$U_{moy} = \frac{M1M2}{t2-t1} = \frac{M1M2}{\Delta t} \qquad \text{(II-3)}$$

U_{moy} est définie comme étant la vitesse du mobile M qui irait en mouvement rectiligne uniforme, d'une position M1 vers une position M2 dans un intervalle de temps Δt.

Vecteur vitesse instantanée :

C'est la limite du rapport précédent (relation II-3) lorsque t2 tend vers t1 ; c'est-à-dire lorsque Δt tend vers 0, la vitesse instantanée vaut :

$$U = \lim \frac{OM1-OM2}{t2-t1} = \frac{dOM}{dt} \qquad \text{(II-4)}$$

En utilisant les composantes du vecteur position OM, onpeut aussi écrire le vecteur vitesse instantanée U comme suit :

$$U = \frac{dOM}{dt} = \frac{dxi}{dt} + \frac{dyj}{dt} + \frac{dzk}{dt} \qquad \text{(II-5)}$$

Ou encore :

$$U = u + v + w \qquad \text{(II-6)}$$

Les composantes u, v et w de U sont portées respectivement sur les axes x, y et z.

Le module du vecteur vitesse instantanée est donnée par la relation suivante (le repère oxyz supposé orthonormé) :

$$U = |U| = \sqrt{u2 + v2 + w2} \qquad \text{(II-7)}$$

II-2.6 Vecteur accélération :

Comme pour le vecteur vitesse qui est défini à partir du vecteur position , le vecteur accélération sera défini de la même manière mais à partir du vecteur vitesse.

Vecteur accélération moyenne :

Soit le mobile M ayant une vitesse U1 à l'instant t1 et une vitesse U2 à l'instant t2 comme le montre la figure II-8.

Fig II-8 : Définition du vecteur accélération moyenne

En effet, le vecteur accélération est défini par la relation suivante :

$$\gamma_{\text{moy}} = \frac{U2-U1}{\Delta t} = \frac{U2-U1}{\Delta t} \qquad \text{(II-8)}$$

Vecteur accélérateur instantanée :

Appelé aussi accélération à l'instant t, le vecteur accélération instantanée γ est définit comme la limite du rapport précédent (relation (II-8)), lorsque ($t_2 - t_1$) tend vers 0. Ce qui ramène à la relation :

$$\gamma = \frac{dU}{dt} \qquad \text{(II-9)}$$

En utilisant les composante du vecteur vitesse instantanée, il vient :

$$\gamma = \frac{dU}{dt} + \frac{dv}{dt} + \frac{dw}{dt} \qquad \text{(II-10)}$$

Ou encore, en utilisant les composantes du vecteur position :

$$\gamma = \frac{d2x}{dt2} + \frac{d2v}{dt2} + \frac{d2w}{dt2} \qquad \text{(II-11)}$$

Le module du vecteur accélération instantanée est donnée par la relation suivante (le repère oxyz supposé orthonormé) :

$$\gamma = |\gamma| = \sqrt{\gamma 2x + \gamma 2y + \gamma 2z} \qquad \text{(II-12)}$$

II-2.7 Etude du mouvement :

Pour étudier le mouvement d'un mobile M, il s'agit généralement d'étudier sa trajectoire (C). Autrement dit, étudier le sens de son déplacement, sa vitesse, son accélération ; tout cela se fera par rapport à un repère oxyz choisi au préalable : En plus des relations décrivant le mouvement du mobil : La fonction des espaces, la fonctiondes vitesse et la fonction des accélérations, la représentation de ces fonctions par leurs diagrammes respectifs est nécessaire. Ces diagramme sont appelés diagramme du mouvement . Ils sont tracés dans le système référence oxyz, où en générale, l'axe des abscisses comportera les vecteurs du temps et l'axe des ordonnées, comportera les valeurs des espaces (e ou s), ou des vitesses (U) ou des accélérations (γ) .

II-2 Cinématique du corps solide :

Rappelons qu'un matériel solide, est un corps rigide, considéré comme l'ensemble d'un grand nombre de points matériels demeurant à distance constante les uns des autres. Sa forme et sa grandeur ne devant pas être négligées dans ce cas, elles sont donc prises en compte dans le traitement des problèmes de mécanique.

La position d'un corps est parfaitement définie dans un système référentiel à partir de trois de ses points. Il peut être en mouvement :

- De translation
- De rotation
- Hélicoïdal

II-2.1 Mouvement de translation :

Un corps est dit en mouvement de translation par rapport à un système de référence, si tout le vecteur (e ou U ou γ) lié à deux points quelconques du corps, reste équipollent à lui-même. On peut dire que le corps passe ici d'une position à une autre par translation, au sens de la géométrie.

On en tire les propriétés suivantes (II-9) :

- ✓ **Trajectoires :** des différents points du solide en mouvement de translation se déduisent les unes des autres par translation : ce sont des courbes identiques et superposables.

- ✓ **Vitesse :** A chaque instant, les vecteurs vitesses de chacun des points du solide en translation, sont équipollents.

- ✓ **Accélération :** A chaque instant, les vecteurs accélérations de chacun des points du solide en translation, sont équipollent.

Fig II-9 : Propriétés du mouvement de translation d'un corps solide

II-2.2 Mouvement de rotation :

C'est un mouvement dans lequel deus point du solide restent fixes. Si A et B par exemple , sont les deux points fixes du corps solide présenté dans la figure II-10, il en résulte que tous les points de la droite AB portée par l'axe Oz su trièdre oxyz, est donc l'axe de rotation du solide.

Fig II-10 : Propriétés du mouvement de rotation d'un corps solide

ω est le vecteur de rotation du solide.

A chaque instant, la position du solide est définie en rotation, par rapport au repère oxyz, par l'angle θ des plans xoy et Moz. L'équation du mouvement de rotation du solide est donnée par la relation :

$$\theta = f(t) \tag{II-13}$$

On tire les propriétés suivantes :

- ✓ **Trajectoire :** Tous les points du solide décrivent chacun une circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe de rotation (Fig II-11).

- ✓ **Vitesse angulaire :** A chaque instant, tout les points du solide ont même vitesse angulaire, qui est la vitesse angulaire du solide, exprimée par la relation :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \theta' \qquad \text{(II-14)}$$

  - ✓ **Vitesse linéaire d'un point du solide :** soit M un point quelconque du solide (Fig II-11). A un instant donné t, la vitesse linéaire U de ce point est représenté par le vecteur U , tangent en M au cercle de rayon r, décrit par celui-ci, dirigé dans le sens du mouvement, et ayant comme grandeur le produit :

$$\mathbf{U} = \omega \, . \, r \qquad \text{(II-15)}$$

Remarque : La relation (II-15) n'est valable que si les vecteurs ω et OM sont perpendiculaires comme le montre la figure II-11.a ; c'est-à-dire que M décrit effectivement une circonférence . Dans le cas contraire, il faut tenir compte de l'angle (≠ π/2) entre les deux vecteurs et appliquer donc le produit vectoriel entre eux, soit U = ω. OM.

Fig II-11 : Relation entre vitesse angulaire et vitesse linéaire d'un solide en rotation